



当代
杰出青年
科学文库

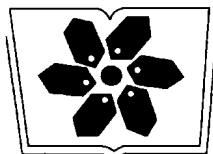
参变量变分原理 与材料和结构力学分析

张洪武 著



科学出版社

www.sciencep.com



中国科学院科学出版基金资助出版

当代杰出青年科学文库

参变量变分原理 与材料和结构力学分析

张洪武 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书对参变量变分原理近年来的发展及其在材料和结构力学分析中的应用进行了较系统介绍。主要包括：数学规划问题的新型求解算法、弹塑性接触分析、各向异性体接触分析、热耦合接触分析、动力弹塑性分析、基于梯度塑性模型的材料软化与应变局部化问题分析、多孔介质渗流耦合分析、非均质材料非线性多尺度计算、柔性膜与纳米力学中 van der Waals 力模拟等。

本书可作为高等院校力学、计算数学、计算材料学、机械与土木工程等专业的研究生、教师的教材或教学参考书，也可供相关领域的科研与工程技术人员使用和参考。

图书在版编目(CIP)数据

参变量变分原理与材料和结构力学分析/张洪武著. —北京: 科学出版社, 2010

(当代杰出青年科学文库)

ISBN 978-7-03-027407-6

I. 参… II. 张… III. 材料力学: 结构力学-力学变分原理 IV. TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 079276 号

责任编辑: 赵彦超 / 责任校对: 陈玉凤

责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 6 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2010 年 6 月第一次印刷 印张: 22

印数: 1—2 500 字数: 425 000

定价: 68.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《当代杰出青年科学文库》编委会

主 编：白春礼

副主编：（按汉语拼音排序）

程津培 李家洋 谢和平 赵沁平
朱道本

编 委：（按汉语拼音排序）

柴玉成	崔一平	傅伯杰	高 抒
龚健雅	郭 雷	郝吉明	何鸣鸿
洪友士	胡海岩	康 乐	李晋闽
罗 毅	南策文	彭练矛	沈 岩
万立骏	王 牧	魏于全	邬江兴
袁亚湘	张 杰	张 荣	张伟平
张先恩	张亚平	张玉奎	郑兰荪

序

固体力学非线性问题的计算一直是计算力学工作者多年来致力研究的课题, 解决这一问题的关键之一是如何构建理论模型与匹配的高效稳定算法. 特别是当材料塑性流动处于非关联状态以及软化状态时, 传统算法遇到了众多挑战, 需要构建特殊的模型与算法以进行问题的有效求解. 以弹塑性接触问题为例, 从数学上讲, 这类问题属自由边界问题, 它们所构成的泛函不可微, 这导致许多数学算法的运用发生困难; 从物理上讲, 这类问题属于非保守系统或不可逆系统, 传统的变分原理不适用, 导致数值分析的困难.

经过十余年的不懈努力, 张洪武教授等对参变量变分原理与参数规划算法进行了全面系统的发展与推进, 本书是他十余年在参变量变分原理的理论算法研究及其工程应用方面创新工作的总结, 主要内容涉及数学规划问题的新型求解算法、各向异性接触、弹塑性、热耦合、动力学非线性、材料应变局部化分析中的梯度塑性模型、多孔介质渗流耦合分析、非均质材料非线性多尺度计算、柔性膜与纳米力学 van der Waals 力模拟等多方面的内容. 许多内容是目前国内外学术界热点研究问题, 难度很大. 这些内容已经远远超出了 1997 年出版的《参变量变分原理及其在工程中的应用》, 那本著作也是由张洪武主笔的. 本书的工作是我国学者在计算力学基础理论和分析方法方面的自主创新成果, 研究工作系统性好, 理论与应用价值高. 尤其重要的是, 相关的一系列理论与算法已在自主的 CAE 软件系统中实现, 体现了很好的知识与成果积累, 并且该程序已有效地应用于工业装备结构的分析与设计中, 解决了一批关键力学问题, 体现了理论与实践的密切结合, 产生了重要的社会效益.

本书是计算力学领域有中国特色的研究成果总结, 其功能是进口程序所不能替代的, 所以能不断深化、扩展, 占领制高点. 我很高兴能为本书作序.

