

2011

全国硕士研究生入学考试十年真题精解系列精品丛书



博实教育
pkutest.cn

全国硕士研究生入学考试 十年真题精解 数学二

全国硕士研究生入学考试辅导用书编审委员会 编著
童 武 主编

- 来自北京大学、清华大学和中国人民大学的最新权威信息
- 原命题组组长领衔编写，20多位一线专家深度审稿，
倾力推出2011年考研整体解决方案
- 以题型训练为核心，精辟阐明解题思路，全面展现题型变化
- 明示命题原则与规律，把握考研命题脉搏

航空工业出版社

全国硕士研究生入学考试十年真题精解系列精品丛书

全国硕士研究生入学考试
十年真题精解
数 学 二

全国硕士研究生入学考试辅导用书编审委员会 编著

童 武

主编

航空工业出版社

北 京

内 容 提 要

本书囊括了1998~2010年全国硕士研究生入学统一考试数学二13套考试真题及详细解析,并针对最新大纲的变化,以“考点提炼”和“详细解析”的形式,着重对每一道题的解题思路及答题要点进行了阐述。本书内容系统、准确,方便读者全面了解数学二考试精髓,把握考试脉络,有助于考生在考试中赢得高分。

本书适用于参加全国硕士研究生入学统一考试(数学理工类)的考生。

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学考试十年真题精解·数学二/童武主编. —北京:航空工业出版社,2010.4
(全国硕士研究生入学考试十年真题精解系列精品图书)
ISBN 978-7-80243-476-9

I. 全… II. 童… III. 高等数学—研究生—入学考试—解题 IV. G643-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 057281 号

全国硕士研究生入学考试十年真题精解·数学二
Quanguo Shuoshi Yanjiusheng Ruxue Kaoshi Shinian Zhenti Jingjie
Shuxueer

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)

发行部电话:010-64815615 010-64978486

北京建泰印刷有限公司

全国各地新华书店经售

2010 年 4 月第 1 版

2010 年 4 月第 1 次印刷

开本:787×1092 1/16

印张:12

字数:290 千字

印数:1—8000

定价:30.00 元

系列丛书总序

时下,报考硕士研究生已经成为我国当代大学生选择发展方向的重要途径。2010年全国考研人数达到了140万人,“考研热”是我国社会发展的大趋势和当代青年谋求发展相结合的产物。全国硕士研究生入学考试是国家选拔高层次、高水平人才的考试,考试的侧重点在于考查考生的综合能力。公共课是参加研究生入学考试道路上最大的障碍和挑战。许多考生并非由于专业课的缘故,而是公共课未达到国家最低录取分数线而与自己理想的学校失之交臂。

历史是一面镜子,了解昨天才能明白今天,掌握了历史和现在才能把握未来。研习历年的试题是研究生入学考试复习备考中必不可少的关键环节,也是考生掌握考试动态,赢得高分的最佳捷径。历年的考题是标准的复习题。自从实行研究生入学考试以来,也时有真题重现的现象发生,如2006年数学一的第一大题第(3)小题与1993年数学一第四大题、2003年数学一的第一大题第(3)小题与1993年数学一的第一大题第(3)小题、2003年数学一的第一大题第(5)小题与1996年数学三的第一大题第(5)小题、2003年数学一的第三大题与2001年数学三的第六大题、2003年数学四的第四大题与2001年数学一的第五大题是基本雷同的。英语与政治也有真题重复出现的情况,2003年英语第36题与1996年英语第43题、2003年英语第37题与1995年英语第34题、2003年英语第26题与1995年英语第21题、2003年英语第29题与1996年英语第42题、2003年英语第24题与1997年英语第42题、1996年英语第46题与1995年英语第6题,等等,都是非常相似的;2003年政治理论第21题与2000年文科政治第31题和1993年理科政治第6题、2003年政治理论第31题与1993年理科政治第32题、2003年政治理论第36题与1995年文科政治第28题和1994年文科政治第29题,等等,都是相同或非常相似的。所以,对往年真题的研究是最有帮助的。循着命题人的思路,我们就可以把握考试的脉搏,明确考试的重点和难点所在。为了让广大参加研究生入学考试的考生能够进行有效的复习,我们倾情推出这套《全国硕士研究生入学考试十年真题精解》系列辅导用书。

