世界数学难题解析

SHIJIE SHUXUE NANTI JIEXI

吴广坡 ◎编著

郑州大学出版社

世界数学难题解析

SHIJIE SHUXUE NANTI JIEXI

吴广坡 ◎编著

郑州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

世界数学难题解析/吴广坡编著. —郑州:郑州大学出版社,
2009.11
ISBN 978-7-5645-0148-8

Ⅰ.世… Ⅱ.吴… Ⅲ.数学问题-普及读物 Ⅳ.01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 176017 号

郑州大学出版社出版发行
郑州市大学路 40 号　　邮政编码:450052
出版人:王　锋　　发行电话:0371-66966070
全国新华书店经销
黄委会设计院印刷厂印制
开本:710 mm×1 010 mm　　1/16
印张:8.5
字数:124 千字
版次:2009 年 11 月第 1 版　　印次:2009 年 11 月第 1 次印刷

书号:ISBN 978-7-5645-0148-8　　定价:20.00 元

内容提要

本书主要内容是研究数的性质。重点解决:1. 已知质数(互质数)求和其互质数的方法;2. 找到了求二元一次不定方程整数解的新方法;3. 证明了质数的无限性;同一方块中连续合数的有限性;连续合数在自然数列(奇数列)中的无限性等一些重要结论;4. 研究了同组成方块质数互质的数的分布情况;5. 证明了"孪素数"无限存在的必要条件;6. 证明了哥德巴赫猜想(偶数猜想)成立存在的必要条件。

研究方法上,通过创立的方块理论,把研究质数性质转化为研究与已知质数互质的数的性质,实现了数形结合;又引入数的带余数数式运算,从而使复杂的问题简单化。开辟了用初等数学知识研究世界数学难题的有效途径,使具有高中毕业水平的人都能领略到世界数学难题的奥妙。

本书适合高等院校在校本、专科数学系(专业)学生、大中专毕业生、数学教研机构人员、中小学教师、数学爱好者阅读。

前　言

20 世纪 80 年代，在初级中学任数学教师的我，偶尔从一本数学杂志上看到了"孪素数是否有无限对"这个命题，当时就对其产生了浓厚的兴趣，试图分析、思考，仅有高中毕业数学水平的我，在思考、分析这一命题时，显得身单力薄。但本人有一个长处就是敢想、敢走前人没有走过的路。总认为，上千年沉淀积累的数学文明，在长时间内不能破解这些世界数学难题，足以说明，数学理论需要创新。于是就树立了创新理论，创新思维的想法，试着去探讨该命题，在此间也写下了片言支语，没有讨教于大家，仅从一学生手中借阅了闵嗣鹤、严士健编著的《初等数论》。有过想，也有过梦，但总是梦多于想。几经挫折，败下阵来，从此偃旗息鼓。后步入了为人夫、为人父的时代，柴米油盐酱醋茶成为了生活的主旋律，代替了个人的兴趣和爱好。

调入行政机关工作后，办公室有规律的工作，给自己留下了许多宝贵的自由支配的时间。从此又翻出了多年尘封的研究片段记录和记忆，对这道世界数学难题开始进行重新认识，在研究过程中通过创立的方块理论很快就证明了孪素数存在的必要条件，这点收获让我振奋、激动。

这给我创新思考增添了力量，一鼓作气，得到了计算方块中不能被组成方块的质数整除的数多种计算方法；得到了相隔为 $2K$ 间质数对存在的必要条件；得到了每一个大偶数都能写成两个不能被组成方块质数整除的两数的和；得到了二元一次不定方程整数解的简便快捷解法。

作为这本学术专著，它有以下几个特点：一是对立志在破解世界数学难题上想有所建树的同仁们作了很好的铺垫，已证明的一些重要结论和思维方式，给你的破解开辟了道路。二是除自己创立的方块理论和一些研究方法之外，涉及的其它数学知识都是初等数学知识，也就是说，凡是具有高中毕业水平以上的人都能读懂此书。研究内容虽涉及到了世界数学难题的分析、论证，但读者群体较大。换句话说，能使众多没有学过高等数学，没有学过专门数论的人，也能领略到世界数学难题的奥妙、神奇，可增强你的求知欲。三是为研究世界数学难题，本人创立的方块理论的严谨、对称，自然数方块和奇数方块数的互换，方块中原是不能被组成方块质数整除的数加上整数后能得到一定量的不能被组成方块质数整除的数。这些能使你充分享受到数学的美感。四是有些知识，如运用数的