钟万勰

2009 年 1 月

前 言

固体与结构的非线性计算是计算固体力学的重要方面,寻找求解的特色算法一直是众多学者致力研究的课题,现代材料与结构分析以及设计技术的发展对计算力学方法提出了诸多具有挑战性的课题,本书正是围绕这一方向所进行的系列研究的成果.

参变量变分原理最早由钟万勰院士于 1985 年提出,在非线性力学问题的计算中体现出优越性. 20 世纪 90 年代初期,在钟院士等的倡导与鼓励下,作者开始进行参变量变分原理的研究工作,在开展理论与算法研究工作的同时,开发了基于参数二次规划法求解弹塑性接触问题的通用有限元分析程序,并进行了工程应用,早期工作已在 1997 年与钟院士等合著的《参变量变分原理及其在工程中的应用》中作了阐述. 本书是本人与合作者近十余年在参变量变分原理的基本理论与数学规划算法研究及其工程应用方面的一个阶段性总结,内容涉及计算材料与结构力学研究的若干领域,包括三维各向异性接触力学分析、热耦合接触问题、动力学弹塑性软化问题、颗粒材料与复合材料非线性多尺度计算、聚合物力学性能研究的 Voronoi 单元分析方法、Cosserat 体分析的计算方法、梯度塑性理论与参数二次规划算法、柔性网膜与纳米层次微细观计算的 van der Waals 力广义参变本构模型的建立等多个方面,体现出运用参变量变分原理与数学规划算法处理相关问题的独到优势,尤其是算法对特殊非线性问题分析时良好的收敛性与稳定性,有很好的发展与应用前景,许多内容仍需在今后的工作中进一步深入研究和拓展.

全书共分 6 章,第 1 章介绍参变量变分原理与参数二次规划法算法,特别是近年来发展的隐式算法、规划法与迭代相结合的算法、二次规划问题计算的混合能方法以及内点算法、非内点算法等;第 2 章主要介绍各向异性接触问题的本构模型与算法以及热接触分析的参变量变分原理与数学规划算法等;第 3 章介绍 Cosserat 连续体分析的参变量变分原理、Cosserat 体弹塑性分析的参数二次规划算法、Cosserat 多体接触分析等;第 4 章介绍非均质材料物理力学性能计算的基本方法,包括无夹杂 Voronoi 单元弹塑性分析、含夹杂 Voronoi 单元的参数二次规划算法、颗粒材料接触分析与基于数值本构模型的多尺度计算方法等;第 5 章涉及动力弹塑性分析,包括动力弹塑性分析的参变量变分原理与二次规划算法、动力弹塑性软化分析的基本算法、数学规划算法与精细积分法的结合、多孔介质应变局部化分析的梯度塑性模型与二次规划算法等;第 6 章介绍空间柔性网膜结构分析的数学规划算法、广义参变本构模型与 van der Waals 力的处理及其在纳米管力学计算中的应

用等.

本书可供从事力学、计算数学、计算材料学、机械与土木工程的研究与开发人员以及相关领域的工程技术人员使用和参考,也可作为高等院校相关专业的教材或教学参考书.

在本书完成之际,衷心感谢大连理工大学的各位学术前辈、师长以及同事们多年来对作者科研工作的帮助与支持,也特别感谢张柔雷与孙苏明两位博士在作者早期开始从事相关研究工作时提供的帮助;本书介绍的许多工作是与合作者一同完成的,在此向合作者表示衷心的感谢!

在本书的写作与文字整理过程中,得到了青年教师与研究生何素艳、高强、解兆谦、王辉、叶宏飞、王鲲鹏等的大力帮助,在此对他们一并表示感谢!

感谢国家自然科学基金委员会杰出青年基金 (10225212)、创新群体项目 (10421202、10721062)、重点基金、面上基金,国家科技部 973 和 863 项目等多年来对相关研究工作的支持!

由于时间仓促,加之作者水平所限,书中难免会有各种纰漏和疏忽,敬请读者批评指正.

