



全国高等职业教育“十二五”规划教材

Mathematics

# 【高等数学】

■ 吕桂先 郭胜红 主编



 中国农业出版社

全国高等职业教育“十二五”规划教材

# 高等数学

吕桂先 郭胜红 主编

中国农业出版社

## 图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学/吕桂先, 郭胜红主编. —北京: 中国农业出版社, 2010. 8

全国高等职业教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-109-13689-2

I. ①高… II. ①吕…②郭… III. ①高等数学—高等学校: 技术学校—教材 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 135244 号

中国农业出版社出版

(北京市朝阳区农展馆北路 2 号)

(邮政编码 100125)

策划编辑 李 燕

文字编辑 魏明龙

---

北京三木印刷有限公司印刷 新华书店北京发行所发行  
2010 年 8 月第 1 版 2010 年 8 月北京第 1 次印刷

---

开本: 787mm×1092mm 1/16 印张: 15

字数: 338 千字

定价: 28.00 元

(凡本版图书出现印刷、装订错误, 请向出版社发行部调换)



## 内容简介

---

本教材主要内容包括函数、极限与连续, 导数与微分, 导数的应用(含导数在经济管理中的应用), 不定积分、定积分及其应用, 线性代数初步, 概率论初步。其中函数、极限与连续, 导数与微分, 不定积分与定积分是高等数学的基本内容, 可作为必修部分。导数、微分和积分的应用, 导数在经济管理中的应用, 线性代数, 概率论初步等内容可根据不同专业作为选修部分。教学总时数为90~120学时。每节后有习题, 每章后有小结和复习题。小结内容包括知识结构与知识点、主要题型及解题方法与技巧。书后附有习题与复习题参考答案, 并附基本初等函数的图像与性质、常用数学公式和数表。

本教材在内容阐述上简明扼要, 通俗易懂, 数形结合, 图文并茂, 符合学生的认知规律, 易教易学, 实用性强。本教材可作为高职高专各专业高等数学课程规划教材, 亦可供自学者及相关人员参考。



## 编审人员名单

---

主 编 吕桂先 郭胜红

副主编 巩军胜

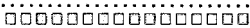
编 者 (以姓氏笔画为序)

巩军胜 吕桂先 郭胜红

审 稿 杨凤翔



# 前言



近年来,高等职业教育已从规模的迅速扩招转移到质量建设上来,为了顺应高等职业教育的发展态势,培养具有良好职业素养和可持续发展能力的高素质技能型人才,我们在深刻学习和认真领会教育部《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》、《高职高专教育基础课程教学基本要求》等文件精神 and 内涵的基础上,根据新形势下高职教育教学办学指导思想和人才培养目标定位,借鉴和吸收近年来高职数学教学改革成果,总结编者多年来的教学实践经验,充分考虑高职高专学生的数学基础和实际水平,组织教学第一线具有丰富数学教学经验的老师编写了本教材。

本教材从高职数学课程教学内容体系改革入手,以应用为目的,以必须、够用为度,对课程教学内容进行了优化整合,体现了中国特色高职教育“产业、行业、企业、职业和实践”五个要素所要求的必备基础知识和能力素质,在强调基础理论的选择与学习、为专业实践和实现专业培养目标提供更有效服务的基础上,兼顾高职人才培养后续课程教学对数学知识的要求,为学生终身学习能力和可持续发展能力的培养提供了一个基础支撑和空间平台。

本教材在内容的编写上,力求概念清晰,定理、公式与方法明了,淡化了不必要的逻辑推理和理论证明,避开了难题、偏题和怪题,所编例题、习题和复习题,既贴近知识点又贴近实际问题,尤其注重学生数学思想、数学方法、分析问题和解决问题能力的培养。每章后有小结,内容包括本章知识结构与知识点、主要题型及解题方法与技巧。书后附有习题与复习题参考答案、常用

公式和数表，便于教师讲授和学生学习。

本教材由吕桂先(甘肃农业职业技术学院)、郭胜红(甘肃建筑职业技术学院)任主编。具体编写人员和编写分工为：第一、四章由郭胜红编写；第二、三、五章由吕桂先编写；第六章由巩军胜(甘肃建筑职业技术学院)编写。

本教材由吕桂先提出编写思路。全书由黑龙江农业工程职业学院杨凤翔审稿，并提出了宝贵意见，在此表示诚挚的感谢！同时对给予本教材大力支持的各编审人员所在院校的领导和同事，一并表示诚挚的谢意！