这套《全国硕士研究生入学考试十年真题精解》共包括五册,分为《全国硕士研究生入学考试十年真题精解·数学一》、《全国硕士研究生入学考试十年真题精解·数学二》、《全国硕士研究生入学考试十年真题精解·数学三》、《全国硕士研究生入学考试十年真题精解·政治》和《全国硕士研究生入学考试十年真题精解·英语》。这套书是在清华大学、北京大学和中国人民大学的专家、教授的组织 and 策划下进行编写的,以北京、上海、深圳等全国著名考研辅导班的内部资料为基础,以在一线进行考研辅导的专家和教授的教案为蓝本,经过精心整理和严格按照大纲的要求编写而成。本书按照年代顺序,对历年的考试试题进行精心的讲解和思路点拨,阐释考点和难点,启迪考生的智慧。考生可以以此进行认真研习,准确掌握试题的内容和要求,进行“有的放矢”的考前复习。本书编写时将试题解析与大纲考点相结合,总结出考试特点和规律,考生可以通过试题解析加强对考点

的认识,理清解题思路,了解考试的最新动态和发展趋势。相信这套书能让广大考生如虎添翼,在研究生入学考试中取得理想的成绩,迈进心仪的学校,实现自己的夙愿。

本套系列丛中,数学一、数学二、数学三由童武编写;英语分册由索玉柱编写;政治分册由涂振旗编写。另外,为了尊重作者自己的意愿,还有一部分参与编写的教授和专家在此不再一一列出。在本丛书的编写过程中,得到了北京大学光华管理学院和清华大学经管学院部分专家和教授的大力支持,在此表示衷心的感谢。

由于时间仓促,不当和疏漏之处在所难免,望广大专家和读者批评指正。

编 者

2010年5月于北京

目 录

全国硕士研究生入学考试数学解题思路与技巧分析	(1)
2010 年全国硕士研究生入学考试数学二试题	(6)
2009 年全国硕士研究生入学考试数学二试题	(9)
2008 年全国硕士研究生入学考试数学二试题	(12)
2007 年全国硕士研究生入学考试数学二试题	(15)
2006 年全国硕士研究生入学考试数学二试题	(19)
2005 年全国硕士研究生入学考试数学二试题	(22)
2004 年全国硕士研究生入学考试数学二试题	(25)
2003 年全国硕士研究生入学考试数学二试题	(28)
2002 年全国硕士研究生入学考试数学二试题	(31)
2001 年全国硕士研究生入学考试数学二试题	(34)
2000 年全国硕士研究生入学考试数学二试题	(37)
1999 年全国硕士研究生入学考试数学二试题	(40)
1998 年全国硕士研究生入学考试数学二试题	(43)
2010 年全国硕士研究生入学考试数学二试题精解	(46)
2009 年全国硕士研究生入学考试数学二试题精解	(56)
2008 年全国硕士研究生入学考试数学二试题精解	(67)
2007 年全国硕士研究生入学考试数学二试题精解	(76)
2006 年全国硕士研究生入学考试数学二试题精解	(85)
2005 年全国硕士研究生入学考试数学二试题精解	(95)
2004 年全国硕士研究生入学考试数学二试题精解	(105)
2003 年全国硕士研究生入学考试数学二试题精解	(115)
2002 年全国硕士研究生入学考试数学二试题精解	(127)
2001 年全国硕士研究生入学考试数学二试题精解	(139)
2000 年全国硕士研究生入学考试数学二试题精解	(151)
1999 年全国硕士研究生入学考试数学二试题精解	(163)
1998 年全国硕士研究生入学考试数学二试题精解	(172)

全国硕士研究生入学考试 数学解题思路与技巧分析

众所周知,报考硕士研究生近年来已经成为我国社会的一大热点,成为当代大学毕业生选择发展方向的主流。据统计,我国参加全国硕士研究生入学考试的人数在逐年递增,2010年全国考研人数达到了140万人。这其中,应届大学本科毕业生的报考人数和往届毕业生的报考人数基本已经持平。出现这样愈演愈烈的“考研热”并非偶然现象,它是我国社会发展的大趋势和当代青年学子谋求个人发展相结合下的必然产物,充分反映了我们这个时代的特征。毋庸置疑,“考研热”的出现对于国家和个人都具有不可估量的积极意义。一方面,我国自实施改革开放以来,现代化建设事业可谓日新月异,中国已经融入世界舞台,参与国际交流与竞争,无形中对于高学历、高素质人才的需求量越来越大。国家之间的竞争,说到底还是人才的竞争;国家综合实力的提高,也在相当大的程度上取决于人才的培养。在我国政府提出“科教兴国”的战略性举措的时代背景下,考研大潮的风起云涌也就不足为奇了。另一方面,由于高等教育的普及率不断提高,越来越多的青年学子认识到了知识经济时代个人的发展必须与时代要求相结合,只有不断提高自己的知识水平,才能适应形势,为个人创造更广阔的发展空间,实现自己的人生价值。时代在召唤,成为高水平复合型人才,跨入研究生行列,已是大势所趋。