张洪武

2009 年 1 月

目 录

序

前言

第 1 章 参变量变分原理与二次规划算法	1
1.1 引言	1
1.2 参变量变分原理的基本思想	2
1.3 基于经典连续体理论的参变量最小势能原理和参变量最小余能原理	5
1.3.1 基于经典连续体理论的参变量最小势能原理	5
1.3.2 基于经典连续体理论的参变量最小余能原理	8
1.4 弹塑性分析参数二次规划算法	10
1.4.1 有限元求解方程的建立	10
1.4.2 单元出口矩阵的形式	17
1.5 弹塑性问题参数二次规划分析的隐式算法	23
1.5.1 隐式迭代算法	23
1.5.2 修改的 Return Mapping 算法	25
1.5.3 数值算例	26
1.6 空间弹塑性接触问题分析的参变量变分原理	28
1.6.1 接触问题的一般描述和基本方程	28
1.6.2 空间弹塑性接触问题参变量最小势能原理	30
1.6.3 空间弹塑性接触问题参数二次规划解	35
1.6.4 数学规划与迭代算法的结合	46
1.6.5 接触力的计算	49
1.6.6 数值算例	50
1.7 化为互补模型的参数二次规划问题求解	52
1.7.1 互补问题定义	52
1.7.2 二次规划问题的混合能算法	53
1.7.3 求解互补问题的内点算法	56
1.7.4 求解互补问题的 NCP 函数和方程组方法	59
1.8 非线性问题解的不唯一性问题	62
1.8.1 单点有摩擦接触问题分析	62
1.8.2 解的唯一性与稳定性	65

1.8.3	数学规划法求解	66
1.8.4	射线解问题	67
1.9	弹塑性接触分析有限元软件系统	69
1.9.1	系统的基本功能	70
1.9.2	弹性问题多重子结构分析方法	73
1.9.3	非线性分析多重子结构法	75
	参考文献	77
第 2 章	各向异性与热耦合接触问题分析	81
2.1	正交各向异性弹塑性接触分析	81
2.1.1	正交各向异性弹塑性摩擦接触定律	81
2.1.2	正交各向异性弹塑性摩擦接触	85
2.1.3	各向异性弹塑性接触问题参数二次规划方法	86
2.1.4	单元出口矩阵表达形式	89
2.1.5	数值算例	93
2.2	接触传热耦合问题的二次规划算法	103
2.2.1	热传导问题及热弹性力学的基本方程	104
2.2.2	热接触耦合问题的提法	106
2.2.3	热接触问题分析的参数二次规划算法	108
2.2.4	有限元技术与耦合问题求解迭代算法	113
2.2.5	数值算例	115
2.3	热接触分析中解的唯一性问题	119
2.3.1	控制方程	119
2.3.2	不唯一解问题的示例	120
2.3.3	界面热阻情况的不唯一解问题	123
2.3.4	迭代算法振荡问题的讨论	126
	参考文献	129
第 3 章	Cosserat 理论连续介质分析	132
3.1	引言	132
3.2	Cosserat 弹性理论	133
3.2.1	Cosserat 理论弹性问题的基本方程	133
3.2.2	应力坐标转换公式	136
3.2.3	Cosserat 体最小势能原理及其证明	138
3.2.4	平面四、八节点等参单元构造	140
3.2.5	单元测试	144
3.2.6	数值算例	148

