梁　滨 主编
宋柏生 主审

高等数学试题选析

GAODENGSHUXUE SHITI XUANXI

历年试题精讲

典型习题精练

权威专家精析

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高等数学试题选析

主　编　梁　滨
编　者　梁　滨　周　贤
　　　　王　蕾　尹群耀
主　审　宋柏生

东南大学出版社
·南京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学试题选析/梁滨主编. —南京：东南大学出版社，2010.9
ISBN 978-7-5641-2379-6

Ⅰ.高… Ⅱ.梁… Ⅲ.高等数学—高等学校—解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 161695 号

出版发行：东南大学出版社
社　　址：南京四牌楼 2 号(邮编：210096)
出 版 人：江　汉
网　　址：http://www.seupress.com
经　　销：全国各地新华书店
印　　刷：南京京新印刷厂
开　　本：700mm×1000mm　1/16
印　　张：19.5
字　　数：382 千字
版　　次：2010 年 9 月第 1 版
印　　次：2010 年 9 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5641-2379-6
印　　数：1～3000 册
定　　价：35.00 元

本社图书若有印装质量问题，请直接与读者服务部联系。电话(传真)：025-83792328

前　　言

毫无疑义，高等数学课程的首要目标，是使学生掌握学习专业课必备的数学基础知识。但是，更重要的目标，是通过数学知识的教与学，培养学生思维的优秀品质——严密的逻辑思维能力、灵活的辩证思维能力、丰富的想象力、清晰的推理能力，最终落实到过硬的分析实际问题、解决实际问题的能力上来。简而言之，就是"严而不僵，活而不乱，想象丰富，推理清晰"。

无论是使学生掌握必备的数学基础知识，还是培养学生思维优秀品质，除了学生主体自身的努力之外，都离不开一本优秀的教学教材，离不开一群优秀的数学教师，也离不开一套优秀的数学练习，这是活化知识、培养能力必不可少的三环。我们编写的这本《高等数学试题选析》，就是向这个目标迈出的又一步。其中的例题是从本院及东南大学近年的试题中精选出来的，并汲取了少量考研题、竞赛题。在例题解答的前面紧扣题目给出了较为详尽的分析，有的解答后面还对规律性问题及需要特别注意的问题反复给出提示，力争成为培养思维优秀品质、培育善思新一代的手段之一。为方便学生使用，内容基本上按教材的章节次序编写，下分若干单元。我们不求深，不求全，也不求巧，只求引起对培养思维优秀品质、培育善思新一代的重视。

宋柏生教授确定了全书的总体结构和各章编写原则，提供了大量试卷和试题。全书共分 8 章，第 1、5 两章由梁滨执笔，第 2、7 两章由周贤执笔，第 3、6 两章由王蕾执笔，第 4、8 两章由尹群耀执笔。全书由梁滨统稿。

本书的组织筹划与出版过程中得到了宋柏生教授、董梅芳副院长和姚灼云副院长的大力支持，在教学实践和编写的过程中得到了课程组同仁们的许多帮助，在此一并表示衷心的感谢。

编　者
2010 年 6 月
于东南大学成贤学院

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

1 极限与连续

1.1 数列和函数的极限

一、例题精讲

1. 下列命题中错误的是(　　).

(A) 若 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in \mathbf{N}_+$, 当 $n>N$ 时恒有 $|X_n-a|<k\varepsilon$(其中 k 为正常数),则 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=a$

(B) 若 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in \mathbf{N}_+$, 当 $n\geqslant N$ 时恒有 $|X_n-a|<\varepsilon$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=a$

(C) 若 $\forall \varepsilon\in(0,1)$, $\exists N\in \mathbf{N}_+$, 当 $n>N$ 时恒有 $|X_n-a|<\varepsilon$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=a$

(D) 若 $\forall \varepsilon>0$,有无穷多个 X_n 使 $|X_n-a|<\varepsilon$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=a$

(E) 若 $\forall k\in \mathbf{N}_+$,只有有限多个 X_n 在区间 $\left(a-\dfrac{1}{k},a+\dfrac{1}{k}\right)$ 之外,则 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=a$

分析: (1) $\forall \varepsilon'>0$,取 $\varepsilon=\dfrac{1}{k}\varepsilon'$,必有 $\varepsilon>0$. 于是 $\exists N\in \mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时恒有 $|X_n-a|<k\varepsilon=\varepsilon'$. 根据数列极限的定义,得 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=a$,可见选项(A)正确.