带余数数式的加法，在已知除数和余数的条件下，可计算出该数；根据已知质数，能求出未知质数或是含新质数因子的方法等有关知识，具有较强的实用价值，对中学教材有关内容是一个很好的补充。五是有些理论、结论和其它书籍如有雷同，这应是十万分之一的巧合，但探索的渠道是绝不相同的。六是为众多像我一样执迷这些世界数学难题的同仁们亮出了底牌，能使你重新审视自己，避免陷入盲目性。

在成书过程中，如上所述，没有借鉴有关知识，没有经过名师的指点，全凭自己的探索，书中有些知识体系还很不完善，有些概念还很不准确，甚至会出现知识性的错误，所有这些敬请读者、方家多给予批评指正。

吴广坡

2009 年 5 月于南阳方城

目　　录

第一章　方块

概念引入　为研究与质数有关的数的性质,因质数在自然数(奇数)列中具有不容易确定性。现转换方式,去研究与已知质数相联系的互质数的性质,因与已知质数互质的数的出现具有一定规律性,能给研究带来方便,这就是方块(奇数方块)体现出来的,所以方块概念是本书的基础概念。确立方块(奇数方块)概念后,在研究上实现了数形结合,研究方块的结构特点,反映出与组成方块质数互质数的性质,是本章的主要内容。

第一节　方块的概念

一、质数与世界数学难题

1. 质数的概念

除 1 和自身以外,没有别的约数的自然数叫质数,也叫素数,最小的素数是 2,除 2 外其他的素数都是奇数,如 3、5、7、11 、13……都是素数。除 1 和自身以外,还有别的约数的自然数叫合数,如 8、9 、15……。

2. 质数的判断

止目前,对于素数的确定还没有很好的方法,用的还是"筛法",即把某一个奇数用比它小的奇数像过筛子一样一个一个地去除,这些除数中若除 1 之外的奇数,没有一个数能整除这个奇数,则该数是质数;反之是合数。用"筛法"确定一个奇数是否是质数,没必要拿所有的小于该数的数作除数都去除,选取哪些奇数作除数,有一个明确的界定,这就是后面将要提出的一个判断方法。

3. 质数与世界数学难题

研究素数,找出素数在自然数(奇数)列中的分布规律或通式,成

为世界数学家多少年来苦苦追求的目标，因为一旦在这方面有所突破，则与之有关的一些世界数学难题就迎刃而解了。这些难题中最著名的有两个，一个是“孪素数”在奇数列中是否有无限对命题；另一个是哥德巴赫猜想命题。

二、连续奇数除以一个（一些）质数的余、除规律

既然除“筛法”之外，没有别的方法可确定质数，无法把握质数分布，研究与质数有关的问题就显得异常艰难。那么我们就需转换一下思维方式去研究和已知质数互质的数的规律，通过这些数的规律去反映自然数（奇数）的有关性质。

1. 连续奇数除以一个质数反映出的余、除规律

本书是在采用“筛法”基础上进行适当综合去研究该问题的。所谓综合，就是把某几个（一些）连续质数作除数，除奇数（自然数）列中的数，把除后的余、整除情况都用规定的符号记下来，然后找出其规律、特征进行研究的。研究和已知素数互质的数的分布规律先以奇数列为研究对象。奇数列中的数从5开始每3个连续奇数，就有一个奇数能被3整除，如5、7、9、11、13、15、17、19、21、……中的9、15、21……。在强调顺序的情况下，从5开始的奇数列中的数除以3后，显示出的余、整除规律是余、余、整除（余数为2、1、0、）。不管余几，凡是余的规定用符号“1”表示，能整除的规定用符号“0”表示。

则从5开始的连续奇数列中的数被3除的余、整除情况是：

5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	……
1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	……

从7开始的连续奇数列中的数被5除的余、整除情况是：

7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	……
1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	……

从9开始的连续奇数列中的数被7除的余、整除情况是：

9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	……
1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	……

即连续奇数列中，每7个奇数总有一个是7的倍数。

从11开始，连续奇数列中的数被9除的余、整除情况是：

11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	……
1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	……
1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	……

可以看出,9 作除数时,每个 111111110 中的“0”都和上面 3 作除数时“110”行中的“0”重合。因 9 是 3 的倍数。所以,凡是质数倍数的数,且该质数在研究中已经作了除数,则是质数倍数的数,在研究奇数列被该数整除、余关系时不再考虑。

