

全国知名考研辅导机构指定教材

全国硕士研究生入学统一考试

[高等数学] 辅导教材

主编：黄庆怀

- 重点难点归纳
- 要点内容精讲
- 典型题型精解

2011



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

全国知名考研辅导机构指定教材

013/504

:2011

2010

全国硕士研究生入学统一考试

【高等数学】 辅导教材

主编：黄庆怀

- 重点难点归纳
- 要点内容精讲
- 典型题型精解



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书是研究生入学统一考试科目“高等数学(微积分)”的复习指导书。数学一、数学二、数学三的考生均适用。本书紧扣考研数学大纲,贴近考试实际,内容丰富、实用。全书共9章,每1章包括重点难点归纳、要点内容精讲、典型题型精解、本章习题及答案。本书概念叙述清晰,解题思路巧妙,方法归纳实用。适合所有考研学子,对于在校的大学生及自学者,也是一本较好的学习参考书。本书作者是考研数学辅导名师。

图书在版编目(CIP)数据

2011 全国硕士研究生入学统一考试高等数学辅导教材
/黄庆怀主编. —北京:北京航空航天大学出版社,
2010.2

ISBN 978-7-81124-986-6

I. ①2… II. ①黄… III. ①高等数学—研究生—入
学考试—自学参考资料 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 234268 号

2011 全国硕士研究生入学统一考试高等数学辅导教材

主 编 黄庆怀

策划编辑 谭 莉

责任编辑 谭 莉

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(100191) 发行部电话:010-82317024 传真:010-82328026

<http://www.buaapress.com.cn> E-mail:bhpress@263.net

涿州市新华印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1092 1/16 印张:23.75 字数:839 千字

2010 年 2 月第 1 版 2010 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-81124-986-6 定价:39.00 元

前 言

本书是针对考研的“高等数学(微积分)”部分的专门复习指导书,是以作者多年来的考研辅导讲义(高等数学部分)为素材编写而成的,对数学一、数学二、数学三的考生均适用。全书共包括9章内容及附录,具体为:函数、极限、连续,一元函数微分学,一元函数积分学及应用,常微分方程,多元函数微分学及应用,重积分,线、面积分,无穷级数,矢量代数与空间解析几何,附录(考研预备知识)。每章分成4个部分:重点难点归纳、要点内容精讲、典型题型精解、本章习题及答案。

本书紧扣数学考研大纲,贴近考试实际,内容丰富、实用,概念叙述清晰,解题思路巧妙,方法归纳实用。特点如下:

★基本概念、理论和公式讲解详细全面。所有例题都强调基本概念和基本理论的应用,解题方法独特,强调技巧的综合应用。例题丰富,每章的例题都能概括每章内容的全部概念、计算方法和各种题型。

★例题详细讲解做题的思路,解题入手的原理方法、技巧,容易出错的地方、规律和心得体会。

★读者在理解本书内容和完成相应的习题后,在基本概念、理论的理解能力和题目的运算能力方面必有明显的提高。

本书适合所有考研学子,也可作为在校的大学生及自学者的“高等数学”的学习参考书。

本书编写过程中宁开东同志仔细地校对了手写稿与录排清样,改正了书稿录排中出现的错误,在此表示感谢!

由于编者水平有限,如有疏漏和错误之处,欢迎读者批评指正!

祝所有考研学子顺利考入自己的理想学校!

黄庆怀

2010年2月

目 录

绪 论	1
一、考研数学简介	1
二、考研数学复习方法	2
第1章 函数、极限、连续	6
重点难点归纳	6
要点内容精讲	6
一、函 数	6
二、极 限	14
三、连续(间断)	16
典型题型精解	17
本章习题及答案	38
第2章 一元函数微分学	45
重点难点归纳	45
要点内容精讲	45
一、导数概念	45
二、导数计算	46
三、中值定理与导数应用	48
典型题型精解	51
本章习题及答案	72
第3章 一元函数积分学及应用	88
重点难点归纳	88
要点内容精讲	88
一、不定积分	88
二、定积分	90
三、定积分应用	95
四、微积分在经济问题中的应用	95
典型题型精解	97
本章习题及答案	137
第4章 常微分方程	148
重点难点归纳	148
要点内容精讲	148
典型题型精解	158
本章习题及答案	168
第5章 多元函数微分学及应用	175
重点难点归纳	175
要点内容精讲	175
一、多元函数、极限、连续、偏导数、全微分	175
二、多元函数微分法	178