尽管我们付出了很多努力，但还会存在很多不足，敬请各位同行和广大读者批评指正，我们将不胜感激。

编者

2010年5月





二、导数的几何意义 .....	30
三、可导的充要条件 .....	31
四、可导与连续的关系 .....	31
习题 2-1 .....	32
第二节 导数的运算 .....	33
一、函数的和、差、积、商的导数 .....	33
二、反函数的导数 .....	34
三、复合函数的导数 .....	35
四、初等函数的导数 .....	35
习题 2-2 .....	36
第三节 隐函数、幂指函数以及参数式函数的导数 .....	37
一、隐函数的导数 .....	37
二、幂指函数的导数 .....	38
三、参数式函数的导数 .....	39
习题 2-3 .....	40
第四节 高阶导数 .....	40
习题 2-4 .....	41
第五节 微分的概念、基本公式及运算法则 .....	42
一、微分的概念 .....	42
二、微分的几何意义 .....	43
三、微分基本公式与四则运算法则 .....	44
四、复合函数的微分 .....	45
习题 2-5 .....	45
第六节 初等函数的微分与微分的应用 .....	46
一、初等函数的微分 .....	46
二、微分的应用 .....	47
习题 2-6 .....	48
本章小结 .....	48
一、知识结构与知识点 .....	48
二、主要题型及解题方法与技巧 .....	49
复习题二 .....	50
<b>第三章 导数的应用</b> .....	<b>53</b>
第一节 微分中值定理与洛必达法则 .....	53
一、微分中值定理 .....	53
二、洛必达法则 .....	55
习题 3-1 .....	58
第二节 函数的单调性与曲线的凹凸性 .....	59

一、函数单调性的判别法 .....	59
二、曲线的凹凸与拐点 .....	60
习题 3-2 .....	62
第三节 函数的极值与最值 .....	62
一、函数的极值 .....	62
二、函数的最大值与最小值 .....	64
习题 3-3 .....	66
第四节 函数图像的描绘 .....	66
一、曲线的渐近线 .....	66
二、函数图形的作法 .....	68
习题 3-4 .....	70
第五节 导数在经济管理中的应用 .....	70
一、边际函数与边际分析 .....	70
二、函数的弹性与弹性分析 .....	72
习题 3-5 .....	73
本章小结 .....	75
一、知识结构与知识点 .....	75
二、主要题型及解题方法与技巧 .....	75
复习题三 .....	76
<b>第四章 不定积分与定积分 .....</b>	<b>78</b>
第一节 不定积分的概念与性质 .....	78
一、原函数与不定积分的概念 .....	78
二、不定积分的性质 .....	79
三、不定积分的几何意义 .....	80
习题 4-1 .....	80
第二节 不定积分的基本积分法 .....	81
一、基本积分表 .....	81
二、换元积分法 .....	83
三、第二类换元积分法 .....	86
四、分部积分法 .....	88
习题 4-2 .....	90
第三节 定积分的概念与性质 .....	92
一、定积分的概念 .....	92
二、定积分的性质 .....	96
习题 4-3 .....	97
第四节 微积分基本定理 .....	97
一、变上限的定积分 .....	98

二、牛顿—莱布尼茨公式·····	100
习题 4-4·····	101
第五节 定积分的换元积分法与分部积分法·····	102
一、换元积分法·····	102
二、分部积分法·····	103
习题 4-5·····	104
第六节 广义积分·····	105
一、无限区间上的广义积分·····	106
二、无界函数的广义积分·····	107
习题 4-6·····	108
第七节 定积分的应用·····	108
一、定积分的微元法·····	108
二、平面图形的面积·····	109
三、旋转体的体积·····	111
习题 4-7·····	113
本章小结·····	114
一、知识结构与知识点·····	114
二、主要题型及解题方法与技巧·····	114
复习题四·····	115
<b>第五章 线性代数初步</b> ·····	<b>118</b>
第一节 行列式的概念·····	118
一、二阶行列式·····	118
二、三阶行列式·····	119
三、 $n$ 阶行列式·····	120
习题 5-1·····	122
第二节 行列式的性质·····	123
习题 5-2·····	125
第三节 克莱姆法则·····	126
习题 5-3·····	128
第四节 矩阵及其运算·····	128
一、矩阵的概念·····	128
二、矩阵的运算·····	130
习题 5-4·····	133
第五节 矩阵的初等变换与逆矩阵、矩阵的秩·····	133
一、矩阵的初等变换·····	133
二、逆矩阵·····	134
三、逆矩阵的求法·····	134