【全国硕士研究生入学考试的性质与特点】

全国硕士研究生入学考试是国家选拔高层次高水平人才的考试,并不同于大学在校期间以检验学生学习水平和掌握知识程度为目的的考试。明确研究生入学考试的选拔性质,就不难认识到此项考试具有相当的难度。基于这一点,考试的侧重点在于考查考生的综合能力。其中具体的深度和广度,需要考生在长期的复习备考过程中逐渐领会。此外,考生们在投身于考研大军之初,应该有充分的心理准备:考研是一项艰苦而细致的系统工程,需要耐心、信心和决心。

【全国硕士研究生入学考试(数学)大纲】

由国家考试中心制定的“数学考试大纲”是数学考试命题的纲领,它对数学考试的性质、内容、要求、分类和适用专业等方面进行了详尽的阐述。因此,大纲对考生有重要的指导性作用,是考生复习备考的重要依据,应引起高度的重视。考生应认真阅读,仔细研究,对于大纲所涉及的一切方面都要了然于胸,这样才能有的放矢,事半功倍。自1989年全国硕士研究生入学考试实行全国统考以来,国家考试中心就严格依照大纲所规定的内容和要求来命题,在此期间,大纲历经若干次修订,例如,考试中心于1996年、2002年都对大纲进行了修订,从2003年起数学一增加了“几何型概率”,删除了“两曲线的交角”和“包含两个未知函数的一阶常系数线性微分方程组”,数学二增加了“实对称矩阵的特征值、特征向量及相似对角矩阵”;数学四增加了“常微分方程”,同时将数学试卷的满分调整为150分。从2004年起,数学二增

加了“多元函数微积分学”,并将选择题和填空题的考分比例由原来的 48 分增加到 56 分。

【全国硕士研究生入学考试(数学)试题分析】

本丛书收录了自 1998 年至 2010 年历年的全部考研数学试题,目的是帮助考生全面准确地掌握试题的内容、要求、试卷的结构及命题的特点和走向等。考生只有在解答真题、研究真题的基础上才能知己知彼,提高复习效率,直至取得满意的成绩。考生在研读本丛书的过程中,要善于归纳总结,提炼出规律性的东西。尽管数学考试最具难度和挑战性,并且试题不断推陈出新,但其基本模式却是相对稳定的,因此考生应学会以不变应万变。在此,编者提纲挈领地將历年真题中呈现出的几大特点——阐述如下,希望能对考生起到抛砖引玉的作用。

一、试题着重考查基本概念、基本理论、基本方法,这一点不仅体现在试题中直接考查“三基”的内容占相当大的比重上,也贯穿渗透到考查综合能力、技巧的题目当中。没有扎实过硬的基本功,取得好成绩是不可能的。就 2006 年的试题而言,直接考查“三基”的题目就有接近 60 分值的题目,可见试题对于“三基”的要求是非常高的。以下编者举出若干例题予以具体说明。

例 1 (1999 年数学一、二、三、四中共同的一道选择题)

设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则()。

- (A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数
- (B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数
- (C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数
- (D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必是单调增函数

本题涉及了原函数,不定积分,变上限定积分,函数的奇偶性、单调性、周期性等基本概念。

例 2 (2000 年数学二的一道选择题)

设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$, 且 $f'(0) = 0$, 则()。

- (A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
- (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
- (C) 点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
- (D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, 点 $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

本题涉及了极值点、拐点等基本概念,考查了判别极值点、拐点的基本方法。

例 3 (2006 年数学一的一道选择题)

设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$ 。已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是()。

- (A) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$
- (B) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$
- (C) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$
- (D) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$

本题涉及了一元函数的极值问题、二阶偏导数的概念和计算方法。

例 4 (2005 年数学一的一道选择题)