三、方向导数与梯度(仅要求数学一)	179
四、多元函数微分的应用	180
典型题型精解	182
本章习题及答案	213
第6章 重积分	218
重点难点归纳	218
要点内容精讲	218
一、二、三重积分的概念	218
二、二重积分计算	219
三、三重积分计算	222
典型题型精解	224
本章习题及答案	249
第7章 线、面积分	253
重点难点归纳	253
要点内容精讲	253
一、曲线积分	253
二、曲面积分	257
三、场论初步	259
四、多元函数积分的应用	259
典型题型精解	261
本章习题及答案	283
第8章 无穷级数	289
重点难点归纳	289
要点内容精讲	289
一、常数项级数	290
二、函数项级数与幂级数	292
三、傅里叶级数	294
典型题型精解	296
本章习题及答案	336
第9章 矢量代数与空间解析几何	346
重点难点归纳	346
要点内容精讲	346
一、向 量	346
二、平面与直线	348
三、曲面与空间曲线	349
典型题型精解	351
本章习题及答案	360
附录 考研预备知识	363
初等代数	363
初等几何公式	365
平面三角	365
平面解析几何	367

绪 论

一、考研数学简介

考试性质

全国硕士研究生入学数学考试是为招收工学、经济学、管理学硕士研究生而设置的具有选拔功能的水平考试。它的指导思想是既要有利于国家对高层次人才的选拔,也要有利于促进高等学校各类数学课程教学质量的提高。

考查目标

要求考生比较系统地理解数学的基本概念和基本理论,掌握数学的基本方法,具备抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、运算能力和综合运用所学的知识分析问题和解决问题的能力。

试卷分类及使用专业

根据工学、经济学、管理学各学科、专业对硕士研究生入学所应具备的数学知识和能力的不同要求,硕士研究生入学统考数学试卷分为 3 种. 其中针对工学门类的为数学一、数学二, 针对经济学和管理学门类的为数学三. 招生专业须使用的试卷种类规定如下:

1. 须使用数学一的招生专业

① 工学门类中的力学、机械工程、光学工程、仪器科学与技术、冶金工程、动力工程及工程热物理、电气工程、电子科学与技术、信息与通信工程、控制科学与工程、计算机科学与技术、土木工程、水利工程、测绘科学与技术、交通运输工程、船舶与海洋工程、航空宇航科学与技术、兵器科学与技术、核科学与技术、生物医学工程等 20 个一级学科中所有的二级学科、专业。

② 授工学学位的管理科学与工程一级学科。

2. 须使用数学二的招生专业

工学门类中的纺织科学与工程、轻工技术与工程、农业工程、林业工程、食品科学与工程等 5 个一级学科中所有的二级学科、专业。

3. 须选用数学一或数学二的招生专业(由招生单位自定)

工学门类中的材料科学与工程、化学工程与技术、地质资源与地质工程、矿业工程、石油与天然气工程、环境科学与工程等一级学科中对数学要求较高的二级学科、专业选用数学一, 对数学要求较低的选用数学二。

4. 须使用数学三的招生专业

① 经济学门类的各一级学科。

② 管理学门类中的工商管理、农林经济管理一级学科。

③ 授管理学学位的管理科学与工程一级学科。

考试形式和试卷结构

1. 试卷满分及考试时间

各卷种试卷满分均为 150 分, 考试时间为 180 分钟。

2. 答题方式

答题方式为闭卷、笔试.

3. 试卷内容结构

分值比例 (%) 考试内容	数学一	数学二	数学三
高等数学(或微积分)	56	78	56
线性代数	22	22	22
概率论与数理统计	22	—	22

4. 试卷题型结构

各卷种试卷题型结构均为:

单项选择题 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分;

填空题 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分;

解答题(包括证明题) 9 小题, 共 94 分.

二、考研数学复习方法

1. 考研数学分析

硕士研究生入学统一考试属“选拔性考试”, 对考生的数学基础和能力进行比较全面的考查: 考生的基本知识和概念掌握得如何, 内容的整体性与综合性掌握得如何, 以及是否有较强的基本运算能力. 自 1987 年全国工学、经济学硕士研究生入学统一考试以来, 每年的试题都紧扣考试大纲, 始终遵循“考查的知识面较广, 重基础, 重能力, 难度适中”的原则, 广大考生十分认同这样的考试, 并且意识到只有“全面, 认真, 讲究方法, 狠下功夫”才能取得成功, 否则就不会取得好的成绩.

考研数学试题大致有以下特点.

说明: 08_4^{10} 意为“2008 年数学三、数学四, 10 分”, 下同.

1) 重基础, 重概念, 重方法, 不会有偏题、怪题.

【例 1】① $\langle 08_4^{10} \rangle$ 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} = \underline{\quad -\frac{1}{6} \quad}$.

② $\langle 08_2^{09} \rangle$ 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - \sin(\cos x)) \sin x}{x^4} = \underline{\quad \frac{1}{6} \quad}$.