四、用逆矩阵解线性方程组·····	136
五、矩阵的秩·····	137
习题 5-5·····	139
第六节 一般线性方程组及其解法·····	140
一、解的判别条件·····	140
二、非齐次线性方程组的解法·····	142
三、齐次线性方程组的解法·····	144
习题 5-6·····	144
本章小结·····	145
一、知识结构与知识点·····	145
二、主要题型及解题方法与技巧·····	146
复习题五·····	147
<b>第六章 概率论初步</b> ·····	<b>150</b>
<b>第一节 随机事件及其概率</b> ·····	<b>150</b>
一、随机试验与随机事件·····	150
二、随机事件的概率·····	152
习题 6-1·····	154
<b>第二节 概率的运算法则</b> ·····	<b>155</b>
一、概率的加法法则·····	155
二、概率的乘法法则·····	156
三、全概率公式·····	158
习题 6-2·····	161
<b>第三节 随机变量及其分布</b> ·····	<b>162</b>
一、随机变量·····	162
二、随机变量的分布·····	163
习题 6-3·····	165
<b>第四节 离散型随机变量的概率分布</b> ·····	<b>165</b>
一、离散型随机变量的概率分布·····	165
二、常见离散型随机变量的概率分布·····	167
习题 6-4·····	169
<b>第五节 连续型随机变量的概率分布</b> ·····	<b>170</b>
一、连续型随机变量的概率密度·····	170
二、常见连续型随机变量的密度函数·····	172
习题 6-5·····	173
<b>第六节 正态分布</b> ·····	<b>174</b>
一、正态分布的密度函数·····	175
二、正态分布概率的计算·····	176

习题 6-6 .....	178
第七节 随机变量的数字特征 .....	179
一、数学期望 .....	179
二、方差 .....	183
习题 6-7 .....	186
本章小结 .....	188
一、知识结构与知识点 .....	188
二、常见随机变量的概率分布和数字特征 .....	189
三、主要题型及解题方法与技巧 .....	189
复习题六 .....	191
习题与复习题参考答案 .....	194
<b>附录</b> .....	208
附录 I 五种基本初等函数的图像与性质 .....	208
附录 II 初等数学常用公式 .....	210
附录 III 常用积分公式 .....	213
<b>附表</b> .....	222
附表 I 泊松分布数值表 .....	222
附表 II 标准正态分布数值表 .....	224
主要参考文献 .....	225

# 第一章

## 函数、极限与连续

### 本章学习目标

- 理解并掌握函数、复合函数及初等函数的概念
- 理解并掌握极限的概念、运算法则，熟练掌握求极限的方法
- 理解无穷小与无穷大的概念、性质，知道无穷小的比较，会利用等价无穷小求极限
- 理解函数的连续性概念，会求间断点并判断其类型，了解闭区间上连续函数的性质

函数是高等数学中最基本的概念之一，是微积分学研究的主要对象，是客观世界中变量之间对应关系的反映，是科学技术领域中表达自然规律的基本变量之间的对应法则。而极限方法是研究变量的一种基本方法，是微积分的理论基础。

### 第一节 函 数

#### 一、基本初等函数

##### 1. 函数的概念

函数的概念，在中学数学中我们已有初步的了解，本节将对此做进一步的介绍。

**定义 1** 给定两个实数集  $D$  和  $E$ ，若存在某个对应关系  $f$ ，使得对每个  $x \in D$ ，都有唯一确定的值  $y \in E$  与之对应，则称  $f$  是定义在  $D$  上的函数，记作  $f(x)$ ， $x \in D$ 。其中  $x$  称为自变量， $y$  称为因变量， $D$  称为函数  $f(x)$  的定义域，记作  $D_f$ ，即  $D_f = D$ 。对于  $D$  中每一个  $x$  所对应的  $E$  中的实数  $y$ ，称为函数  $f(x)$  在点  $x$  的函数值，记作  $f(x)$ ，即  $y = f(x)$ 。全体函数值的集合  $E$  称为函数的值域，记作  $R_f$  或  $f(D)$ ，即  $R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 。

关于函数的定义，我们做如下说明：

定义 1 中函数  $f(x)$  的值域可以由定义域  $D$  和对应关系  $f$  所确定，因此，定义域  $D$  和对应关系  $f$  是确定函数的两个主要因素。由此，我们说某两个函数相同，是指它们有相同的定义域和相同的对应关系。

例如，函数  $f(x) = 1, x \in (-\infty, +\infty)$  和  $f(x) = \frac{x}{x}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  是不相同的函数。又如，函数  $f(x) = |x|, x \in \mathbf{R}$  与函数  $f(x) = \sqrt{x^2}, x \in \mathbf{R}$  是相同的函数。

##### 2. 函数的表示法

函数的表示方法主要有三种,即解析法(公式法)、图像法和列表法.