设有三元方程 $xy - z \ln y + e^z = 1$, 根据隐函数存在定理, 存在点 $(0, 1, 1)$ 的一个邻域, 在此邻域内该方程()。

- (A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x, y)$
- (B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y = y(x, z)$ 和 $z = z(x, y)$
- (C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $z = z(x, y)$
- (D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $y = y(x, z)$

本题考查了隐函数存在定理和偏导数之间的关系, 有一定的技巧性, 但归结为基本概念的灵活运用。

二、试题有相当比重在于考查重要定理、公式的灵活运用, 这一点是由数学学科自身的特点决定的, 数学是思维的艺术体操, 对学习者的思维能力要求颇高。数学中本身包含有大量的公理、定理、公式等, 这些知识点并不是简单堆砌在教科书和文献中的, 它们是融会贯通, 有机结合在一起的。在正确理解公式、定理的基础上, 更重要的就是灵活运用它们, 试题中有很多热点集中于此。例如, 1998 年数学一(第九题)、数学二(第八题)、数学三(第六题)是分别应用罗尔定理、柯西中值定理、拉格朗日中值定理的证明题, 都是考查重要定理的题目; 再如 2001 年数学三(第七题)考查的是积分中值定理、罗尔定理。特别值得一提的是 2000 年数学一、二、三的一道相同证明题:

设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $\int_0^\pi f(x) dx = 0$, $\int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$, 试证: 在 $(0, \pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2 , 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$ 。

这道题普遍得分较低, 它涉及了函数零点定理、罗尔定理等重要定理, 有一定难度。因此, 灵活运用定理、公式解题(尤其是证明题)是颇具难度的, 需要大量的思考、练习和归纳总结。

三、试题中有很多题目是考查考生运用数学知识, 建立简单数学模型、解决实际问题的能力。数学的理论性很强, 但在实际中有广泛的应用, 提高运用数学工具解决实际问题的能力, 应引起考生的足够重视。近几年的试题中明显反映出考查这一方面的分量在不断加强。具体而言, 这些应用性题目包括了几何、物理、经济以及其他社会生活中的相关问题。例如: 1998 年数学一(第五题)、数学二(第七题)求测量仪器的下沉深度与速度的关系, 数学三(第五题)求新酒窖藏多少年后出售总收入的现值最大; 1999 年数学一(第七题)、数学二(第六题)求抓斗提升污泥做多少功, 数学三(第五题)求生产某产品的投入总费用最小; 2000 年数学一(第八题)求球体的重心坐标, 数学二(第七题)求经过多少年湖泊中污染物的治理达标, 数学三(第五题)求产品销售价格使利润取最大值; 2001 年数学一(第八题)、数学二(第九题)求雪堆全部融化所需时间, 数学三(第六题)求面积最大值; 2002 年数学二(第七题)求闸门矩形部分的高, 等等, 都是和实际问题相关的题目。

四、综合性题目的考查。如前文所述, 数学中的知识点并非孤立存在, 彼此之间有着千丝万缕的联系。试题中出现的综合性题目, 要求考生有较强的综合能力, 而不是仅仅局限于某些方面。例如 1998 年数学一(第一题的(4)):

设矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 是满秩的, 讨论两直线

$$\frac{x-a_3}{a_1-a_2} = \frac{y-b_3}{b_1-b_2} = \frac{z-c_3}{c_1-c_2} \quad \text{与} \quad \frac{x-a_1}{a_2-a_3} = \frac{y-b_1}{b_2-b_3} = \frac{z-c_1}{c_2-c_3}$$

的关系就是空间解析几何与线性代数的综合题;又如 1999 年数学三(第一题的(5)):