③ $\langle 07_4^{04} \rangle$ 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 同 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是 B .

(A) $1 - e^{\sqrt{x}}$ (B) $\ln(1 + \sqrt{x})$ (C) $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$ (D) $1 - \cos \sqrt{x}$

④ $\langle 07_2^{04} \rangle$ 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 同 $\sqrt{x}$ 等价无穷小的无穷小量是 B .

(A) $1 - e^{\sqrt{x}}$ (B) $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ (C) $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$ (D) $1 - \cos \sqrt{x}$

⑤ $\langle 05_4^{04} \rangle$ 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2 + 1} = \underline{\quad 2 \quad}$.

⑥ $\langle 05_4^{08} \rangle$ 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) = \underline{\quad \frac{3}{2} \quad}$.

以上考题均属基本的“求极限,且均是利用等价代换求极限”,体现出考试的深度以及重基础、重基本的原则.

【例 2】 (07 $\frac{1}{2}$ 04) 连续函数 $y=f(x)$ 在 $[-3, -2], [2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周; 在区间 $[-2, 0], [0, 2]$ 的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周见图 0-1, 且 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则

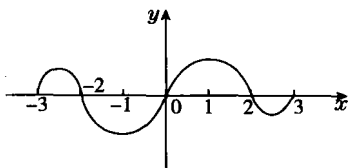


图 0-1

下列结论正确的是 C.

(A) $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$

(B) $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$

(C) $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$

(D) $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$

此题出得好,将概念、计算典型的结合,以客观题的形式出现,考查的知识点是定积分的几何意义——面积分的代数和.若考生概念不清肯定出错,不掌握“选择题”的答题技巧(排除法)也不行.答案应选(C),理由是: $F(2)$ 为正, $F(3)$ 为正,且 $F(3) < F(2)$, $F(-3) = \int_0^{-3} f(t) dt = -\int_{-3}^0 f(t) dt = +$,同理 $F(-2) = +$,故应选(C).

2) 考题均含多个知识点(3~5个)

这就要求考生对“内容的整体性与综合性”的掌握比较好,但是如果对每个知识点都熟悉,却不能熟练巧妙地将它们串在一起(这就是综合性、技巧性)也不能很好地应对考研试题.

【例 3】 (98403), $f(x) = x^n$ 过点(1,1)的切线与 x 轴相交于点 $(\xi_n, 0)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) = \frac{1}{e}$.

此题属基本题,简单,满分只有 3 分,却要用到 4 个知识点:① 会求切线方程;② 会求切线与 x 轴的交点 $(\xi_n, 0)$;③ 会求函数值 $f(\xi_n)$;④ 会求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n)$.

3) 要求概念清楚,计算能力强

考题的运算量一般都很小,结果比较简单.这就要求考生的概念清楚,计算能力较强,否则就达不到原题的简单运算的要求,算不出原题的简单结果,且感到做题时间很不够.例如:1)中的例 2,如果直接求出 $F(3), F(2), F(-3)$ 的值再比较大小,那就太麻烦了,达不到“选择题”的答题要求,时间也不够.

4) 必有技巧性、灵活性试题

试题一定有引考生“上当”的地方,每份试卷中必有“有一定技巧性、灵活性”的试题.试题必有考生平时“容易出错”的模拟题,如果考生在概念、综合计算方面掌握不够,就会“上当,失误”.例如 $f(x)$ 可导,求 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0 f(x) - x f(x_0)}{x - x_0}$. 不少考生这样做:

$$\text{原式} \xrightarrow[\text{法则}]{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0 f'(x) - f(x_0)}{1} = x_0 f'(x_0) - f(x_0). \quad \text{错! (不能用洛必达法则).}$$

$$\text{正确做法:原式} \xrightarrow[\text{定义}]{\text{用导数}} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0 [f(x) - f(x_0)] - f(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = x_0 f'(x_0) - f(x_0)$$

2. 考研数学复习方法

很多考生考前都感到“数学内容多,要求高,复习抓不住要领——集中表现为心中无数”.怎样复习才能做到“胸有成竹”呢?

1) 应该有一个计划

① 基础复习阶段. 这段时间里应将与数学有关课程的内容初步复习一遍, 并通过适当的习题加深对“概念、定理的条件、用法”的理解, 有意识地恢复、培养、提高基本的运算能力, 以达到对全部内容基本弄懂, 对有关定理的条件、用法比较熟悉, 对有关公式、符号搞清含义、用法, 并能对照考试大纲提出进一步复习的问题, 例如: 还有哪些不明白的内容、问题、习题? 做题过程中反映出什么问题? 是不知道如何下手还是知识点不熟练且不会串在一起? 或者是计算能力较差?

