有效教·学·考丛书——有效学习系列

依据 新一轮基础教育课程改革所倡导的“有效教学”理念
教育部最新颁布的普通高中“学科课程标准”

学 有效 考 教

北京四中 黄冈中学 上海中学 苏州中学 扬州中学 联合编写

高二数学

有效学习

（第一次修订版）

促进学习方式的变革
使学习过程最优化和学习效果最大化

学科主编：吕宝兴
本册主编：黄 华

中国轻工业出版社

有效教·学·考丛书——有效学习系列

高二数学有效学习

（第一次修订版）

学科主编　吕宝兴
本册主编　黄　华

中国轻工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

高二数学有效学习／吕宝兴主编. —修订版. —北京：中国轻工业出版社，2004.8
（有效教·学·考丛书. 有效学习系列）
ISBN 7-5019-4437-7

Ⅰ.高… Ⅱ.吕… Ⅲ.数学课－高中－教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 069554 号

总 策 划：石 铁
策划编辑：王大凯，张凌云
责任编辑：朱 玲 张凌云 责任终审：孟寿萱
版式设计：史春雨 责任监印：刘智颖

出版发行：中国轻工业出版社（北京东长安街 6 号，邮编：100740）
印 刷：北京天竺颖华印刷厂
经 销：各地新华书店
版 次：2003 年 10 月第 1 版 2004 年 8 月修订第 2 版 2004 年 8 月第 2 次印刷
开 本：787 × 1092 1/16 印张：17.25
字 数：330 千字
书 号：ISBN 7-5019-4437-7/G · 469 定价：20.00 元
咨询电话：010-65262933
发行电话：010-88390721，88390722
网 址：http://www.chlip.com.cn
E-mail：club@chlip.com.cn
如发现图书残缺请直接与我社读者服务部（邮购）联系调换

数学学科

学科主编：吕宝兴

本册主编：黄　华

编　者：冯　唯　李文邗　邱　雁　况亦军　郑跃星
徐岳灿　高在峰　曹土清　黄　华　魏明志

丛书修订说明

“有效教学”理念认为，教学与学习是否“有效”，最终主要是通过学生有无获得进步或发展来判定的。因此，本丛书在对教师教学方式给予指导的同时，尤其注重引导学生在自主学习、研究性学习的过程中积极思考，主动构建适合自己的学习方式和策略，实现有效学习。

《有效教·学·考》丛书出版以来，在教学领域和教育图书市场产生了一定的影响。本次修订广泛征求了全国近百名特、高级教师的意见，内容与教育部研制的普通高中课程方案以及各学科课程标准保持一致，成为全面贯彻和体现新课程基本要求的新型教育图书。丛书的主要特色如下：

立体涵盖了教学、学习、测试及复习四个维度的内容

“有效教学”系列和“有效学习”系列互相配套，互为补充。“有效测试”系列已为北京四中、黄冈中学、南京师范大学附中及陕西师范大学附中等全国上百所中学选用。新增的“有效复习”系列以考点为细胞，兼顾知识网络，抓住知识的自然联系，为学生展现最简洁、最科学的知识体系。

系统设置了实用、有效的特色栏目

本次修订对丛书栏目进行了调整，使各个栏目更为实用和有效。“有效学习”系列中的“有效学习指导”，侧重于对学习方法的指导与点拨，“典型例题解析”语言简洁、思路清晰，易于被学生接受；“有效复习”系列中的各个栏目，打破了章节及知识块顺序，立足考点，准确地划分各考点所包含的知识点，使学生在解决问题的同时，能迅速提取知识、运用能力，即知识点过关、考点过硬。

精心编制了不同难易度的特色测试题

本次修订后，例题和习题更加新颖，能够体现各学科教学改革的最新趋势和高考命题变化规律。同时更为注意区分测试题的难易度，以适合不同基础的学生使用。

书中难免有不妥或错误之处，恳请读者批评指正，以便下一次修订时改正。

《有效教·学·考》丛书编委会

2004年6月

序　言

（第一次修订版）

本书是根据“有效教学”的理念，以最新的《课程标准》为指导思想，以人民教育出版社《全日制普通高中教科书》的《数学》教材为蓝本编写与修订的。

为了提高数学学习的有效性，本书强调知识的系统性和连贯性，强调基本概念、基本原理对数学知识的统领作用。在此基础上，本书同样重视数学学习中所必需的一些基本技能的训练和思考方法的培养。对于每一章的知识与高考的相关性也在本书的考虑范围之内。