2. 连续奇数除以质数显示出余、除规律的原因

不难看出,用这种方式研究奇数列中的数被非 2 质数除时的余、整除关系时,一个质数进入奇数列的位置对应的数是比其自身大 2 的数。如 3 进入时对应的第 1 个数是 5,7 进入时对应的第 1 个数是 9……。为什么某质数 n 进入奇数列作除数反映出的余、除关系是每 n 个连续奇数仅有一个能被该数整除呢? 道理是:因进入奇数列时对应的奇数比 n 大 2,连续奇数依次相差 2,所以会出现每 n 个连续奇数中有一个数是 n 的倍数。

3. 连续奇数除以一些质数的余、除规律

3、5 作除数,去除连续奇数列中的数的余、整除关系放在一起研究就是:

5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	……
1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	……
	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	……

通过观察 3、5 作除数去除奇数列中的数的余、整除规律,可以发现从 15 后,每 15 个连续奇数除以 3、5 后,表现出的余、整除情况相同。即从 17 开始的连续奇数,除以 3、5 的余、整除情况可以通过 15 个连续奇数反映出来。其中纵行是“1”对应的数是不能够被 3、5 整除

1

的数;含有一个“0”的纵行对应的数是能够被 3 整除或能够被 5 整除

0

的数;纵行为“0” 对应的数是既能够被 3 整除,又能被 5 整除的数。从 5 开始的奇数列,可分成 5 ~ 15、17 ~ 45、47 ~ 75、77 ~ 105……这些段,像 17 ~ 45、或 47 ~ 75、或 77 ~ 105……中含的连续奇数作被除数,

3、5 作除数，除后是余、是整除，分别用符号“1”、“0”对应表示出来，形成的由这样的符号记录出来的连续纵列组成的形状和结构，如110110110110110一样的，我们就称为“方块”。由质数 3、5 组成的方
111101111011110
块，记为 3 ×5 = 15 方块、或方块 3 ×5 = 15。由质数 3、5、7 组成的方块，记为 3 ×5 ×7 = 105 方块、或方块 3 ×5 ×7 = 105。其中 3、5、7……称为组成方块的质数，这些质数的积表示方块中含的连续奇数(自然数)的个数。同时规定，方块是连续质数组成的，本书中无特别说明，讨论方块时，所说连续质数不包括质数 2。

三、连续奇数被 n 个质数(互质数)除后反映出的余、除关系表示法

1. 不足半方块加方块表示法

从 5 开始的奇数列被从 3 开始的连续质数 a、b、c……m 去除，奇数列中除 5 ~ abc……m 这部分数对应的纵列外，后面的纵列全是以 abc……$m = p$ 组成的方块为单位向后无限延伸的。因此，方块是构成奇数列的单位。所以，以后在研究奇数列中的数对某些连续质数作除数的余、整除关系时，可只研究它的“方块”。

若把 3 ×5 = 15 方块中的 0110 中间部分去掉，剩下的是 011011，
011110 01111
110110两部分，每一部分连同其后的连续方块，都可表示出奇数列被
11110
3、5 作除数除时的余、整除关系(从 5 开始)。一个是从左到右，表示从 5 开始的奇数列对组成方块的质数作除数的余、整除关系；另一个是从右向左，表示从 5 开始的奇数列对组成方块的质数作除数的余、整除关系。这种方法称为“半方块加方块表示法”，用“T”表示。例如用 3、5 作除数，去除从 5 开始的奇数列的数显示出的余、整除规律时，5 ~ 15 这部分数除以 3、5 记录下的纵列为不足半方块。缺少质数 3 进入方块前的数。后面的每连续 15 个奇数除以 3、5 的余、除关系用规定符号记录下的纵列为方块。

2. 奇数方块表示法

再提出一个"奇数方块"概念,所谓"奇数方块",就是指两个连续方块,如两个 $3\times5=15$ 方块

1101101 ¦ 101101101101101 ¦ 10110110
1111011 ¦ 110111101111011 ¦ 11011110

中所划的两条竖线之间的部分(实际上这两条竖线叫方块的对称轴,所以奇数方块的概念又可叙述为:两个连续方块对称轴之间的部分就是奇数方块)。为什么是这样的结构,它的连续纵列为什么能反映出从 1 开始的奇数列中的数对组成奇数方块质数作除数时的余、整除关系呢? 不难看出,奇数方块之所以能表示出自 1 开始的连续奇数被组成奇数方块的质数整除、余关系,是因为除去