② 深入提高阶段. 按考研大纲要求, 对照考研试题, 强化自己的基本概念、基本理论、基本运算, 特别是在提高基本运算能力上狠下功夫. 这个阶段要做大量的题, 从中解决好“概念、计算、综合应用”方面的问题. 要对前一阶段中存在的不足之处有所突破, 例如概念方面、运算能力方面和综合应用方面.

③ 最后冲刺阶段. 这一阶段要求“填缺陷, 补漏洞, 模拟冲刺”.

2) 高度重视基本概念和计算方法的理解和应用, 加强综合运算的训练

【例 4】 设 $f(0)=0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}=2$, 试证 $x=0$ 是 $f(x)$ 的驻点且为极小值点.

这是一个概念题, 也含简单的计算. 正确解法是:

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-x^2} = 2 \Rightarrow f'(0)=0 \Rightarrow x=0$ 是驻点, 再由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2 \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in (-\delta, \delta)$ (据保号性定理) $\Rightarrow f(x)-f(0) > 0 \Rightarrow x=0$ 是极小值点 (极值定义).

不正确的解法是: 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \xrightarrow[\text{法则}]{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = 2 \Rightarrow f'(0)=0 \Rightarrow x=0$ 是驻点.

如果真正能从以上正误解法的比较中得出正确结论, 并再想想: ① 解题思路; ② 保号性定理的用法; ③ 极值定义; ④ 洛必达法则能否用; ⑤ 洛必达法则是充分条件到底是什么意思; ⑥ 出错原因在哪里, 那么肯定收获很大. 做会一道题, 收获一大片.

3) 高度重视运算能力的提高

要提高运算能力绝不仅仅要多做些题, 或者说主要不是多做些题, 关键是要加强“归纳总结”的自觉性. 归纳总结“做题的解题思路, 用到哪些知识点、方法、技巧, 易出错的地方、题型”. 这样做题就会有实质性的收获, 运算能力就会有明显提高.

【例 5】 设 $f(x)$ 连续, 试证

$$\iint_{|y| \leq |x| \leq 1} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy = \pi \int_0^1 x f(x) dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\pi - 4 \arccos \frac{1}{x} \right) x f(x) dx$$

初看此题很难下手, 没有思路, 但冷静分析后可得如下方案:

要证明左边的“二重积分”为右边的“一重积分” $\Rightarrow$

左边的“二重积分”一定可以积出一重 $\Rightarrow$

要将左边“二重积分”积出一重, 必须用极坐标 (如果用直角坐标, 无论先对 x 或先对 y 积分都是积不出的, 由于 $f(\sqrt{x^2+y^2})$ 无论关于 x 或 y 都是一般抽象函数) $\Rightarrow$

用极坐标后, 显然应该先对 θ 积分 (由于 $f(\rho)$ 是一般抽象函数, 先对 ρ 积分是积不出来的) $\Rightarrow$ 先对 θ 积分必须将区域 $D: |y| \leq |x| \leq 1$ 划分为 $D=2D_1+4D_2$ (如图 0-2) $\Rightarrow$

计算左边, 恰巧是右边, 证明完毕.

只有经过这样的分析→计算→计算出结果→再回味过程,才会有真正的本质上的收获,且越做越有信心,不知不觉中综合计算能力就提高了.

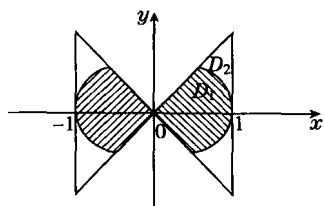


图 0-2

【例 6】 设 $f(x)$ 连续, 试证明: $\iint_D f(x-y) dx dy = \int_{-A}^A f(t) (A-|t|) dt$. 其中 $D: |x| \leq \frac{A}{2}, |y| \leq \frac{A}{2}$.

你觉得以下思路自然吗?

令 $x-y=t, dy=dt, y: -\frac{A}{2} \rightarrow \frac{A}{2}, t: x+\frac{A}{2} \rightarrow x-\frac{A}{2} \Rightarrow$ 左边 $= \iint_{D_1} f(t) dx dt \Rightarrow$ 先对 x 积分

(因为 $f(t)$ 是一般抽象函数) 积出一重恰巧是右边, 证明完毕.

4) 高度重视客观题(选择题、填空题)题型的训练

客观题的分值为 56 分, 占总分数的 40% 左右. 统计结果表明, 得分率很低, 其原因是:

① 对基本概念和基本理论的理解不深; ② 计算题的准确率不高; ③ 客观题(选择题、填空题)的独特解题方法和解题技巧掌握得不好.

因此, 考生绝对有必要有意识地通过一些典型例题, 自觉训练, 认真体会, 归纳总结客观题的解题方法和技巧, 这是提高综合计算能力的一个重要方面.