本书难度适中，基本上与教材进度同步，可以作为使用该教材的学生和教师的同步教学及学习用书，也可以作为使用其他教材师生的参考用书。考虑到当前课程改革的发展趋势，本书的例题和习题中都配备了一定数量的新题型，以注重学习能力、探究能力、应用能力、创新能力等数学实践能力的培养和训练。所以本书具有实用性、新型性和一定的前瞻性。

本书各章按知识点分节编写，每节都包括“知识结构网络”、“有效学习指导”、“典型例题解析”、“有效测试”等四个基本栏目。

“知识结构网络”对这一节的内容进行概括提要，指出各个知识点之间的相互联系和本节学习的重点难点。通过知识梳理，使学生易学易记，对这一节的知识框架、内在联系有一个较好的认识和理解。

“有效学习指导”重在概念辨析、基本技能培养、易错易误点的纠正、新知识的掌握等，这个栏目告诉同学们如何有效地学习这一节内容，哪些是要点？哪些是关键？如何把握重点？如何解决难点？

“典型例题解析”中的例题除了具有典型性和代表性外，还具有一定的综合度和新型性。在这里，学习型、探究型、应用型和创新型等能力型的题目会占有一定比例。我们相信，通过这些例题的讲解，学生对于所学知识的巩固和运用、数学实践能力的培养、数学素养的提高都会有所帮助。

“有效测试”是本书作者为配合这一节内容而精心编拟的复习自测题，约为一节课时的题量。通过自测，学生可以大致衡量自己对这一节数学知识的掌握程度。

围绕本章的内容，每章后另附了三个栏目：“考点精析”、“拓展资料”和“本章测试”。其中“考点精析”是历年全国各地高考的经典试题或作者自编的富有代表性试题的分析与解答，以使学生了解本章内容与高考的相关性，本次修订增加了各地的最新考题；“本章测试”一般分A、B两卷，每卷约为两课时的题量，试题在重视知识考查的同时也重视能力的考查。“拓展资料”是课外阅读内容，或是与本章内容相关的背景资料、历史沿革，或是最新动态、人物介绍，或是知识拓展等。用以扩充学生的视野，提高学习兴趣。书后附有本书所有测试习题的答案、简单提示或简解。

《全日制高级中学数学教学大纲》指出：数学知识是“学习和研究现代科学的基础”，数学教学“在培养和提高思维能力方面发挥着特有的作用”，数学“已成为现代文化的重要组成部分”。可见，高中数学是每一个准备进一步深造的学生的必备知识，数学是学习其他科学知识的基础，是人们认识世界和改造世界的基本工具。学习数学，对于优化一个人的思维品质，

提高一个人的思维能力起着其他学科无法替代的作用，数学教育本质上是一种素质教育。数学是随着人类文明的发展而发展起来的，它是几千年来人们在生产实践和科学创新过程中高度凝炼的结晶，数学本身就是一种文化。

数学学习应摒弃那种考则学，不考则不学；有用则学，无用则不学的纯粹为考试而学的学习方法。不重视数学的基本概念、基本原理和基本技能的学习和训练，而是热衷于各种技巧和方法，把数学作为方法论来学习是对数学的曲解。追踪热点，猜测考题，临时突击，重点突破，往往事倍功半，也不是学习数学的好方法。数学的知识是互相联系、互相渗透的，它需要持之以恒的艰苦努力，也需要有正确的学习方法。希望本书在提高数学学习的有效性方面能带给你一些有益的启示和帮助。

《高中数学有效学习》丛书共分三册，高一分册，高二分册，高三分册。本书是高二分册，包括“不等式”、“直线和圆的方程”、“圆锥曲线方程”、“直线、平面、简单几何体”、“排列、组合和概率”五章。其中“直线、平面、简单几何体”这一章的内容A、B册有较大差异，本书同时兼顾A、B两册读者的需要，对于仅限B册读者使用的地方都用“*”号作了标记。本册由黄华老师（上海师大附中数学教研组组长，高级教师，上海市二期课改中心组成员）主编。其中“不等式”和“排列、组合和概率”两章由黄华老师编写，“直线、平面、简单几何体”由冯唯老师编写，“直线和圆的方程”由曹土清老师编写，圆锥曲线方程由高在峰老师编写。