设随机变量 $X_{ij}(i, j=1, 2, \dots, n; n \geq 2)$ 独立同分布, $E(X_{ij})=2$, 求行列式

$$Y = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{vmatrix}$$

的数学期望 $E(Y)$, 这是线性代数与概率论的综合题。

【全国硕士研究生入学考试(数学)的复习】

在明确了考试的性质、内容和要求之后,就是长期的分阶段、分层次的复习备考过程。结合数学考试的特点,制定切实可行的复习计划是必要的。如前文所涉及的无论对考试大纲的了解还是对试题精髓的掌握,一言以蔽之,就是打好基础,提高能力。数学考试的三个主要组成部分:高等数学、线性代数、概率论,在大学本科的课程设置里,基本都是分布在大学一、二年级中来学习,到本科毕业前夕参加考研时已相隔甚远,因此第一阶段宜从基础入手,将教材、课本系统地进行复习。切不可轻视这一步,因为这一步是奠基性的工作,后续步骤都是以此为出发点的。当然,复习教材不同于大学一、二年级时学习新课,无须面面俱到,只需依据大纲所列内容全面复习,大纲不要求的内容不必过多纠缠。复习教材过程中,除了书本知识的重新熟悉外,可以适当做一些基本的习题(如书上的课后习题),意在尽早进入状态。第一阶段对于基本内容的复习结束后,就是提高能力的阶段。购买考研用书、参加考研辅导班是绝大多数考生的必经之路。学好数学很关键的一点就是多做习题,但是考研参考书、习题集却并非多多益善。当前市面上此类书籍可谓多如牛毛,很容易使人无所适从。就编者看来,好的复习用书不外乎满足以下两点要求:一是紧扣考研这一主题;二是难度适中,不宜太难或太易。考生需多了解信息,仔细甄别选择。至于考研辅导班的选择,按大众心理,所谓名师讲授的辅导班当为首选,但要与自己的实际情况、时间安排相协调,毕竟,辅导班的作用是辅助性的,不可过分依赖,因为知识的消化、能力的提高更主要来自于考生自己的学习和锻炼。总而言之,提高阶段需要考生在物质、精力和时间上大量投入。在临考之前的一段时间里,考生应脱身于题海苦战,以归纳整理、查缺补漏为主要工作,为了进入应试状态,可合理安排模拟自测,时间及强度因人而异。

【临场经验与技巧】

硕士研究生入学考试是高水平的选拔考试,竞争激烈,关乎考生前途,紧张在所难免。考生应有充分心理准备,不可过分怯场,要相信自己的水平。上了考场,困难必定存在,考生应摆正心态,切忌一遇不顺就惊慌失措以至影响后面的考试,更不能轻言放弃。就数学考试而言,历年的单科分数线在 50~55 分之间,最低时(1998 年)仅 40 多分,所以遇到不会做的题目时,万不可放弃希望,应避重就轻,将相对较易题目的分数拿到手,做到不该失分的题不失分。真正的难题对所有人都是有难度的,况且评分是按步给分,能够做对多少就做多少,完全无把握的题目可以列出相关的公式、定理。整个考试的过程中,对于时间的分配要得当,尤其对于完

全没有思路的题目要敢于舍弃,以尽可能留出时间争取在其他题目上多拿分或不失分。总之,考场上只要不躁不慌,充分发挥自己的水平,就一定能取得满意的成绩。

最后,本丛书编者衷心祝愿广大考生在复习备考过程中百尺竿头更进一步,以优异的成绩跻身研究生行列。

2010 年全国硕士研究生入学统一考试 数学二试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上)

(1) 函数 $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点数为().

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(2) 设 y_1, y_2 是一阶非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个特解,若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该方程的解, $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解,则().

- (A) $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$ (B) $\lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$
(C) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}$ (D) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$

(3) 曲线 $y = x^2$ 与曲线 $y = a \ln x (a \neq 0)$ 相切,则 $a =$ ().

- (A) $4e$ (B) $3e$ (C) $2e$ (D) e

(4) 设 m, n 是正整数,则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 的收敛性().

- (A) 仅与 m 的取值有关 (B) 仅与 n 有关
(C) 与 m, n 取值都有关 (D) 与 m, n 取值都无关

(5) 设函数 $z = z(x, y)$, 由方程确定 $F(\frac{y}{x}, \frac{z}{x} = 0)$, 其中 F 为可微函数, 且 $F'_2 \neq 0$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ ().

- (A) x (B) z (C) $-x$ (D) $-z$

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} =$ ().

- (A) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$ (B) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$
(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$ (D) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$

(7) 设向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 下列命题正确的是().