5) 建议考生整理一份“复习笔记”

以“极限”内容为例:

1. 概 念

1) 定义 例 1, 例 2…….

2) 性质——“保号性” 例 1, 例 2…….

2. 计 算(步骤: ① 判断类型; ② 选择方法.)

1) 方法: ① 洛必达法则 例……; ② 等价代换 例……; ……⑩ 利用“收敛级数的通项趋于零”的原理 例…….

2) 技巧 例…….

3) 容易出错的地方 例…….

4) 题型 例…….

以上笔记的核心是“归纳”. 如果数学内容均能有如上“笔记”, 肯定效果极佳. 可取经验是: 听完强化班后, 再用一个月的时间, 整理出一份“满意的笔记”.

6) 要有决心和信心, 敢于向自己提要求, 切忌“盲目做题, 浮躁心急”

以上为复习建议, 仅作参考. 复习方法要根据自己的实际情况, 以“我”为主.

第 1 章 函数、极限、连续

重点难点归纳

1. 函数概念、性质

- 1) 讨论分段函数在“接头点”处的极限、连续性、导数；积分是关键，也是考试的重点。
- 2) 会求分段函数的复合函数。
- 3) 熟悉函数“单调性、奇偶性、周期性、有界性”的判别。

2. 极限概念

- 1) 了解和应用“保号性定理”。
- 2) 求极限的方法(特别注意运用方法的条件、技巧、易出错的地方)。

3. 会讨论函数的连续性和间断性

- 1) 分段函数“接头点”的连续性的讨论。
- 2) 明确函数间断性的讨论是指：①求出全部间断点；②指出间断点的类型。

4. 熟悉连续函数在闭区间上的性质

- 1) 会运用“零点定理”。
- 2) 会讨论方程的根(存在性、唯一性、根的个数)。

要点内容精讲

一、函 数

1. 定 义

设变量 x 在某实数集 $\mathbf{R}$ 中任意取一个数时，另一变量 y 按一确定的法则总有确定的实数与它对应，则称 y 是 x 的函数， x 称为自变量， $\mathbf{R}$ 称为函数的定义域，记作 $y=f(x), x \in \mathbf{R}$ 。

注意：定义中有两个要点：

- 定义域 $\mathbf{R}$ ，它表示自变量 x 的取值范围。
- 对应法则 $f(\quad)$ ，它表示给定 x 值，求 y 值的方法。

由此有：

- 1) 两个给定函数是否相同的判别方法是：
当且仅当它们的定义域和对应法则完全相同时，两个函数相同；否则两个函数不相同。
- 2) 函数 y 的定义域的确定：就是使 y 的取值和运算有意义的范围。

2. 复合函数

设 $u=\varphi(x), x \in \mathbf{R}, u$ 的值域为 U ，又 $y=f(u), u \in U$ ，则称 y 为 x 的复合函数，记为 $f(\varphi(x)), x \in \mathbf{R}$ 。其中 x 称为自变量， y 称为因变量， $u=\varphi(x)$ 称为中间变量。

这里的要求是：

- 会将一个复杂的函数(例如初等函数)拆成一些简单的函数(例如基本初等函数)的复合。
- 会将一些简单的函数(例如分段函数)复合在一起。

3. 函数性态——单调性、奇偶性、周期性、有界性

(1) 单调性

定义：设 $f(x)$ 在区间 I 有定义， $x_1 < x_2 \in I$ 。

若 $f(x_1) < f(x_2)$, 称 $f(x)$ 在 I 上单调增;

$f(x_1) > f(x_2)$, 称 $f(x)$ 在 I 上单调减.

判别方法:

方法 1: 定义本身, 即设 $x_1 < x_2$, 考查 $f(x_2) - f(x_1)$ 是否为正(或为负), 从而推得 $f(x)$ 是单调增(单调减).

方法 2: 利用导数, 即对可导函数 y 而言, 若 $y' > 0$, 则 y 单调增; 若 $y' < 0$, 则 y 单调减.

(2) 奇偶性

定义: 设 $f(x)$ 的定义域对称于原点.

若 $f(-x) = f(x)$, 称 $f(x)$ 为偶函数; 若 $f(-x) = -f(x)$, 称 $f(x)$ 为奇函数.

判别方法:

方法 1: 定义本身就是判别 $f(x)$ 奇偶性的基本原理和方法, 即只需计算 $f(-x)$ 是否等于 $\pm f(x)$, 即可说明 $f(x)$ 是偶(奇)函数.

方法 2: 间接法.

① 奇函数的导数必是偶函数, 如 $(\sin x)' = \cos x$.

② 偶函数的导数必是奇函数, 如 $(x^2)' = 2x$. ③ 奇函数的一切原函数必是偶函数.