本书这次修订出版，对初版的不足之处作了必要的修订，结合当前课程改革的发展趋势作了适当的增删。但是由于本书从数学学习的有效性出发进行编写，是一种新的尝试，所以还是会有不当之处，欢迎不吝赐教。

数学学科主编

2004年7月

目 录

第六章 不等式

第一节 不等式的性质

一、知识结构网络

(一)内容提要

在学习了一元一次不等式、一元二次不等式等知识的基础上，进一步学习不等式的性质及证明。不等式的性质是学习不等式的证明和解不等式的基础，不仅要掌握不等式的性质，而且要理解不等式性质的证明并会运用比较法、综合法及分析法证明不等式。掌握两个算术平均数与几何平均数的关系及简单的应用。

不等式的性质 主要有：

1. 基本原理

(1)对称性：$a>b \Leftrightarrow b<a$

$a<b \Leftrightarrow b>a$

(2)传递性：$\left.\begin{matrix} a>b \\ b>c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a>c$

2. 运算性质

(1)可加性：$a>b \Rightarrow a+c>b+c$

(2)加法性质：$\left.\begin{matrix} a>b \\ c>d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+c>b+d$

(3)单调性：$\left.\begin{matrix} a>b \\ c>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac>bc$

$\left.\begin{matrix} a>b \\ c<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac<bc$

(4)乘法性质：$\left.\begin{matrix} a>b>0 \\ c>d>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac>bd$

(5)乘方性质：$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n$ $(n\in \mathbf{N},\ n>1)$

(6)开方性质：$a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ $(n\in \mathbf{N},\ n>1)$

3. 重要不等式

(1) $a、b\in \mathbf{R} \Rightarrow a^2+b^2\geqslant 2ab$ （当且仅当 $a=b$ 时取等号）

(2) $a、b\in \mathbf{R}^+ \Rightarrow \frac{a+b}{2}\geqslant \sqrt{ab}$ （当且仅当 $a=b$ 时取等号）

(二)重点难点

本节的重点是不等式的性质，难点是不等式的证明及算术平均数不小于几何平均数定理的应用。只有充分理解不等式的性质，掌握不等式性质的证明，才可能进一步掌握不等式的证明。

二、有效学习指导

(一)学法导引

1. 掌握不等式性质的证明

课本中所给出的不等式的性质是需要证明的,证明的依据是:

$a>b\Leftrightarrow a-b>0$

$a=b\Leftrightarrow a-b=0$

$a<b\Leftrightarrow a-b<0$

对于两个实数,它们必是三者之一;另外,实数运算的符号性质也是证明不等式性质的重要依据之一。而根据两个实数差的符号来判断两实数的大小是实数比大小的基本方法,这是本节的出发点,式的比较也是用此基本方法。

2. 正确理解和应用不等式的性质,并注意推理过程的严密性

不等式与等式既有相同的性质,如传递性、移项等,但也还有许多不同的性质,如:等式的两边同乘以一个实数其结果仍然是等式,一个不等式的两边同乘以一个实数则不等式有可能改变方向,也有可能不等式不成立。如:$3>2$,两边同乘以0,则$0>0$不成立。

对于加法性质$\left.\begin{matrix}a>b\\c>d\end{matrix}\right\}\Rightarrow a+c>b+d$,我们可将其翻译成语言:两个同向不等式可相加,其结果与原不等式同向。

但对于乘法性质$\left.\begin{matrix}a>b>0\\c>d>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow ac>bd$,则要注意其条件,两组不等式都是正的,才可运用。

3. 掌握不等式证明的基本方法,注意运用重要不等式的条件

证明不等式的最基本、最重要的方法是比较法,而在不等式性质的证明中,大都使用此法。它的步骤是:作差—变形—判断符号。变形的目的是有利于判断符号,因此常用配方法、因式分解等,使我们对作差的结果能作出判断。

(二)疑难剖析

例1. 证明:$\left.\begin{matrix}a>b>0\\c>d>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow ac>bd$。