3.3	Cosserat 体弹塑性分析的参数二次规划算法	151
3.3.1	Cosserat 弹塑性本构方程	151
3.3.2	基于 Cosserat 理论的参变量最小势能原理	154
3.3.3	Cosserat 模型下的有限元离散化	156
3.3.4	单元出口矩阵的形式	159
3.3.5	数值算例	163
3.4	Cosserat 多体接触分析	167
3.4.1	Cosserat 多体摩擦接触描述	167
3.4.2	Cosserat 接触模型的虚功原理	171
3.4.3	弹性接触问题的二次规划算法	173
3.4.4	惩罚因子的消除	176
3.4.5	数值算例	178
	参考文献	188
第 4 章	非均质材料物理力学性能计算	192
4.1	无夹杂 Voronoi 单元弹塑性分析	193
4.1.1	基于参变量余能原理的无夹杂 Voronoi 单元	194
4.1.2	无夹杂 Voronoi 单元二次规划模型	196
4.1.3	数值算例	199
4.2	含夹杂 Voronoi 单元的参数二次规划算法	205
4.2.1	含夹杂 Voronoi 单元构造	205
4.2.2	含夹杂 Voronoi 单元的二次规划法	209
4.2.3	数值算例	211
4.3	基于参变量变分原理的 Cosserat 体分析的 Voronoi 单元法	216
4.3.1	基于参变量最小余能原理的 Cosserat 体 Voronoi 单元构造	216
4.3.2	Cosserat 模型最小余能原理	219
4.3.3	Cosserat 模型分析的 Voronoi 单元与二次规划方法	222
4.3.4	数值算例	224
4.4	颗粒材料接触分析与多尺度计算	230
4.4.1	颗粒体相互作用分析的基本力学模型	231
4.4.2	颗粒体相互作用有限元分析列式	234
4.4.3	岩土介质的宏观力学性能预测	237
4.4.4	基于数值本构模型的材料非线性分析的多尺度方法	241
4.4.5	数值算例	244
	参考文献	247
第 5 章	动力弹塑性分析	250
5.1	动力弹塑性分析算法	250

5.1.1	动力弹塑性问题的参数二次规划方法	250
5.1.2	基于 Newmark 方法的动力弹塑性分析	254
5.1.3	基于精细积分方法的动力弹塑性分析	255
5.1.4	精细积分算法精度的讨论	259
5.1.5	数值算例	263
5.2	动力弹塑性软化分析	271
5.2.1	动力弹塑性软化问题及其网格依赖性问题	271
5.2.2	梯度塑性模型本构关系	273
5.2.3	基于梯度塑性模型的一维动力软化问题	275
5.2.4	基于梯度塑性模型的参变量变分原理及参数二次规划方法	277
5.2.5	数值算例	278
5.3	多孔介质应变局部化的梯度塑性模型	285
5.3.1	网格依赖性问题	285
5.3.2	参数二次规划算法	287
5.3.3	数值算例	289
	参考文献	292
第 6 章	网膜结构与原子间 van der Waals 力计算的数学规划法	295
6.1	拉压模量不同杆单元计算的参变量变分原理与算法	295
6.2	网膜结构分析	299
6.2.1	网系结构计算的方法与基本原理	300
6.2.2	多折点本构模型的描述	302
6.2.3	数学规划法求解有限元方程	304
6.2.4	膜单元分析的本构方程	306
6.2.5	数值算例	307
6.3	纳米材料原子间 van der Waals 力计算的参变量变分原理	316
6.3.1	纳米材料原子间 van der Waals 力的概念	316
6.3.2	纳米管分析的分子结构力学模型	319
6.3.3	van der Waals 力模型	319
6.3.4	van der Waals 力的参变量本构关系	321
6.3.5	数学规划方法	325
6.3.6	数值算例	328
	参考文献	333

第1章 参变量变分原理与二次规划算法

1.1 引言

在自然界及工程领域中,有许多边界待定问题,例如力学问题中的弹塑性问题 and 接触问题. 对于弹塑性问题,物体受力后,在内部既产生弹性区又可能产生塑性区,弹性与塑性区域的交界面是待定的. 对于接触问题情况也类似,在接触交界面处,两个物体的接触区和非接触区的边界也是待定的. 寻求此类问题的偏微分方程的解析解往往非常困难甚至是不可能的. 变分法是解决边界待定问题的一种有效方法,很多偏微分方程对应的定解可从变分法导出. 有限元法的理论基础也是变分法,因此,在有限元法诞生之后,寻求与原物理边值问题相对应的变分原理就显得尤为重要.

参变量变分原理最早由钟万勰 (1985) 提出并加以应用,这一理论突破了经典变分原理的局限性,引入了现代控制论中的极值变分思想,将原问题化为在由本构关系导出的状态方程控制下求泛函极小值的问题. 参变量变分原理的理论基础是现代变分法,从数学角度来看,与拓扑学中的同伦理论是一致的,它有以下特点:

第一,本构关系不再像经典变分原理那样隐含于能量泛函之中,而是以状态方程的形式体现,作为对所求解系统的控制施加于整个变分过程. 边值问题的全部约束条件被划分为两大类:一类是经典变分原理所指的约束,如在最小势能原理中的几何方程和位移边界条件,称为约束集;另一类是本构控制系统 (本构状态方程) 的约束. 本构状态方程与约束集的不同之处是它只制约整体变分状态,而对自变函数的容许变分不作任何制约.