如 $f(x) = \sin x$ 为奇 $\Rightarrow F(x) = -\cos x + c$ 必为偶函数.

④ 偶函数仅有一个原函数为奇函数, 而任意一个原函数就不是奇函数.

如 $f(x) = \cos x$ 为偶函数 $\Rightarrow F_1(x) = \sin x$ 是奇函数, 但 $F_2(x) = \sin x + c$ 就不是奇函数.

⑤ $f(x) - f(-x)$ 为奇函数, $f(x) + f(-x)$ 为偶函数.

(3) 周期性

定义: 若 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

判别方法:

方法 1: 定义本身就是判别函数周期性的基本原理和方法, 即只需计算 $f(x+T)$ 是否等于 $f(x)$ 即可.

方法 2: 间接法.

① 由 $\sin x, \cos x$ 的周期为 $2\pi \Rightarrow \sin 2x, \cos 2x, |\sin x|, |\cos x|$ 的周期为 $\pi, |\sin 2x|, |\cos 2x|$ 的周期为 $\frac{\pi}{2}$. ② $f(x)$ 是可导的周期函数 $\Rightarrow f'(x)$ 仍为周期函数(且周期不变).

注意: $f(x)$ 的周期为 T , 那么

$$1) \int_a^{a+nT} f(x) dx = n \int_0^T f(x) dx = n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(u) du}{x} = \frac{\int_0^T f(u) du}{T};$$

$$3) \text{若 } F(x) = \int_0^x f(t) dt, \text{ 那么 } F(x+T) = F(x) \Leftrightarrow \int_0^T f(x) dx = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{【例 1】} \quad & \int_0^{n\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx = n \int_0^\pi \sqrt{1 - \sin 2x} dx \\ &= n \int_0^\pi \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} dx = n \int_0^\pi |\sin x - \cos x| dx \\ &= n \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^\pi (\sin x - \cos x) dx \right) = 2\sqrt{2}n \end{aligned}$$

$$\text{【例 2】} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x} = \frac{\int_0^\pi |\sin t| dt}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

学习笔记

【例 3】 若 $f(x)$ 为连续的周期为 T 的奇函数, 那么 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 的周期为 T (因为 $\int_0^T f(x) dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx = 0$).

(4) 有界性

定义: 若 $\exists M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M, \forall x \in I$, 则称 $f(x)$ 在 I 上有界; 若不存在 $M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M, \forall x \in I$, 则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

判别方法:

方法 1: 定义本身就是判别函数有界的基本原理和方法, 即对 $f(x)$ 去寻找 $|f(x)| \leq M$ 的一个 M , 找到则有界, 找不到则无界. 值得注意的是, 此方法的原理虽简单, 但要找到 M 却十分困难, 因为从 $|f(x)| \leq M$ 本身涉及不等式的放大或缩小, 技巧性极强. 一般情况下, 对此并不特别要求, 只需掌握基本的即可, 例如: 由 $\frac{1}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

方法 2: 间接法.

① 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

② 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

③ 若 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 存在, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在 $\Rightarrow f(x)$ 在开区间 (a, b) 上有界.

④ 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Rightarrow f(x)$ 在含 x_0 的区间上无界.

题型一: 必须注意的是, 考试是考“接头点”处的极限、连续、导数、积分.

【例 1】 设 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 那么 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是 C.

(A) 极限不存在;

(B) 极限存在, 但不连续;

(C) 连续, 但不可导;

(D) 可导.

分析: ① $x=0$ 是分段函数 $f(x)$ 的“接头点”; ② 题目就是考查 $x=0$ 处的极限、连续、导数; ③ 关键要明确 $f'(0)$ 的求法是必须用导数定义求, 且决不能用求导公式求.

解: 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0) \Rightarrow$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在 $\Rightarrow$
 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导, 故选 C.

【例 2】 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-1|}{x-1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ 那么 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是 A.

(A) 极限不存在;

(B) 极限存在, 不连续;

(C) 连续, 但不可导;

(D) 可导.

分析: ① $x=1$ 是分段函数 $f(x)$ 的“接头点”; ② 在求 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 时, 如果 $f(x)$ 当 $x \rightarrow 1^+$ 和 $x \rightarrow 1^-$ 时的表达式不相同, 那么就必须分别求出 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, 并考查两者是否相同, 从而确定 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 是否存在.

$$\begin{aligned}\text{解: 由于 } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x+1| \cdot |x-1|}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1) \cdot (x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x+1| \cdot |x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1) \cdot (1-x)}{x-1} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = -2\end{aligned}$$

故选 A.

【例 3】 如果 $f(x) = 3x^3 + x^2 \cdot |x|$, 那么 $f(x)$ 的最高阶导数的阶数是 2.