- (A) 若向量组 I 线性无关, 则 $r \leq s$ (B) 若向量组 I 线性相关, 则 $r > s$
(C) 若向量组 II 线性无关, 则 $r \leq s$ (D) 若向量组 II 线性相关, 则 $r > s$

(8) 设 A 为四阶实对称矩阵, 且 $A^2 + A = \mathbf{0}$, 若 A 的秩为 3, 则 A 相似于().

$$(A) \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$(B) \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$(C) \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$(D) \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

二、填空题: (9~14, 每小题4分, 共24分, 请将答案写在答题纸指定位置上)

(9) 三阶常系数线性齐次微分方程 $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 曲线 $y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$ 渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 函数 $y = \ln(1 - 2x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 当 $0 \leq \theta \leq \pi$ 时, 对数螺线 $r = e^\theta$ 的弧长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 已知一个长方形的长 l 以 2cm/s 的速率增加, 宽 w 以 3cm/s 的速率增加, 则当 $l = 12\text{cm}$, $w = 5\text{cm}$ 时, 它的对解线增加速率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 设 A, B 为三阶矩阵, 且 $|A| = 3, |B| = 2, |A^{-1} + B| = 2$, 则 $|A + B^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题 (15~23 小题, 共94分, 请将解答写在答题纸指定的位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15) (本题满分10分)

求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t} dt$ 的单调区间与极值.

(16) (本题满分10分)

(I) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 |\ln t| t^n dt$ ($n = 1, 2, \dots$) 的大小, 说明理由;

(II) 设 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ ($n = 1, 2, \dots$), 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

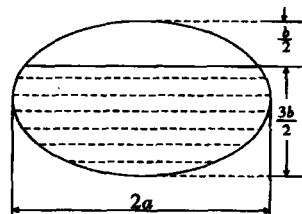
(17) (本题满分11分)

设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = \psi(t) \end{cases}$ ($t > -1$) 所确定, 其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数,

且 $\psi(1) = \frac{5}{2}, \psi'(1) = 6$, 已知 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}$, 求函数 $\psi(t)$.

(18) (本题满分10分)

一个高为1的柱体形贮油罐, 底面是长轴为 $2a$, 短轴为 $2b$ 的椭圆, 现将贮油罐平放, 当油罐中油面高度为 $\frac{3}{2}b$ 时 (如图), 计算油的质量. (长度单位为 m , 质量单位为 kg , 油的密度 (ρ) 的单位为 kg/m^3)



(19)(本题满分11分)

设函数 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,且满足等式 $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

确定 a,b 的值,使等式在变换 $\xi=x+ay, \eta=x+by$ 下化简为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=0$.

(20)(本题满分10分)

计算二重积分 $I = \iint_D r^2 \sin\theta \sqrt{1-r^2 \cos 2\theta} dr d\theta$,

其中 $D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sec\theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$.

(21)(本题满分10分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续,在开区间 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0, f(1)+\frac{1}{3}$,

证明:存在 $\xi \in (0, \frac{1}{2}), \eta \in (\frac{1}{2}, 1)$,使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

(22)(本题满分11分)

设 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

已知线性方程组 $Ax=b$ 存在2个不同的解,

(I)求 λ, a ,

(II)求方程组 $Ax=b$ 的通解.

(23)(本题满分11分)

设 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{bmatrix}$, 正交矩阵 Q 使得 $Q^T A Q$ 为对角矩阵,若 Q 的第一列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2,$

$1)^T$,求 a, Q .

2009 年全国硕士研究生入学考试 数学二试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 函数 $f(x) = \frac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为().

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 无穷多个

(2) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 为等价无穷小,则().

- (A) $a=1, b=-1/6$ (B) $a=1, b=1/6$
(C) $a=-1, b=-1/6$ (D) $a=-1, b=1/6$

(3) 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz = xdx + ydy$, 则点 $(0,0)$ ().

- (A) 不是 $f(x,y)$ 的连续点 (B) 不是 $f(x,y)$ 的极值点
(C) 是 $f(x,y)$ 的极大值点 (D) 是 $f(x,y)$ 的极小值点

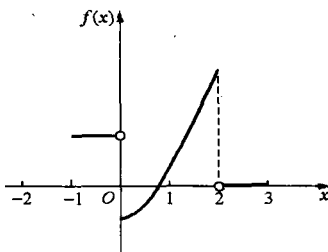
(4) 设函数 $f(x,y)$ 连续, 则 $\int_1^2 dx \int_x^2 f(x,y) dy + \int_1^2 dy \int_y^{4-y} f(x,y) dx = ()$.