(2) 数列极限定义中"当 $n>N$ 时恒有 $|X_n-a|<\varepsilon$"是"数列 $\{X_n\}$ 中存在某一项,这一项以后的所有项都具有 $|X_n-a|<\varepsilon$ 特性"的精确描述. 由于 N 只需具有"存在性"(不一定是使 $|X_n-a|<\varepsilon$ 恰好成立的最小值),故"当 $n\geqslant N$ 时恒有 $|X_n-a|<\varepsilon$"也是"数列 $\{X_n\}$ 中存在某一项(至少说明存在第 $(N-1)$ 项),这一项以后的所有项都具有 $|X_n-a|<\varepsilon$ 特性"的精确描述. 可见选项(B)正确.

(3) $\forall \varepsilon'>0$,若 ε' 是正小数,取 $\varepsilon=$ 小数部分 (ε'),必有 $\varepsilon\in(0,1)$,于是存在 $N\in \mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时恒有 $|X_n-a|<\varepsilon\leqslant\varepsilon'$;若 ε' 是正整数,由于 $\forall \varepsilon\in(0,1)$,当 $n>N$ 时恒有 $|X_n-a|<\varepsilon$ 和 $\varepsilon<\varepsilon'$,故恒有 $|X_n-a|<\varepsilon'$. 综上所述,可得 $\forall \varepsilon'>0$, $\exists N\in \mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时恒有 $|X_n-a|<\varepsilon'$,根据数列极限定义,得 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=a$. 可见选项(C)正确.

(4) "有无穷多个 X_n 使 $|X_n-a|<\varepsilon$"不能保证" $\exists N\in \mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时恒有 $|X_n-a|<\varepsilon$". 例如 $X_n=\begin{cases}1, & n\neq 10k,\\ -1, & n=10k\end{cases}$ $(k=1,2,3,\cdots)$, $\forall \varepsilon>0$,有无穷多个 X_n 使 $|X_n-1|<\varepsilon$(只要 $n\neq 10$ 的倍数时就有 $|X_n-1|=|1-1|<\varepsilon$),但是 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n\neq 1$

(事实上,$\lim\limits_{n\to\infty}X_n$不存在). 可见选项(D)错误.

(5) $\forall\varepsilon>0$,取 $k=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$,必有 $k\in\mathbf{N}_+$,于是只有有限多个 X_n 在区间$\left(a-\dfrac{1}{k},a+\dfrac{1}{k}\right)$之外. 设这个有限多个 X_n 中下标最大者为 X_N,于是当 $n>N$ 时恒有

$$|X_n-a|\leqslant\frac{1}{k}=\frac{1}{\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1}<\frac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon$$

根据数列极限的定义,得$\lim\limits_{n\to\infty}X_n=a$. 可见选项(E)正确.

解: 选项(D)入选.

提示: (1) 深刻理解数列极限的定义,对于论证和求解有关数列极限的问题都是十分重要的. 灵活运用上列选项中的正确命题,将给论证和求解带来极大的方便(在论证和求解函数的极限时也可以用类似的思想方法解决问题).

(2) 在研究"确定数学"(高等数学就是其中的一门)有关问题时,肯定一个命题必须进行严格论证;但是,否定一个命题往往只需要举出一个反例. 上述分析中,否定选项(D)就是运用了"举出一个反例"的方法,希望同学们在今后的学习中注意掌握和应用.