分析: ①要将 $f(x)$ 写成分段函数; ② $x=0$ 是 $f(x)$ 的接头点. 由于 $x>0$ 或 $x<0$, $f(x)$ 任意阶可导, 因而只需考查 $x=0$ 处 $f(x)$ 是几阶可导, 即可确定 $f(x)$ 几阶可导.

$$\begin{aligned}\text{解: } f(x) &= 3x^3 + x^2 \cdot |x| = \begin{cases} 4x^3 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ 2x^3 & x < 0 \end{cases} \\ \Rightarrow f'(x) &= \begin{cases} 12x^2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ 6x^2 & x < 0 \end{cases} \quad f''(x) = \begin{cases} 24x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ 12x & x < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\text{而 } f_+''(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{24x - 0}{x} = 24$$

$$f_-''(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{12x - 0}{x} = 12$$

$\Rightarrow f'''(0)$ 不存在 $\Rightarrow f(x)$ 的最高阶导数的阶数为 2.

$$\text{【例 4】 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x + 2e^{nx} \cdot \cos x}{x + e^{nx}} = \underline{2}.$$

分析: ①原式是二重极限, 首先求出内层极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x + 2e^{nx} \cdot \cos x}{x + e^{nx}}$;

②其结果必是 x 的分段函数(由于 x 是参数);

③ $x=0$ 是“接头点”, 又归结为“求分段函数‘接头点’处的极限”.

$$\text{解: 令 } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x + 2e^{nx} \cdot \cos x}{x + e^{nx}} = \begin{cases} 2 \cos x & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ \frac{\sin 2x}{x} & x < 0 \end{cases}$$

由于当 $x>0$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x + 2e^{nx} \cdot \cos x}{x + e^{nx}} \xrightarrow{\text{同除 } e^{nx}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sin 2x}{e^{nx}} + 2 \cos x}{\frac{x}{e^{nx}} + 1} = 2 \cos x$$

$$\text{因而 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \cos x = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{x} = 2$$

$$\text{故原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x + 2e^{nx} \cdot \cos x}{x + e^{nx}} = 2$$

注意: 例 3、例 4 中均考虑将 $f(x)$ 写成“分段函数”. 这就是由“考试均考分段函数在‘接头点’处的极限、连续、导数、积分”的启发而产生的自然思路和必然结果.

题型二: 求分段函数的复合函数.

$$\text{【例 1】 设 } f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| \leq 1 \\ x & |x| > 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 2-x^2 & |x| \leq 1 \\ 2 & |x| > 1 \end{cases}, \text{ 求 } f(g(x)).$$

学习笔记

分析:考查“分段函数的复合函数”.其思路方法是:由内→外的分层确定法.

$$\begin{aligned} \text{解: } f(g(x)) &= \begin{cases} (g(x))^2 & |g(x)| \leq 1 \\ g(x) & |g(x)| > 1 \end{cases} = \begin{cases} (2-x^2)^2 & |2-x^2| \leq 1 \text{ 且 } |x| \leq 1 \\ 2-x^2 & |2-x^2| > 1 \text{ 且 } |x| \leq 1 \\ 2 & |x| > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & |x| = 1 \\ 2-x^2 & |x| < 1 \\ 2 & |x| > 1 \end{cases} = \begin{cases} 2-x^2 & |x| \leq 1 \\ 2 & |x| > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

【例 2】 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2-x^2 & |x| \leq 2 \\ 2 & |x| > 2 \end{cases}$, 求 $f(g(x)), g(f(x))$.

分析:考查对“分段函数的复合”的熟练程度.

$$\begin{aligned} \text{解: } ① f(g(x)) &= \begin{cases} 1 & |g(x)| \leq 1 \\ 0 & |g(x)| > 1 \end{cases} \\ \text{而 } g(x) &= \begin{cases} 2-x^2 & |x| \leq 2 \\ 2 & |x| > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |g(x)| \leq 1 \Rightarrow |2-x^2| \leq 1, \text{ 即 } 1 \leq |x| \leq \sqrt{3} \\ |g(x)| > 1 \Rightarrow |x| < 1 \text{ 或 } \sqrt{3} < |x| \leq 2 \end{cases} \\ \text{故 } f(g(x)) &= \begin{cases} 1 & -1 \leq 2-x^2 \leq 1, \\ 0 & 2-x^2 > 1, 2-x^2 < -1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & 1 \leq |x| \leq \sqrt{3} \\ 0 & |x| < 1 \text{ 或 } \sqrt{3} < |x| \leq 2 \\ 0 & |x| > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ② g(f(x)) &= \begin{cases} 2-f^2(x) & |f(x)| \leq 2 \\ 2 & |f(x)| > 2 \end{cases} \\ \text{而 } f(x) &= \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & 1 < |x| \leq 2 \\ 0 & |x| > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{故 } g(f(x)) = \begin{cases} 2-1^2 & |x| \leq 1 \\ 2-0^2 & 1 < |x| \leq 2 \\ 2-0^2 & |x| > 2 \end{cases} = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 2 & |x| > 1 \end{cases}$$

【例 3】 $f(x) = |x|, g(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x-1 & x \geq 0 \end{cases}$ 求 $I = \int_{-1}^2 f(g(x))dx$.