函数在其定义域不同部分用不同的解析式表达,这类函数通常称为分段函数.例如,函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

该函数又称为符号函数,记作  $\operatorname{sgn} x$ ,其图像如图 1-1 所示,它的定义域  $D = (-\infty, +\infty)$ ,值域  $R_f = \{-1, 0, 1\}$ .

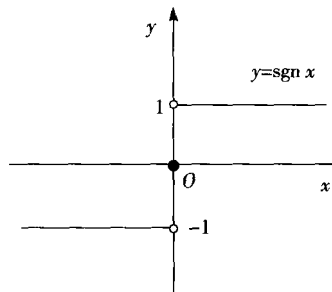


图 1-1

### 3. 函数的几种特性

(1) 单调性:

**定义 2** 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 区间  $I \subset D$ , 若对于任意的两个自变量  $x_1, x_2 \in I$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 总有

①  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , 则称  $f(x)$  在  $I$  内单调递增或单调增加;

②  $f(x_1) \geq f(x_2)$ , 则称  $f(x)$  在  $I$  内单调递减或单调减少.

反映在函数的图像上, 单调增加函数的图像是随  $x$  的增大而上升的曲线; 单调减少函数的图像是随  $x$  的增大而下降的曲线. 如图 1-2 和图 1-3 所示.

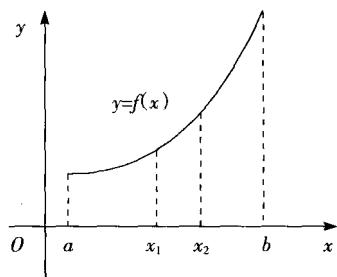


图 1-2

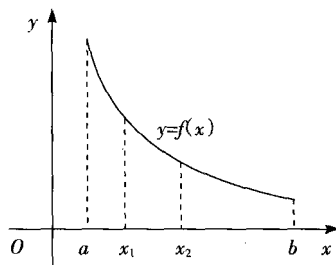


图 1-3

(2) 有界性:

**定义 3** 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 若存在正数  $M$ , 使得对每一个  $x \in D$ , 都有

$$|f(x)| \leq M$$

成立, 则称  $f(x)$  为  $D$  上的有界函数, 否则, 称  $f(x)$  为  $D$  上的无界函数.

有界函数的几何意义: 若函数  $f(x)$  为  $D$  上的有界函数, 则函数  $f(x)$  的图像完全落在直线  $y = M$  与  $y = -M$  之间.

例如: 函数  $f(x) = \sin x$  和  $f(x) = \cos x$  为  $(-\infty, +\infty)$  上的有界函数. 因为对每一个  $x \in \mathbf{R}$ , 都有  $|\sin x| \leq 1$  和  $|\cos x| \leq 1$  成立.

(3) 奇偶性:

**定义 4** 设函数  $f(x)$  的定义域  $D$  关于原点对称, 若对于任意  $x \in D$ , 都有

①  $f(-x) = f(x)$  成立, 则称函数  $f(x)$  为偶函数;

②  $f(-x) = -f(x)$  成立, 则称函数  $f(x)$  为奇函数.

例如,  $y = x^3, y = \sin x$  为奇函数,  $y = x^2, y = \cos x$  为偶函数.

注:偶函数的图像关于  $y$  轴对称,奇函数的图像关于原点对称.

(4)周期性:

**定义 5** 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ ,若存在一个正数  $T$ ,使得对于任意  $x \in D$  有  $(x \pm T) \in D$ ,且

$$f(x \pm T) = f(x)$$

恒成立,则称  $f(x)$  为**周期函数**, $T$  称为  $f(x)$  的**周期**.

显然,若  $T$  为函数  $f(x)$  的周期,则  $2T, 3T, 4T, \dots$  都为  $f(x)$  的周期. 我们通常说周期函数的周期是指  $f(x)$  的最小正周期. 如函数  $\sin x$  是以  $2\pi$  为周期的周期函数;函数  $f(x) = C$  ( $C$  为常数)是以任何正数为周期的周期函数,但不存在最小正周期.