第二,参变量变分原理将泛函宗量分为两大类:一类是参加变分的状态变量 (如参数势能原理中的位移),它们和经典变分原理中的宗量完全一样;另一类是控制变量 (即参变量,如弹塑性分析中的塑性乘子),它们不参加变分,但通过状态方程控制着变分过程,使问题的非线性本构关系得以满足.

第三,参变量变分原理较经典变分原理的应用范围要广泛. 由于参变量变分原理把边值待定问题转化为系统的最优控制问题,从而可以处理许多复杂的经典变分原理勉强处理或无法解决的问题. 例如,它不受塑性流动理论中 Drucker 假设的限制,可以很方便地解决材料弹塑性分析中的不可逆流动、摩擦接触物体间的非法向滑动、内摩擦材料的非关联流动等工程问题.

第四,在计算方面,参变量变分原理改变了非线性问题的解算手段,将边值待

定问题转化为系统控制问题, 同时非线性问题的最终求解形式可化为标准的数学规划模型, 现有成熟的数学规划问题的求解方法均可以应用到力学相关问题的求解中, 且算法收敛性好; 对于弹塑性问题, 只要问题是塑性可控的, 参变量变分原理将其化为增量问题进行求解, 可保证在有限步内达到收敛, 且不论是理想弹塑性还是软化材料, 收敛速度与强化材料相同; 如果屈服函数是应力的线性函数且不考虑卸载, 则采用参变量变分原理一个增量步就可以达到最终解. 此外, 参变量变分原理的泛函表达式与经典变分原理的泛函表达式相比, 仅多了一个变分宗量的线性项, 形式非常简单. 又因为控制变量不参加变分, 在泛函之中可当作常量来处理, 这样就可以使算法编程在原有的线性分析程序上实现.

1.2 参变量变分原理的基本思想

参变量变分原理是基于最优控制理论中的现代变分思想提出的. 最优控制理论的实质是建立和求解变分问题, 其目的通常是在所有可能的控制规律中求一种最优的控制规律, 使衡量系统工作优劣的性能指标达到最小 (或最大). 然而, 在控制理论中, 受控系统状态变量和控制变量都是单变量时间 t 的函数, 指标泛函的积分是一维的, 状态方程是一组常微分方程; 而在弹塑性力学准静态边值问题中, 待求的场量, 如位移、应力都是三维空间坐标的函数, 能量泛函的积分是对坐标进行的, 也写不出用常微分方程组描述的状态方程. 鉴于这些差异, 不可能直接照搬最优控制理论中的各种定理和公式, 但可以采用类比的方法, 应用最优控制理论中的基本思想来寻找和求解与原特定边值问题相等价的变分原理.

经典弹塑性力学边值问题可简要地叙述为: 在某个给定时刻 t , 假定处于平衡的物体或结构域 Ω 上各点的状态和变形历史皆为已知, 在 Ω 内给定体力增量 db_i , 在力的边界 S_σ 上给定面力增量 $d\bar{p}_j$, 在位移边界 S_u 上给定位移增量 $d\bar{u}_i$. 求满足下列条件的应力增量 $d\sigma_{ij}$ 和位移增量 du_i 或应变增量 $d\varepsilon_{ij}$.

(1) 平衡方程

$$d\sigma_{ij,j} + db_i = 0 \quad (1.2.1)$$

(2) 协调关系

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(du_{i,j} + du_{j,i}) \quad (1.2.2)$$

(3) 边界条件

$$d\sigma_{ij}n_j = d\bar{p}_i, \quad \text{在 } S_\sigma \text{ 上} \quad (1.2.3)$$

$$du_i = d\bar{u}_i, \quad \text{在 } S_u \text{ 上} \quad (1.2.4)$$

(4) 本构关系

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}(d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) \quad (1.2.5)$$

$$f_\alpha(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \kappa) \leq 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m \quad (1.2.6)$$

$$d\varepsilon_{kl}^p = \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial \sigma_{kl}}, \quad \lambda_\alpha \begin{cases} \geq 0, & f_\alpha = 0 \\ = 0, & f_\alpha < 0 \end{cases} \quad (1.2.7)$$