分析:关键是求 $f(g(x))$.

$$\text{解: } f(g(x)) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ |x-1| & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{故 } I = \int_{-1}^2 f(g(x))dx = \int_{-1}^0 x^2 dx + \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx = \frac{4}{3}.$$

注意:分段复合函数 $f(g(x))$ 求解的思路是:由内→外的分层确定法,即先写出 $u=g(x)$ 在相应区间上的表达式,再确定 $f(u)$ 的表达式.

题型三:函数性态——单调性、奇偶性、周期性、有界性.

(1) 单调性

应熟悉 x^2, x^3 的单调增(减)区间,明确 $\sin x, \cos x$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上分别是单调增、单调减.

【例 1】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, $\forall x_1, x_2$ 均有 $(x_1 - x_2) \cdot (f(x_1) - f(x_2)) > 0$, 那么 D.

(A) $f'(x) > 0$; (B) $f'(x) < 0$; (C) $f(-x)$ 单调增; (D) $-f(-x)$ 单调增.

分析: 选择题的方法大致有两种: ①直接法; ②排除法.

解: 由直接法有, 当 $x_1 > x_2$ 时, $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow -x_1 < -x_2$, 且 $f(-x_1) < f(-x_2) \Rightarrow -f(-x_1) > -f(-x_2)$, 即 $x_1 > x_2$ 时, $-f(-x_1) > -f(-x_2)$, 故选 D.

【例 2】求 $I = \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx$.

分析: ①定积分中开方必须加绝对值 $\sqrt{(\sin x - \cos x)^2} = |\sin x - \cos x|$; ②将区间分小, 去绝对值符号.

$$\begin{aligned} \text{解: } I &= \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx = \int_0^{\pi} \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} dx = \int_0^{\pi} |\sin x - \cos x| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\sin x - \cos x| dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} |\sin x - \cos x| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

注意: ①计算 $\int_0^{\pi} |\sin x - \cos x| dx$ 时, 为去绝对值符号, 将 $\int_0^{\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$. 这里用到了 $\sin x, \cos x$ 的单调性.

②定积分计算中, 开方一定要加“绝对值”.

【例 3】 $f(x)$ 连续, 单调增, 求证: $\int_0^x f(t) dt - xf(x) \leq 0$.

分析: ①利用 $f(x)$ 的单调性证明其不等式; ②由于式中含积分 $\int_0^x f(t) dt$, 可用“积分中值定理”或 $xf(x)$ 改写为 $xf(x) = \int_0^x f(x) dt$.

$$\begin{aligned} \text{证明: ①原式左边} &= \int_0^x f(t) dt - xf(x) = f(c)x - xf(x) \\ &= x(f(c) - f(x)) \leq 0 \quad (\text{因为 } 0 < c < x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{②原式左边} &= \int_0^x f(t) dt - xf(x) = \int_0^x f(t) dt - \int_0^x f(x) dt \\ &= \int_0^x [f(t) - f(x)] dt \leq 0 \quad (\text{因为 } f(x) \text{ 单调增}) \end{aligned}$$

注意: 比较以上两种解法, 值得回味的是: 方法①的关键是用积分中值定理 $\int_0^x f(t) dt = xf(c)$. 方法②的关键是 $xf(x) = \int_0^x f(x) dt$, 这种变形是求解中的常用技巧.

【例 4】 $f(0) = 0, \forall x \in [0, +\infty)$ 有 $f'(x)$ 单调增, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. 证明: $g(x)$ 单调增, $\forall x \in (0, +\infty)$.

分析: 关键技巧是利用 $f(0) = 0$ 的条件, 对 $f(x)$ 用拉格朗日中值定理 $\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(c) \Rightarrow f(x) = xf'(c)$.

证明: 由 $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$, 为了考虑分子 $= xf'(x) - f(x)$ 的正负性, 对 $f(x)$ 在 $[0, x]$ 上用拉格朗日中值定理得:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(c) \quad (0 < c < x)$$

故 $f(x) = xf'(c) < xf'(x) \Rightarrow$ 分子 $= xf'(x) - f(x) > 0 \Rightarrow g(x)$ 单调增.