10
110
1110
……

结构外,其他的和前面讨论的连续质数作除数去除连续奇数被整除、余的结构是一样的,只不过是比讨论时多出两个数,即 1、3。这个结构中的每个"0"对应的数是组成奇数方块的质数。

这样,表示由连续质数 a、b、c……m 作除数去除连续奇数列时,"T"能反映出自 $a+2$ 开始的连续奇数被质数 a、b、c……m 除时的余、除关系;奇数方块能反映出自 1 开始的连续奇数被 a、b、c……m 作除数除时的余、除关系。这两种方法各有特点,可根据实际运用需要作出选择。

四、自然数列被 n 个质数(互质数)除后的余、除关系表示法

由 3、5 组成的无数个方块连结起来看,

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10……………………………………^
1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 10……
1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0……

表示出的数的性质是:从方块的左端的第 1 个纵列作为自然数列

的第 1 个数 1，向右数，每个数对应的纵行是 3、5 作除数，自然数列的各数作被除数除后对应各数的余、除关系。还是“1”纵列代表的数是
1
不能被 3、5 整除的自然数，“1”或“0”代表的数是能被 3 或 5 整除的
0 1
数，“0”列代表的是既能被 3 整除，又能被 5 整除的数。同样，由 3、5、
0
7 组成的无数个方块连结起来看，反映出自 1 开始的自然数列中的各个数对 3、5、7 作除数的余、除关系。

110110110110110110110110110110………0

111101111011110111101111011110……0

111111011111101111110111111011110……0

不同性质纵列代表意义是：纵行是“1”的，反映的是不能被 3、5、7
1
1
“0”
0
整除的数；纵行是 0 的反映的是能同时被 3、5、7 整除的数；纵行是“0”的，代表的是仅能被 3 整除的数；纵行是“1”代表的是仅能被 5 整
1 0
1 1
除的数；纵行是“1”“0”“1”分别代表的数的意义就很明白了。连续方
1 0 0
0 1 0
块为什么能反映出这个性质呢？原因是：作为组成方块的每个质数对应横行的余、整除符号排列，和它们除自 1 开始的连续自然数反映出的余、除关系是一致的（这个结论可视为一个公理）。所以，方块能反映出自然数列的各数除以组成方块质数的非整除和整除情况。

五、相同质数组成的自然数方块与奇数方块的相互替代

相同质数（互质数）组成的自然数方块和奇数方块能转化，关于这

一点，在后面的连续奇数对组成方块质数的整除、余情况，可用自某个数开始的连续自然数对组成方块质数的整除、余情况来代替一节中给予证明。所以，后面的研究中，多以自然数方块为对象。

通过建立方块和奇数方块，使和组成方块质数互质的数都以纵列为“1”的形式在方块中出现了。这些数随着自然数方块、奇数方块的周期性出现而出现。

为和其他专业书籍一致，对于整数 a 能被整数 b 整除的可记为 $b \mid a$，不能整除的记为 $b \nmid a$；a、b 是互质关系的记为 $(a,b)=1$。

另外，在提法上，把不能被组成方块质数整除的数称为同组成方块质数互质的数，这就涉及到数1，为此本书规定1也是同组成方块质数互质的数。本书指的互质数若无其他限制，为两两互质的数。

第二节　方块的性质

通过引入方块（奇数方块）的概念，在研究自然数列（奇数列）作被除数除以几个（一些）连续质数后的余、整除关系时，实现了数形结合，数的一些性质通过方块的“形”直接反映出来了。下面就反映出的一些性质作具体分析

一、用组成方块质数作除数的对应余数表示方块中的数具有唯一性（简称唯一性）

下面讨论的问题是若用组成方块的质数作除数的对应余数，表示方块所含的连续自然数，不同除数对应的余数（整除情况余数记为“0”）排列出的种类和方块中含的连续自然数（奇数）是一一对应关系。

1. 组成方块质数作除数对应余数的表示方法

$3\times5=15$ 的方块中，3 作除数的余数为 2、1、0；5 作除数的余数为 0、1、2、3、4。3、5 作除数的对应余数种类，是 2、1、0 中的三个数同 0、1、2、3、4 五个数，依照 $C_3^1\times C_5^1$ 的方式（3、5 分别表示它们作除数时的余数个数，含余数为 0 情况）排列出的种类。设排列出的对应余数的