(3)在初等数学中,我们主要研究只用一个表达式就可以表示的初等函数,而高等数学的研究对象不仅仅是初等函数,否定选项(D)的反例就是一个非初等函数. 希望同学们在研究高等数学问题中,要想到"函数"也包括非初等函数(例如分段函数形式的非初等函数).

(4)许多选择题都是要求选择正确的选项,但是也有不少选择题要求选择错误的选项,本例就是如此的选择题. 这类问题,对于培养辩证思维能力大有益处,希望同学们在解题时注意审题.

2. 证明:数列$\{X_n\}$收敛于零的充要条件是其绝对值数列$\{|X_n|\}$收敛于零.

证: (1) 充分性(要从$\lim\limits_{n\to\infty}|X_n|=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}X_n=0$)

$\because\ \lim\limits_{n\to\infty}|X_n|=0$,

$\therefore\ \forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时恒有$||X_n|-0|<\varepsilon$,即$|X_n-0|<\varepsilon$,

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}X_n=0$.

(2) 必要性(要从$\lim\limits_{n\to\infty}X_n=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|X_n|=0$)

$\because\ \lim\limits_{n\to\infty}X_n=0$,

$\therefore\ \forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时恒有$|X_n-0|<\varepsilon$,进而可得$||X_n|-0|<\varepsilon$,

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}|X_n|=0$.

提示: (1) 条件是不是结论的充分条件或必要条件,在分析和解决理论问题

或者实际问题时意义重大.这里利用极其简单的上述命题帮助同学们复习一下常见的充分性和必要性的证明过程,熟悉一下根据定义证明极限的过程.

(2) 有关充要性的论述有下列两种常见形式：①"A 是 B 的充要条件",在这种形式中 A 是条件,B 是结论;②"A 的充要条件是 B",在这种形式中 B 是条件,A 是结论.

(3) 从条件出发能够必然地毫无例外地推出结论,这说明条件是结论的充分条件;从结论出发能够必然地毫无例外地推出条件,这说明条件是结论的必要条件(因为它的逆否命题是"没有上述条件就必然地毫无例外地没有所述结论",而逆否命题和原命题是同真同假的).

3. 证明：数列$\{X_n\}$收敛于非零常数 a,仅仅是其绝对值数列$\{|X_n|\}$收敛于$|a|$的充分条件.

证：(1) 首先证明本例中的条件($\lim\limits_{n\to\infty}X_n=a$)是结论($\lim\limits_{n\to\infty}|X_n|=|a|$)的充分条件.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}X_n=a$, $\therefore\ \forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时恒有$|X_n-a|<\varepsilon$.

而$||X_n|-|a||\leqslant|X_n-a|$, $\therefore\ ||X_n|-|a||<\varepsilon$, $\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}|X_n|=|a|$.

(2) 其次证明本例中的条件(数列$\{X_n\}$收敛于非零常数 a)不是结论(绝对值数列$\{|X_n|\}$收敛于$|a|$)的必要条件,即从$\lim\limits_{n\to\infty}|X_n|=|a|$不能必然地毫无例外地推出$\lim\limits_{n\to\infty}X_n=a$.可以举反例,证之如下：

对于数列$\{X_n\}$：$X_n=(-1)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty}|X_n|=\lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^n|=1$,但是$\lim\limits_{n\to\infty}X_n\neq 1$(其实$\lim\limits_{n\to\infty}X_n$ 不存在).可见$\lim\limits_{n\to\infty}X_n=a$ 不是$\lim\limits_{n\to\infty}|X_n|=|a|$的必要条件.

提示：(1) 许多定理,条件仅仅是其结论的充分性条件而非充要条件.本例中的条件就是如此的条件.因此,定理的逆命题和否命题可能为真,也可能为假,希望同学们务必牢记.

上例和本例两个命题在许多数学问题中有着广泛的应用,也希望同学们务必牢记.