可以看出, 上述关系 (1.2.1)~(1.2.4) 与弹性力学边值问题提法基本相同. 区别是在本构关系上, 式 (1.2.5)~(1.2.7) 是弹塑性本构关系的描述, 其中, f_α 和 g_α 分别表示屈服函数和塑性势函数; κ 是反映变形历史的强化参数, 称作内变量; λ_α 为塑性流动因子; m 为屈服 (势) 函数个数.

下面介绍如何采用控制理论中的基本思想建立与弹塑性力学边值问题相等价的变分原理. 建立一个最优控制问题, 需预先确定以下四个基本部分:

- (1) 确定系统的参数, 即系统的状态变量与控制变量, 建立系统的状态方程;
- (2) 给定状态变量的初始值;
- (3) 给出状态变量和控制变量的约束条件;
- (4) 给出一个合理的性能指标函数.

对于弹塑性力学问题, 状态变量是指能够完全描述系统状态最小的一组变量. 对于式 (1.2.1)~(1.2.7) 所描述的边值问题, 确定系统的状态变量有应力增量 $d\sigma_{ij}$ 、位移增量 du_i 和应变增量 $d\varepsilon_{ij}$, 对于三维问题一共有 15 个变量, 其中有些可以通过定解方程从另外一些量求出, 有些则由于其引起所描述的定解方程被变分极值的结果所取代而不必显式给出, 因此, 完全描述弹塑性系统并不同时需要这么多变量. 从下面的论证可以说明, 对于最小势能原理, 可取 du_i 作为状态变量, 而对于最小余能原理, 则可取 $d\sigma_{ij}$ 作为状态变量. 一般地, 状态变量可以是 15 个变量中的某些量之间的组合, 具体形式如何, 要看所选用的标准泛函的形式.

系统的状态方程 (或控制方程) 也就是受控系统的数学模型, 它是描述实际系统各物理量之间关系的数学表达式. 对于问题 (1.2.1)~(1.2.7) 来说, 描述各物理量之间内在联系的是本构关系, 而其他的一些线性体系方程不难用常规方法处理, 因此选择本构关系为弹塑性系统的状态方程. 在这个系统中, 流动因子控制着系统在弹性和塑性状态间的转化, 保证屈服约束条件得以满足, 因而是系统的控制参变量, 其不参与相应泛函的变分过程. 由此可以对弹塑性系统本构方程 (1.2.1)~(1.2.7) 进行如下变换.

以下的推导认为屈服面可能有 m 个曲面相交的情形, 如图 1.2.1 所示. 对式 (1.2.6) 的屈服函数作一阶 Taylor 展开, 有

$$f_\alpha = f_\alpha^0 + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \kappa} d\kappa \quad (1.2.8)$$

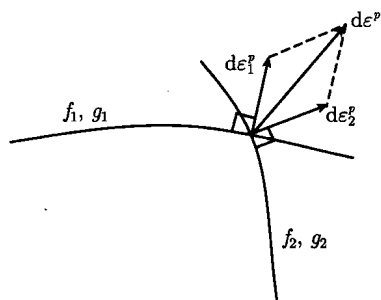


图 1.2.1 多屈服面相交

将等式 (1.2.5) 和 (1.2.7) 代入上式, 有

$$f_{\alpha} = f_{\alpha}^0 + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} d\epsilon_{kl} + \left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \epsilon_{ij}^p} \frac{\partial g_{\beta}}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \frac{\partial g_{\beta}}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \kappa} h_{\beta} \right) \lambda_{\beta} \quad (1.2.9)$$

等式 (1.2.9) 的推导过程中用到了关系 $d\kappa = h_{\beta} \lambda_{\beta}$, 同时, (1.2.9) 也可写成如下表达式

$$f_{\alpha} = f_{\alpha}^0 + W_{\alpha kl} d\epsilon_{kl} + M_{\alpha \beta} \lambda_{\beta} \leq 0 \quad (1.2.10)$$