种类是 x,则

$$x\left[\div\begin{matrix}3=y\cdots\cdots 2\,2\,2\,2\,2 & 1\,1\,1\,1\,1 & 0\,0\,0\,0\,0\\ 5=z\cdots\cdots 0\,1\,2\,3\,4, & 0\,1\,2\,3\,4, & 0\,1\,2\,3\,4\end{matrix}\right]$$

共有 15 个。这种方法叫“列举法”。还可以用

$$x\left[\div\begin{matrix}3=y\cdots\cdots 2、1、0\\ 5=z\cdots\cdots 4、3、2、1、0\end{matrix}\right]$$

形式表示排列出的余数种类。这种方法称之为综合法。

2. 方块中的数和排列出的余数种类是一一对应关系

因 m、n 互质,方块中含的连续自然数(奇数)个数是 mn,按照 $C_n^1C_m^1$ 计算出方块中的数与对应除数的余数排列出的种类也是 mn。即方块含的连续自然数(连续奇数),同组成方块的质数作除数(含整除)的余数排列出的种类个数是一一对应的。据此,也可得出由多个质数(互质数)组成的方块中这样的一一对应关系。

下面进一步来说明这种一一对应关系。实质上就是同一方块中每数对于组成方块质数作除数余数的唯一性问题。为说明这一问题,以 $mn=p$ 组成的方块为例来说明。

已知:m、n 是质数(互质数),且 $m>n$。

求证:在其组成的方块中的数对 m、n 作除数的余数存在唯一性

证明:假设不是唯一的。也就是说在同一方块中至少存在有两个数,除以 m、n 得到的余数相同。设这两数为 a、$b(a>b)$,a、b 除以 m、n 对应的商为 x、y,x_1、y_1,对应余数皆为 p、q。于是得到

$$mx+p=ny+q \tag{1-1}$$

$$mx_1+p=ny_1+q \tag{1-2}$$

根据(1)、(2)化简得:

$$\frac{x-x_1}{y-y_1}=\frac{n}{m}\qquad(a>b,x-x_1\neq0,y-y_1\neq0)$$

x、y,x_1、y_1都是方块中的数除以 m、n 后的商。方块中的数最大的数是 mn,mn 除以 n 的最大商是 m,mn 除以 m 的最大商是 n,即 $x\leqslant n$,$x_1\leqslant n$,$y\leqslant m$,$y_1\leqslant m$,($a>b$,x、x_1 不同时取等号;y、y_1 不同时取等号),则 $x-x_1$小于 n,n 为整数;$y-y_1$小于 m,m 为整数。再设 $x-x_1=k_1$,

$y-y_1=k_2$，则

$$\frac{x-x_1}{y-y_1}=\frac{n}{m}$$

就是$\frac{k_1}{k_2}=\frac{n}{m}$

可得：

$$k_1=\frac{k_2\cdot n}{m}$$

因 m、n 是质数或互质数，上式能整除的条件是 K_2 值是 m、或是 m 的整数倍

又因 $k_2<m$

所以 k_1 不能是整数

从而这与 $x-x_1=k_1$ 是整数相矛盾

因此所需要的结论成立

按照此方法，很容易证明，$abc\cdots\cdots m=q$ 组成的方块中，各数对 a、b、$c\cdots\cdots m$ 作除数对应余数的唯一性。

这里仅提一个思路：上面证明了 $ab=p$ 方块中，各数对 a、b 作除数对应余数的唯一性，当 c 进入 $ab=p$ 方块后，只需证明 $pc=M$ 的方块中，方块各数对 p、c 作除数的余数具有唯一性即可。依此类推，对于多个质数组成的方块，都可证明该结论成立。就说明由 a、b、$c\cdots\cdots m$ 组成的方块中的各数除以 a、b、$c\cdots\cdots m$ 各数所得对应余数具有唯一性。

3. 两个结论

（1）在同一方块中，方块中的数可以用除以组成方块质数对应的余数的方式来表示。（上面的“列举法”、“综合法”表示的余数种类，实质上也是代表方块中的数。后面就用组成方块质数作除数的余数表示方块中的数）

（2）对于一个新质数 x 进入方块形成的新方块，可看作是原方块中的每个纵列，分别和新进入质数 x（111……0）中的 1 和 0 重合形成的。