(2) 在根据定义证明极限的过程中,要注意根据证明的要求灵活地运用有关的绝对值公式：$|x|+|y|\geqslant|x+y|$, $||x|-|y||\leqslant|x-y|$, $|x|\cdot|y|=|xy|$, $\dfrac{|x|}{|y|}=\left|\dfrac{x}{y}\right|$(其中 $y\neq0$)和$|x|<a\Rightarrow -a<x<a$, $|x|>a\Rightarrow x<-a$ 或 $x>a$(其中 $a>0$).

顺便提一下：牢记重要数学公式(例如$|x|\geqslant|\sin x|$($x\in\mathbf{R}$), $|x|\leqslant|\tan x|$ ($x\in(-\pi/2,\pi/2)$), $(|x_1|+|x_2|)/2\geqslant\sqrt{|x_1|\cdot|x_2|}$, $\cdots$),并且能够灵活地运用它们,对于学好高等数学十分重要.对于常用初等数学公式、基本初等函数的图像、常用曲线的方程和图形,以及在以后的学习中还会遇到的许多重要公式和图形,都

应如此.

4. "$\forall \varepsilon \in (0,1)$, $\exists N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n>N$ 时恒有 $|X_n - a| \leqslant \varepsilon$"是数列$\{X_n\}$收敛于 a 的(　　).

(A) 充分条件但非必要条件　　(B) 必要条件但非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

分析: 题给条件等价于数列$\{X_n\}$收敛于 a 的定义条件.

解: 选项(C)入选.

提示: 凡是定义条件都是充分必要条件,希望同学们在学习中予以注意.

5. 设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$,则必有(　　).

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立　　(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$ 不存在　　(D) 极限$\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在

分析: (1) 虽然$\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,但是数列对极限的保序性不仅是严格的,而且在一般情况下是局部的,即$\exists N \in \mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时才有 $a_n < b_n$,故选项(A)不入选.

(2) 同理可得选项(B)不入选.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$ 是 $0 \cdot \infty$型未定式,极限可能存在也可能不存在,故选项(C)不入选.例如当 $a_n = \dfrac{1}{n}$, $c_n = n$(其中 $n=1,2,3,\cdots$)时有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$,但 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n} \cdot n\right) = 1$ 是存在的,可见选项(C)不入选.

(4) 因为$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$,根据无穷大量的定义和性质可得$\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n = \infty$,即$\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在,故选项(D)入选.

解: 选项(D)入选.

提示: (1) 正确理解数列极限和函数极限的唯一性、有界性、保序性及其推论,是十分重要的.

(2) 熟练地运用数列极限和函数极限运算法则求各种类型的数列极限和函数极限,是必须掌握的基本技能.

6. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+\frac{1}{2^2}} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+\frac{1}{n^2}}\right)$.

分析: 这是求 n 项和数列的极限问题,其特点是数列中每一项含有的项数随 n 无限增多.将分母都放大成最大分母用来实现缩小,将分母都缩小成最小分母用来实现放大,所得极限相等,故可考虑用夹逼定理求之.

解: $\because$ $\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+1} \leqslant \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+\frac{1}{2^2}} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+\frac{1}{n^2}}$

$$\leqslant \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+\frac{1}{n^2}},$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(1+n)\cdot n}{2}}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2+2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(1+n)\cdot n}{2}}{n^2+\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2+\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+\frac{1}{2^2}}+\cdots+\frac{n}{n^2+\frac{1}{n^2}}\right)=\frac{1}{2}.$$

提示：(1) 求 n 项和数列的极限，可以优先考虑用我们熟悉的拆项相消法、约分相消法、等差(等比)数列求和公式和其他初等变形法，化成较简单的其他类型极限问题. 否则，尝试用夹逼定理或者定积分定义(将在一元函数积分学中学习)来求.