【证明】 方法一:$\because a>b,\ c>0,\ \therefore ac>bc$

又$\because c>d,\ b>0\ \therefore bc>bd$

据传递性,可得$ac>bd$

方法二:$ac-bd=(ac-bc)+(bc-bd)=c(a-b)+b(c-d)$

$\because c>0,\ a>b\Rightarrow c(a-b)>0\qquad \because b>0,\ c>d\Rightarrow b(c-d)>0$

$\therefore c(a-b)+b(c-d)>0$

$\therefore ac > bd$

例 2. 判断下列各命题的真假,并说明理由:

(1) $ac > bc \Rightarrow a > b$;

(2) $a > b,\ ac > bc \Rightarrow c > 0$;

(3) $\frac{1}{a} < 1 \Leftrightarrow a > 1$;

(4) $a > b,\ c > d \Rightarrow a - c > b - d$;

(5) $a > b > 0,\ c > d \Rightarrow ac > bd$;

(6) $a > b > 0,\ c \geqslant 0,\ c > d \Rightarrow ac > bd$;

(7) $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$。

【剖析】 (1)命题不正确。取 $a = 1, b = 2, c = -2$,显然 $ac > bc$,但 $a < b$;

(2)命题正确。由 $a > b$,得 $a - b > 0$;又 $ac > bc$,可知 $c(a - b) > 0$,则 $c > 0$;

(3)命题不正确。取 $a = -1$,即可得;

(4)命题不正确。取 $a = 3,\ b = 2,\ c = 2,\ d = 1$,则 $a - c = b - d = 1$;

(5)命题不正确。取 $a = 3,\ b = 1,\ c = -1,\ d = -2$,则 $ac = -3 < bd = -2$;

(6)命题正确。若 $d < 0$,则因为 $a > b > 0,\ c \geqslant 0 > d$,所以 $ac > 0,\ bd < 0$,所以 $ac > bd$;若 $d \geqslant 0$,则因为 $c > d \geqslant 0$,由不等式乘法性质,可得,$ac > bd$;

(7)命题不正确。取 $a = 1,\ b = -2$,则 $\frac{1}{a} = 1 > \frac{1}{b} = -\frac{1}{2}$。

【说明】 1. 证明命题不正确的方法是举反例

有些同学不知道说明命题不正确的方法是举出反例,还有的同学知道举反例,但不知如何找出反例,这需要学会分析。对第(1)题,通过观察可知,当 $c > 0$ 时,命题是正确的,故举反例时 c 取负值即可。第(3)题,由 $a > 1$ 可得 $\frac{1}{a} < 1$,但反之不一定,举反例时 a 只需取负数即可。第(5)题与不等式的乘法性质相比,少了 c、d 都为正数的条件,不一定能成立,所以举反例 c、d 可能的取值是一正一负,或两者都为负。在 c 为正、d 为负的条件下,命题正确,故举反例只需举两者都为负的情况。而第(7)题,将结论通分 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab} < 0$,而 $b - a < 0$,故要使结论的不等式不成立,只需 a、b 异号,所以 $a = 1,\ b = -2$,即可说明命题不正确。

2. 熟记不等式的性质,不要乱添性质

有些同学了解了不等式的加法性质、乘法性质后,想当然的将其用到了减法和除法上。同向不等式可相加,但同向不等式不可相减,只有异向不等式才可相减;除法更要注意条件。其实不等式的减法和除法都应化为不等式的加法和乘法来做,这不仅仅是为了减轻记忆负担,而是为了要掌握数学的思想方法,即尽可能的将未知的问题化为已知和已解决的问题。如 $a > b > 0, c > d > 0$,对于第二个不等式,两边同乘以 $\frac{1}{cd} > 0$,则 $\frac{1}{d} > \frac{1}{c} > 0$,由乘法性质得 $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$。另外,只有课本中的定理和黑体字才可用于证题。自己推出的不等式的结论及练习与习题中出

现的不等式不能直接作为证题引用的条件。

3. 注意不等式的等价变形

不等式与等式有相类似的特性，如移项、可加性等，因为它们是不等式的等价变形；但更要注意它们的区别，特别是对乘法，即对于不等式两边乘以同一个数（或两边除以同一个数）时，一定要考虑这个数的符号，否则对不等式的变形可能不是等价变形，从而导致错误，如第(1)、(3)、(5)、(7)题，错误的原因都是如此。