其中

$$W_{\alpha kl} = \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}, \quad M_{\alpha \beta} = \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \epsilon_{ij}^p} \frac{\partial g_{\beta}}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \frac{\partial g_{\beta}}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \kappa} h_{\beta}$$

一般地, $M_{\alpha \beta}$ 是对角线上的元素不等于零而非对角元素多数为零的矩阵, 并且只有当应力状态点落在屈服面之内的交点上时非对角元素才起作用。

通过引入松弛因子 ν_{α} , 上述屈服函数不等式可表述成下列互补形式

$$\begin{aligned} f_{\alpha}(d\epsilon, \lambda_{\alpha}) + \nu_{\alpha} &= 0 \\ \lambda_{\alpha} \nu_{\alpha} &= 0, \quad \lambda_{\alpha}, \nu_{\alpha} \geq 0 \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

这里互补性条件 $\lambda_{\alpha} \nu_{\alpha} = 0, \lambda_{\alpha}, \nu_{\alpha} \geq 0$ 表示一点只能发生弹性、塑性加载或卸载状态之一。当 $\lambda_{\alpha} = 0$ 时, $\nu_{\alpha} \geq 0$, 说明 $f_{\alpha} < 0$ 为弹性卸载; 当 $\lambda_{\alpha} \geq 0$ 时, $\nu_{\alpha} = f_{\alpha} = 0$ 为塑性加载。引入松弛变量还说明了具体求解控制变量的途径。

确立了系统的状态方程之后, 在给定状态变量的初始值以及状态变量和控制变量的约束条件的基础上, 通过建立适当的能量泛函表达式作为系统的性能指标函数, 即可将弹塑性系统边值问题转化为最优控制模型进行求解。下一节将具体给出基于经典连续体理论的参变量最小势能和参变量最小余能原理。

参变量变分原理中泛函宗量分为参加和不参加变分两大类。泛函表达式中的自变量 (如位移、应力增量) 参与变分, 而泛函表达式中的参变量 (控制变量) 虽是自变量的函数, 但不参与变分, 即在变分时, 将参变量当作常量处理。同时, 参变量变分原理中本构关系是显式地作为边值问题的控制系统施加于整个变分过程, 而不再像经典变分原理那样隐含于能量泛函中。因此, 从数学角度来看, 参变量变分原理应属于现代变分法。

由控制理论原理来看, 过去力学中的变分原理都可归结到静态经典变分法中。因为这些变分原理中不存在控制变量和控制系统, 同时它们要求泛函宗量的取值范围不受任何限制 (约束条件应预先满足), 如果泛函宗量的取值域为不等式或泛函

对宗量的可微性在取值域内不存在时, 经典变分法是无能为力的. 现代变分法最优值往往都是在闭集 (不等式集合) 的边界上获得的. 因而现代变分法只要求对状态变量具有一定可微性, 而不要求对控制变量变分或可微. 经典变分原理与参变量变分原理的变分区别如图 1.2.2 所示.

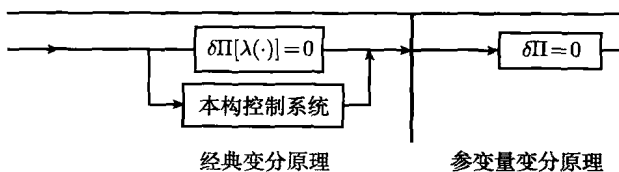


图 1.2.2 经典变分原理与参变量变分原理的变分区别

1.3 基于经典连续体理论的参变量最小势能原理 和参变量最小余能原理

1.3.1 基于经典连续体理论的参变量最小势能原理

相应于最小势能原理, 基本未知量为位移增量及控制参变量, 预先满足位移协调方程 (1.2.2) 和几何边界条件 (1.2.4). 这样, 弹塑性本构方程便可写成只含有位移增量和控制变量的互补方程:

$$\begin{aligned} f_{\alpha}(du, \lambda) + \nu_{\alpha} &= 0 \\ \lambda_{\alpha} \nu_{\alpha} &= 0, \quad \lambda_{\alpha}, \nu_{\alpha} \geq 0 \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

由式 (1.2.9) 知, 屈服函数 f 是 λ 的线性函数, 因而通过 (1.3.1) 式可唯一地确定控制变量和力学状态. 一般地, 屈服函数 f 可能不是 λ 的线性函数, 但从可控性观点, 在控制容许域 $\lambda \geq 0$ 内应当要求弹塑性状态方程控制变量具有唯一性.