#### 4. 基本初等函数

在中学数学中,我们已经熟悉以下几类函数:

常量函数:  $y = C$  ( $C$  是常数);

幂函数:  $y = x^\mu$  ( $\mu \neq 0$ );

指数函数:  $y = a^x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ );

对数函数:  $y = \log_a x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ). 特别当  $a = 10$  时,记为  $y = \lg x$ ;当  $a = e$  时,记为  $y = \ln x$ ;

三角函数:  $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$ ;

反三角函数:  $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \text{arccot} x$ .

将以上这六类函数统称为基本初等函数,其图像及性质见附录 I.

## 二、复合函数

在有些实际问题中,函数自变量和因变量的关系是通过其他一些变量才建立起来的.

例如:质量为  $m$  的物体做自由落体运动时,动能  $E$  是时间  $t$  的函数(不考虑空气阻力).

由物理学可知,动能  $E$  是物体运动速度  $v$  的函数,即

$$E = \frac{1}{2}mv^2, \quad (1-1)$$

而速度  $v$  又是时间  $t$  的函数,它们之间的关系是

$$v = gt, \quad (1-2)$$

其中  $g$  为重力加速度.

将(1-2)式代入(1-1)式,得

$$E = \frac{1}{2}m(gt)^2 = \frac{1}{2}mg^2t^2.$$

可见,时间  $t$  通过速度  $v$  间接影响动能  $E$ ,那么动能  $E$  当然可以看成时间  $t$  的函数, $E$  与  $t$  的关系称为一种复合的函数关系.

**定义 6** 设函数  $y = f(u)$  的定义域为  $D_1$ ,函数  $g(x)$  在  $D$  上有定义,且  $g(D) \subset D_1$ ,则由下式确定的函数

$$y = f[g(x)], x \in D$$

称为由函数  $y = f(u)$  和函数  $u = g(x)$  构成的**复合函数**,它的定义域为  $D$ ,变量  $u$  称为



## 中间变量.

例1 试求函数  $y=u^2$  与  $u=\cos x$  构成的复合函数.

解 将  $u=\cos x$  代入  $y=u^2$  中,即为所求的复合函数

$$y = \cos^2 x, x \in (-\infty, +\infty).$$

例2 指出下列复合函数的结构.

$$(1) y = (3x+1)^5; \quad (2) y = 5^{\sin(3x+1)};$$

$$(3) y = \sqrt{\lg(x^2-3x+2)}; \quad (4) y = \arcsin \sqrt{\frac{e^x+1}{x}}.$$

解 (1)  $y=(3x+1)^5$  是由  $y=u^5, u=3x+1$  这两个函数复合而成的.

(2)  $y=5^{\sin(3x+1)}$  是由  $y=5^u, u=\sin v, v=3x+1$  这三个函数复合而成的.

(3)  $y=\sqrt{\lg(x^2-3x+2)}$  是由  $y=\sqrt{u}, u=\lg v, v=x^2-3x+2$  这三个函数复合而成的.

(4)  $y=\arcsin \sqrt{\frac{e^x+1}{x}}$  是由  $y=\arcsin u, u=\sqrt{v}, v=\frac{e^x+1}{x}$  这三个函数复合而成的.

注:(1)并不是任何两个函数都可以构成一个复合函数.例如,  $y=\lg u$  和  $u=-x^2$  就不能构成复合函数(为什么?).

(2)由例2知,分析复合函数的结构时,每一层函数都应该是基本初等函数或简单函数(常数与基本初等函数的有限次四则运算式).

## 三、初等函数

基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所得到的函数称为初等函数.

显然,初等函数只能用一个解析式来表示.例如,  $\arctan \sqrt{1-e^x}, \sin 2x, e^{\cos x}$  等都是初等函数.

凡不是初等函数的函数皆称为非初等函数.例如,符号函数  $y=\operatorname{sgn} x, f(x)=1+x+x^2+x^3+\dots$  等都是非初等函数.

## 习 题 1-1

1. 判断题.

(1) 函数  $y=2\sin x$  是基本初等函数; ( )

(2) 函数  $y=\ln x$  不是初等函数; ( )

(3) 分段函数一定不是初等函数; ( )

(4) 任意两个初等函数都可以复合成一个复合函数; ( )

(5) 在  $x \in (0, +\infty)$  内, 函数  $y=x^{-2}$  是减函数. ( )

2. 下列函数是否为同一函数? 为什么?

(1)  $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-1}$  与  $g(x) = x+3$ ;

(2)  $f(x) = \lg x^3$  与  $g(x) = 3\lg x$ ;

(3)  $f(x) = \ln x^2$  与  $g(x) = 2\ln x$ ;