三、典型例题解析

例 1. 已知 $m>n>0$，比较 $2^m+\frac{1}{2^m}$ 与 $2^n+\frac{1}{2^n}$ 的大小。

【思路分析】 由于给出的是和的形式，故作差比较。

【解】 $2^m+\frac{1}{2^m}-(2^n+\frac{1}{2^n})=2^m-2^n+\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^n}=(2^m-2^n)(1-\frac{1}{2^m\cdot 2^n})=(2^m-2^n)(\frac{2^m2^n-1}{2^m2^n})$

$\because m>n>0 \qquad \therefore 2^m>2^n>1, 2^m2^n>1$

$\therefore (2^m-2^n)(\frac{2^m2^n-1}{2^m2^n})>0 \qquad \therefore 2^m+\frac{1}{2^m}>2^n+\frac{1}{2^n}$

例 2. 已知 a、b 为正整数，比较 $\sqrt{2}$、$\frac{a}{b}$、$\frac{2a+b}{a+b}$ 三数的大小，并从小到大排列，求出离中间数较近的数。

【思路分析】 比较三数的大小，应作差比较，但 $\frac{a}{b}$、$\frac{2a+b}{a+b}$ 含有字母，因此需讨论，可以对 $\frac{a}{b}$ 讨论，也可对 $\frac{2a+b}{a+b}$ 讨论，应对较简单的讨论，所以这里对 $\frac{a}{b}$ 进行讨论，分界点是 $\sqrt{2}$。

若中间数是 A，另两个数是 b、c，只需比较 $|b-A|$ 与 $|c-A|$ 的大小即可，若 $|b-A|<|c-A|$，则数 b 离 A 较近，若 $|b-A|>|c-A|$，则数 c 离 A 较近。

【解】 $\because a、b\in \mathbf{N}^* \qquad \therefore \frac{a}{b}\neq\sqrt{2}$

若 $\frac{a}{b}>\sqrt{2}$，则 $\frac{2a+b}{a+b}=1+\frac{a}{a+b}=1+\frac{1}{1+\frac{b}{a}}<1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}$

所以 $\frac{2a+b}{a+b}<\sqrt{2}<\frac{a}{b}$

若 $\frac{a}{b}<\sqrt{2}$，则 $\frac{2a+b}{a+b}=1+\frac{a}{a+b}=1+\frac{1}{1+\frac{b}{a}}>1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}$

所以 $\frac{a}{b}<\sqrt{2}<\frac{2a+b}{a+b}$

显然中间数是 $\sqrt{2}$，若 $\frac{a}{b}>\sqrt{2}$，则 $\sqrt{2}-\frac{2a+b}{a+b}-(\frac{a}{b}-\sqrt{2})=\sqrt{2}-\frac{2(a+b)-b}{a+b}-(\frac{a}{b}-$

$\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 2 + \dfrac{1}{\frac{a}{b}+1} - (\frac{a}{b} - \sqrt{2}) < \sqrt{2} - 2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = 2\sqrt{2} - 3 < 0$(因为$\frac{a}{b} > \sqrt{2}$，所以 $\frac{a}{b} - \sqrt{2} < 0$，$\dfrac{1}{\frac{a}{b}+1} < \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$)，所以$\sqrt{2} - \frac{2a+b}{a+b} < \frac{a}{b} - \sqrt{2}$，即$\frac{2a+b}{a+b}$离$\sqrt{2}$较近。同理，当 $\frac{a}{b} < \sqrt{2}$ 时，仍然是$\frac{2a+b}{a+b}$离$\sqrt{2}$较近。因此$\frac{2a+b}{a+b}$离$\sqrt{2}$较近。

例 3. 设 a、b、c、d 均为正数，且 $a \neq b$，$c + d = 1$，比较$\frac{1}{ac+bd}$与$(2-a)c+(2-b)d$的大小。