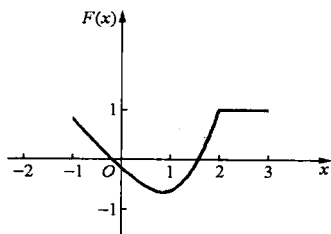
- (A) $\int_1^2 dx \int_1^{4-x} f(x,y) dy$ (B) $\int_1^2 dx \int_x^{4-x} f(x,y) dy$
(C) $\int_1^2 dy \int_1^{4-y} f(x,y) dx$ (D) $\int_1^2 dy \int_x^{4-x} f(x,y) dx$

(5) 若 $f''(x)$ 不变号, 且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 上的曲率圆为 $x^2 + y^2 = 2$, 则 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内().

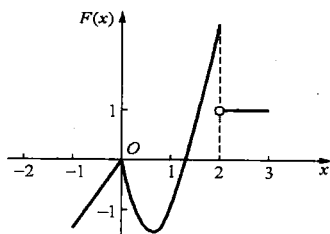
- (A) 有极值点, 无零点 (B) 无极值点, 有零点
(C) 有极值点, 有零点 (D) 无极值点, 无零点

(6) 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形如下图所示, 则函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 的图形为().

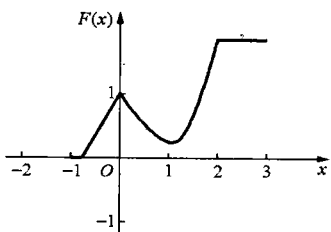




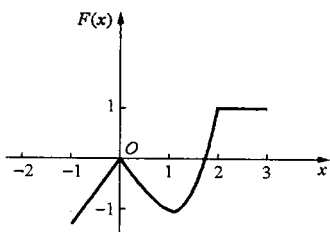
(A)



(B)



(C)



(D)

(7) 设 A, B 均为二阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵. 若 $|A| = 2, |B| = 3$, 则分块矩阵 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为().

(A) $\begin{bmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{bmatrix}$

(8) 设 A, P 均为三阶矩阵, P^T 为 P 的转置矩阵, 且 $P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. 若 $P = (a_1, a_2, a_3)$, $Q = (a_1 + a_2, a_2, a_3)$, 则 $Q^T A Q$ 为().

(A) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

二、填空题(9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上)

(9) 曲线 $\begin{cases} x = \int_0^{1-t} e^{-u^2} du \\ y = t^2 \ln(2 - t^2) \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 处的切线方程为_____.

(10) 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|} dx = 1$, 则 $k =$ _____.

(11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{-x} \sin nx dx =$ _____.

(12) 设 $y = y(x)$ 是由方程 $xy + e^y = x + 1$ 确定的隐函数, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} =$ _____.

(13) 函数 $y = x^{2x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上的最小值为_____.

(14) 设 α, β 为三维列向量, β^T 为 β 的转置. 若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $\beta^T \alpha$ = _____.

三、解答题(15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15) (本题满分 9 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x}$.

(16) (本题满分 10 分) 计算不定积分 $\int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx \quad (x > 0)$.

(17) (本题满分 10 分) 设 $z = f(x+y, x-y, xy)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 dz 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(18) (本题满分 10 分) 设非负数函数 $y = y(x) (x \geq 0)$ 满足微分方程 $xy'' - y' + 2 = 0$, 当曲线 $y = y(x)$ 过原点时, 其与直线 $x = 1$ 及 $y = 0$ 围成平面区域 D 的面积为 2, 求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

(19) (本题满分 10 分) 计算二重积分 $\iint_D (x-y) dx dy$, 其中

$$D = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, y \geq x\}.$$

(20) (本题满分 12 分) 设 $y = y(x)$ 是区间 $(-\pi, \pi)$ 内过点 $\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$ 的光滑曲线, 当 $-\pi < x < 0$ 时, 曲线上任一点处的法线都过原点, 当 $0 \leq x < \pi$ 时, 函数 $y'' + y + x = 0$, 求 $y(x)$ 的表达式.

(21) (本题满分 11 分)

(I) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$;

(II) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 在 $(0, \delta) (\delta > 0)$ 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$.

(22) (本题满分 11 分) 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}, \quad \xi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(I) 求满足 $A\xi_2 = \xi_1, A^2\xi_3 = \xi_1$ 的所有向量 ξ_2, ξ_3 ;

(II) 对(I)中的任意向量 ξ_2, ξ_3 , 证明 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

(23) (本题满分 11 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

(I) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(II) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值.