总势能, 即指标函数, 是变分法求极值的直接对象, 对于参变量最小势能原理, 位移增量 du_i 为自变量, 而 λ_{α} 为参变量, 一并组成泛函以导出平衡方程和力的边界条件. 定义弹塑性系统的参变量势能泛函为

$$\Pi_e^p[\lambda(\cdot)] = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} d\epsilon^T D d\epsilon - \lambda^T R d\epsilon \right] d\Omega - \int_{\Omega} db^T du d\Omega - \int_{S_p} d\bar{p}^T du dS \quad (1.3.2)$$

其中, $d\epsilon$ 应当由 du 来表达, λ 为参变量, 而

$$R = \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) D \quad (1.3.3)$$

式 (1.3.2) 与 (1.3.3) 也可写成张量形式

$$\Pi_e^p[\lambda(\cdot)] = \int_{\Omega} \frac{1}{2} d\varepsilon_{ij} D_{ijkl} d\varepsilon_{kl} d\Omega - \int_{\Omega} \lambda_{\alpha} R_{kl\alpha} d\varepsilon_{kl} d\Omega - \int_{\Omega} db_i du_i d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} d\bar{p}_i du_i dS \quad (1.3.2)'$$

其中

$$R_{kl\alpha} = \left(\frac{\partial g_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}} \right) D_{ijkl} \quad (1.3.3)'$$

为与当前状态无关的常量矩阵。可以看出, 上述参变量势能泛函与经典的势能泛函相比, 应变能密度中只含有弹性本构矩阵, 同时泛函中引入了控制参变量, 从而可以有效反映弹塑性本构矩阵中的流动准则。

弹塑性系统参变量最小势能原理描述: 在所有满足应变-位移关系 (1.2.2) 和几何边界条件 (1.2.4) 的可能位移增量场中, 真实解使泛函 (1.3.2) 在状态方程 (1.3.1) 的控制下取总体最小值。

弹塑性问题的求解可化为如下最优控制模型:

$$\begin{aligned} \min \quad & \Pi_e^p[\lambda(\cdot)] \\ \text{s.t.} \quad & f_{\alpha}(d\mathbf{u}, \lambda) + \nu_{\alpha} = 0 \\ & \lambda_{\alpha} \nu_{\alpha} = 0, \quad \lambda_{\alpha}, \nu_{\alpha} \geq 0 \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

下面给出参变量最小势能原理的证明。

现代变分法在求极值的过程中, 只要泛函始终依赖于控制参变量, 就可以只对自变量求变分, 而不必对控制参变量求变分。上述参数势能泛函 (1.3.2)' 对位移增量 du_i 求一阶变分有

$$\begin{aligned} \delta \Pi_e^p[\lambda(\cdot)] = & \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \delta du_{i,j} D_{ijkl} du_{k,l} + \frac{1}{2} du_{i,j} D_{ijkl} \delta du_{k,l} - \lambda_{\alpha} R_{kl\alpha} \delta du_{k,l} \right) d\Omega \\ & - \int_{\Omega} db_i \delta du_i d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} d\bar{p}_i \delta du_i dS = 0 \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

利用 Green 公式及几何边界条件已满足的条件, 式 (1.3.5) 中第一、二、三项可分别表示为

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{1}{2} \delta du_{i,j} D_{ijkl} du_{k,l} d\Omega \\ = & \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta du_i n_j D_{ijkl} du_{k,l} dS - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \delta du_i [D_{ijkl} du_{k,l}]_{,j} d\Omega \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{1}{2} du_{i,j} D_{ijkl} \delta du_{k,l} d\Omega \\ = & \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta du_i n_j D_{klij} du_{k,l} dS - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \delta du_i [D_{klij} du_{k,l}]_{,j} d\Omega \end{aligned} \quad (1.3.7)$$