【思路分析】 比较两数的大小一般应作差比较。按照"作差—变形—判断"的模式，本题应在变形上下功夫，并注意在变形时用到本题的条件 $c + d = 1$。

【解】 设 $A = \frac{1}{ac+bd}$，$B = (2-a)c + (2-b)d$，$\because c + d = 1$，$\therefore 2c + 2d = 2$，$A - B = \frac{1}{ac+bd} - [(2-a)c + (2-b)d] = \frac{1}{ac+bd} - (2c+2d) + ac + bd = \frac{1}{ac+bd} + ac + bd - 2$

$\because a$、b、c、d 均为正数

$\therefore \frac{1}{ac+bd} + (ac+bd) \geqslant 2$(当且仅当 $ac + bd = 1$ 且 $c + d = 1$ 时，等号成立)

$\therefore \frac{1}{ac+bd} + ac + bd - 2 \geqslant 0$，$A \geqslant B$，因此$\frac{1}{ac+bd} \geqslant (2-a)c + (2-b)d$

【说明】 本题若作差后，也可通分得$\frac{1}{ac+bd} + ac + bd - 2 = \frac{1+(ac+bd)^2 - 2(ac+bd)}{ac+bd} = \frac{[(ac+bd)-1]^2}{ac+bd} \geqslant 0$，同样可得结果。所以变形时一定要注意条件，并对变形后的结果要进行观察，观察后才会考虑是使用基本不等式还是通分判断。本题的难点在于在变形的过程中运用已知条件，而不是直接通分。

例 4. 已知 x、y、z 为互不相等的正数，求证：

$\lg\frac{x+y}{2} + \lg\frac{y+z}{2} + \lg\frac{z+x}{2} > \lg x + \lg y + \lg z$。

【思路分析】 由于不等式的两边都有对数符号，故应先考虑去除符号 lg，然后再利用分析法和综合法来证。

【证明】 方法一：要证原不等式，只需证 $\lg\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8} > \lg xyz$，由对数函数的性质知，只需证$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8} > xyz$

$\because \frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy} > 0$，$\frac{y+z}{2} \geqslant \sqrt{yz} > 0$，$\frac{z+x}{2} \geqslant \sqrt{zx} > 0$，利用不等式的性质，可得 $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8} \geqslant xyz$，(当且仅当 $x=y=z$ 时，等号成立)，但已知 x、y、z 是互不相等的正数，故等号不成立，即 $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8} > xyz$

所以 $\lg \frac{x+y}{2} + \lg \frac{y+z}{2} + \lg \frac{z+x}{2} > \lg x + \lg y + \lg z$

方法二：要证原不等式，只需证 $\lg \frac{x+y}{2} - \lg x + \lg \frac{y+z}{2} - \lg y + \lg \frac{z+x}{2} - \lg z > 0$，只需证 $\lg \frac{x+y}{2x} + \lg \frac{y+z}{2y} + \lg \frac{z+x}{2z} > 0$，利用对数性质可知，只需证明 $\frac{x+y}{2x} \cdot \frac{y+z}{2y} \cdot \frac{z+x}{2z} > 1$

$\because x+y \geqslant 2\sqrt{xy} > 0, y+z \geqslant 2\sqrt{yz} > 0, z+x \geqslant 2\sqrt{zx} > 0$，利用不等式的性质，得

$\therefore \frac{x+y}{2x} \cdot \frac{y+z}{2y} \cdot \frac{z+x}{2z} \geqslant 1$。因为 x、y、z 是互不相等的三个正数，所以等号不成立

$\therefore \frac{x+y}{2x} \cdot \frac{y+z}{2y} \cdot \frac{z+x}{2z} > 1$

因此 $\lg \frac{x+y}{2} + \lg \frac{y+z}{2} + \lg \frac{z+x}{2} > \lg x + \lg y + \lg z$

【说明】 本题是否可推广呢?请看下题：
设 a_1、a_2、a_3、a_4 为不全相等的正数，求证：
$\lg \frac{a_1+a_2}{2} + \lg \frac{a_2+a_3}{2} + \lg \frac{a_3+a_4}{2} + \lg \frac{a_4+a_1}{2} > \lg a_1 + \lg a_2 + \lg a_3 + \lg a_4$。

【证明】 要证原不等式，只需证 $\lg \frac{(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)(a_4+a_1)}{16} > \lg a_1 a_2 a_3 a_4$，由对数函数的性质知，只需证 $\frac{(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)(a_4+a_1)}{16} > a_1 a_2 a_3 a_4$