(2) 用夹逼定理求数列(或函数)的极限是必须掌握的基本技能. 在缩小和放大 n 项和时，要根据数列的特点选用适当的缩小和放大方法，但是必须注意使两端的极限相等. 只有满足此种条件时才能运用夹逼定理求出极限.

7. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+a_3^n+\cdots+a_k^n}$，其中 $a_i\geqslant 0(i=1,2,3,\cdots,k)$.

分析一：这是被开方数为 k 个 n 次幂的和，求其 n 次方根数列的极限问题，其特点是被开方数所含有的项数始终是有限数 k. 只取一个最大项(其余项均视作零)来实现缩小，将所有的项均视作最大项来实现放大，所得极限相等，故可用夹逼定理求之.

解法一：令 $a=\max\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k\}$.

$\because \sqrt[n]{a^n}\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+a_3^n+\cdots+a_k^n}\leqslant\sqrt[n]{ka^n}$，且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n}=a,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{ka^n}=a$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+a_3^n+\cdots+a_k^n}=a=\max\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k\}.$$

分析二：提取最大项到根号外以后，可以看出 k 个 n 次幂的和的 n 次方根的极限值取决于最大项的底数.

解法二：设 $a=\max\{a_i\}$ $(i=1,2,\cdots,k)$，$\{a_i\}$中含有 m 个 $a(1\leqslant m\leqslant k)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+a_3^n+\cdots+a_k^n}=\lim_{n\to\infty}a\sqrt[n]{m}=a=\max\{a_i\}\ (i=1,2,\cdots,k)$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

提示：(1) 再次提醒：在缩小和放大数列(或函数)时，可以根据数列(或函数)的特点选用不同的缩小和放大的方法，但是都必须使缩小和放大后的极限相等，方能使用夹逼定理.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$和$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$在许多数学问题中有着广泛的应用，希望同学们正确牢记，灵活运用.

8. 设 $x_1=10$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2,\cdots)$，试证数列$\{x_n\}$收敛并求其极限.

分析：从已知易得 $x_{n+1}<x_n$，$x_n>\sqrt{6}$，可见数列是单调减少且有下界，故可优先考虑用单调有界原理证之(若行不通，再寻他法).

证：(1) 先证单调减少：

$\because x_1=10, x_2=\sqrt{6+x_1}=4, \therefore x_2<x_1.$

假设 $x_n<x_{n-1}$，则有

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{6+x_n}-\sqrt{6+x_{n-1}}<0$$

可见$\{x_n\}$单调减少.

(2) 再证有下界：

$\because x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}, \therefore x_n>\sqrt{6}(n=1,2,\cdots)$，可见$\{x_n\}$有下界.

综合(1)和(2)，可得$\{x_n\}$收敛.

(3) 假设$\{x_n\}$的极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 对递推公式 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$两边取极限，得 $a=\sqrt{6+a}$，解得 $a=3$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

提示：对于给出递推公式的数列，若能判断其具有单调性，应优先尝试用单调有界原理证其收敛，这是常用思路.

9. 设 $x_1=4, x_{n+1}=\sqrt{6-x_n}(n=1,2,\cdots)$，试证数列$\{x_n\}$收敛并求其极限.

分析：从 $x_1=4, x_{n+1}=\sqrt{6-x_n}$不能断定数列$\{x_n\}$是否单调.

假设$\{x_n\}$收敛，对递推公式 $x_{n+1}=\sqrt{6-x_n}$两边取极限，可以求得$\{x_n\}$可能具有极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$. 试算前几项，发现$\{x_n\}$的奇数项大于 2，偶数项小于 2，$x_n$ 越来越接近 2，故考虑对$|x_{n+1}-2|$施用夹逼定理证之(若行不通，再寻他法).

证：$\because 0\leqslant|x_{n+1}-2|=|\sqrt{6-x_n}-2|=\dfrac{|x_n-2|}{\sqrt{6-x_n}+2}\leqslant\dfrac{1}{2}|x_n-2|$

$$\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}|x_{n-1}-2|\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{2^n}|x_1-2|=\frac{1}{2^{n-1}},$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} |x_{n+1}-2| = 0$. 可见$\{x_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

提示：(1) 求极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$过程和证明数列收敛过程合二为一，故无需再单独写出.