$\because \frac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1a_2} > 0$，$\because \frac{a_2+a_3}{2} \geqslant \sqrt{a_2a_3} > 0$，$\because \frac{a_3+a_4}{2} \geqslant \sqrt{a_3a_4} > 0$，$\because \frac{a_4+a_1}{2} \geqslant \sqrt{a_1a_4} > 0$

$\therefore \frac{(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)(a_4+a_1)}{16} \geqslant a_1 a_2 a_3 a_4$，但 a_1、a_2、a_3、a_4 为不全相等的正数，所以等号不成立，即 $\frac{(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)(a_4+a_1)}{16} > a_1 a_2 a_3 a_4$

思考一下：是否可将此题做进一步的推广呢?

例 5. 已知 a、$b \in \mathbf{R}^+$ 且 $a+b=1$
求证：$\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} \leqslant 3$

【证明】 方法一：要证原不等式，只需证：
$\sqrt{2a+1} \leqslant 3 - \sqrt{2b+1}$，显然 $3 - \sqrt{2b+1} > 0$，

只需证:$2a+1\leqslant 9+2b+1-6\sqrt{2b+1}$

只需证: $6\sqrt{2b+1}\leqslant 9+2b-2a$

$\because a=1-b$

$\therefore\ 6\sqrt{2b+1}\leqslant 9+2b-2(1-b)=7+4b$

只需证:$36(2b+1)\leqslant 49+56b+16b^2$

只需证:$16b^2-16b+13\geqslant 0$

而 $16b^2-16b+13=16(b-\frac{1}{2})^2+9>0$

$\therefore 16b^2-16b+13>0$ 成立

$\therefore$不等式得证

方法二: $\because\ \frac{(2a+1)+1}{2}\geqslant\sqrt{2a+1}$

$\frac{(2b+1)+1}{2}\geqslant\sqrt{2b+1}$

$\therefore\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}\leqslant\frac{2a+2+2b+2}{2}=\frac{2(a+b)+4}{2}=3$

$\therefore\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}\leqslant 3$

【说明】 本题方法一是用分析法证明不等式,分析法是寻找不等式成立的充分条件,而不是充要条件。另外本题不等式中等号是不成立的。更恰当的问题应是

已知 $a、b\in\mathbf{R}^+$且 $a+b=1$

求证: $\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}\leqslant 2\sqrt{2}$

同学们不妨自己证一下。

例 6. 已知 $x_1,x_2,\cdots x_8$ 均为正数,且 $x_1+x_2+\cdots+x_8=20$, $x_1x_2\cdots x_8<12$

求证:$x_1,x_2,\cdots x_8$ 中至少有一个数小于 1。

【思路分析】 对于有关"至少"的命题,往往可以用反证法。

【证明】 反证法

假设 $x_1,x_2,\cdots x_8$ 都不小于 1,那么可设 $x_i=1+y_i$(其中 $y_i\geqslant 0\quad i=1,2\cdots 8$)

$\because x_1+x_2+\cdots+x_8=8+y_1+y_2+\cdots+y_8=20$

$\therefore y_1+y_2+\cdots+y_8=12$

$x_1x_2\cdots x_8=(1+y_1)(1+y_2)\cdots(1+y_8)$

$=1+y_1+y_2+\cdots+y_8+\cdots+y_1y_2\cdots y_8$

$\geqslant 1+y_1+y_2+\cdots+y_8=13$,这与 $x_1x_2\cdots x_8<12$ 矛盾

$\therefore x_1, x_2 \cdots x_8$ 中至少有一个数小于 1

例 7. 已知：$a_n=\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}\ (n\in\mathbf{N}^*)$

证明：$\dfrac{n(n+1)}{2}<a_n<\dfrac{(n+1)^2}{2}$。

【证明】 $\because a_n=\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}>1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

又 $\because a_n=\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}<\dfrac{1+2}{2}+\dfrac{2+3}{2}+\cdots+\dfrac{n+(n+1)}{2}$

$=\dfrac{1}{2}(3+5+\cdots+2n+1)$

$=\dfrac{n(n+2)}{2}=\dfrac{n^2+2n}{2}<\dfrac{n^2+2n+1}{2}=\dfrac{(n+1)^2}{2}$

$\therefore \dfrac{n(n+1)}{2}<a_n<\dfrac{(n+1)^2}{2}$

【说明】 证明不等式也可用放大和缩小，但要注意不能放缩过头。

如：若 $a_n=\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}<\sqrt{2\times2}+\sqrt{3\times3}+\cdots+\sqrt{(n+1)(n+1)}$

$=2+3+\cdots+(n+1)=\dfrac{(n+3)n}{2}$

而 $\dfrac{(n+3)n}{2}\geqslant\dfrac{(n+1)^2}{2}$，显然放大过头了，从而不能得到证明。

四、有效测试

A 卷

(一)填空题

1. 用不等号连接：

(1) $a>0$，则 $\dfrac{b-1}{a}$ ______ $\dfrac{b-3}{a}$；

(2) x^2+3x+3 ______ $2x+1$。

2. 若 $ac^2<bc^2$，则 a、b 的大小关系是________。

3. 已知：$ab=2$，且 $a>0$，a^2+b^2 的最小值是________，此时 $a=$______，$b=$______。

4. 若 $d<c$，$a+b=c+d$，$a+d<b+c$，则 a、b、c、d 的大小关系是________。

5. 若 $a>b>0$，则 a、b、$\sqrt{ab}$、$\dfrac{a+b}{2}$ 的大小关系是________。

(二)选择题

6. 若 $0 > a > b, c^2 > d^2$,则一定正确的是(　　)

A. $bc^2 > ad^2$　　B. $bc^2 < ad^2$　　C. $ac > bd$　　D. $ad > bc$

7. 下列不等式中恒成立的是(　　)

A. 若 $a > b, c > b$,则 $a > c$　　B. 若 $a > b$,则 $ac^2 > bc^2$

C. 若 $a > -b$,则 $c + b > c - a$　　D. 若 $a > b$,则$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

8. 设 a、b、c 都为正数,则三个数 $a + \frac{1}{a}, b + \frac{1}{b}, c + \frac{1}{c}$(　　)

A. 都不大于 2　　B. 都不小于 2

C. 至少有一个不大于 2　　D. 至少有一个不小于 2

9. 已知 a、b 都为正数,则下列不等式中,不一定成立的是(　　)

A. $a + b + \frac{1}{\sqrt{ab}} \geqslant 2\sqrt{2}$　　B. $(a + b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geqslant 4$

C. $\frac{a^2 + b^2}{\sqrt{ab}} \geqslant a + b$　　D. $\frac{2ab}{a + b} \geqslant \sqrt{ab}$

10. 若 a、$b \in \mathbf{R}$,那么$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$成立的一个充分非必要条件是(　　)

A. $a > b$　　B. $ab(a - b) > 0$　　C. $a > b > 0$　　D. $a < b$

(三)解答题

11. 比较 $x^{n+1} + y^{n+1}$ 和 $x^n y + xy^n (n \in \mathbf{N}^*)$ 的大小。

12. 已知 $0 < a < b < 1$,求出 a^a、a^b、$a^{\sqrt{ab}}$、$a^{\frac{a+b}{2}}$ 中的最小数,并说明理由。

13. 已知 $a > b > 0$,求证:$\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a - b}$。

14. 求证:$\frac{1}{3} \leqslant \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \leqslant 3$。

15. 已知 $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$,求证对于任意两个不等实数 x_1、x_2,总有 $|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1|$。

B 卷

(一)填空题

1. 若 $a < 0, -1 < b < 0$,用不等号将 a、ab、ab^2 从大到小排列是 ab ab² a

2. 若 $x + y = 2$,则 $xy \leqslant$ 1 。

3. 若 $x > 0$,则$\frac{3x^2 + 2}{x}$的最小值是 2√6 。

4. 已知 $A = \frac{1}{a^2 + a + 1}, B = a^2 - a + 1$,则 A、B 的大小关系是________。

5. 若 $a > 0$ 且 $b > 0$,又有 $a + b + 2 = ab$,则 ab 的取值范围是________。

(二)选择题

6. 若角 α、β 满足 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$,则 $2\alpha - \beta$ 的取值范围是(　　)