(2) 此例也给出了递推公式，但是试算前几项发现数列不具有单调性，故另寻他法.

10. 设$x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}(n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{x_n\}$收敛并求其极限.

分析：假设$\{x_n\}$收敛，对递推公式两边取极限，可求得$\{x_n\}$可能具有的极限为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{3}$. 从$x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$易知$x_n>0$，$x_{n+1}-x_n=\dfrac{3-x_n^2}{3+x_n}$. 可以看出无论$x_n>\sqrt{3}$，$x_n=\sqrt{3}$还是$0<x_n<\sqrt{3}$，数列$\{x_n\}$都是单调且有界的. 可见$\{x_n\}$必收敛.

解：(1) 假设$\{x_n\}$收敛，且设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，对递推公式$x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$两边取极限，得$a=\dfrac{3(1+a)}{3+a}$，解得$a=\pm\sqrt{3}$.

由$x_1>0$和$x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$易知$x_n>0$，根据极限的唯一性和极限对数列的单调保序性，应有$a\geqslant 0$.

综上所述，$\{x_n\}$可能具有的极限应为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{3}$.

(2) $\because x_{n+1}-x_n=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}-x_n=\dfrac{3-x_n^2}{3+x_n}$，且$x_n>0$，

$\therefore$ 当$x_n>\sqrt{3}$(只需$x_1>\sqrt{3}$)时$x_{n+1}-x_n<0$，$\{x_n\}$单调减且有下界；

当$x_n=\sqrt{3}$(只需$x_1=\sqrt{3}$)时$x_{n+1}-x_n=0$，$\{x_n\}$是一常数列；

当$0<x_n<\sqrt{3}$(只需$0<x_1<\sqrt{3}$)时$x_{n+1}-x_n>0$，$\{x_n\}$单调增且有上界.

可见$\{x_n\}$必收敛.

综合(1)和(2)，可得$\{x_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{3}$.

提示：(1) “$\{x_n\}$可能具有极限$\sqrt{3}$”是在假设$\{x_n\}$收敛的条件下求得的，所以根据递推公式求出后还必须证明$\{x_n\}$收敛. 否则，可能出错. 例如对于数列$\{x_n\}$：$x_n=2^n$有递推公式$x_{n+1}=2x_n$，对两边取极限可得$\lim\limits_{n\to\infty} 2^n=0$. 显然，这是错误的. 实际上，当$n\to\infty$时$2^n\to+\infty$，即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不存在.

(2) 此例也给出了递推公式，但其单调有界性与x_n的取值有关，故拟分别讨论.

11. 设 $f(x+1)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-2}\right)^n$，则 $f(x)=$________.

分析：函数 $f(x+1)$是用 n 为极限变量、含参变量 x 的极限式定义的. 这类问题宜先求出数列的极限(在这个过程中要把参变量 x 暂时看作"常量")，然后根据函数只与对应法则和定义域有关，用变量代换的方法求出 $f(x)$的表达式(在这个过程中要把参变量 x 看作变量). 这是运用辩证法分析和解决数学问题的一个实例. 仔细想一下，可以发现数学问题中有很多很多这样的例子. 运用辩证法分析和解决数学问题对培养思维的严密性和灵活性十分有益，请同学们注意掌握.

解：
$$\begin{aligned}f(x+1) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n-2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+2}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{x+2}(x+2)+2}\\ &= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+2}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{x+2}}\right]^{x+2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+2}{n-2}\right)^2\\ &= e^{x+2}\cdot 1 = e^{x+2}\end{aligned}$$

令 $u=x+1$，可得 $x=u-1$，代入上式得 $f(u)=e^{u+1}$.

根据函数只与对应法则和定义域有关、与自变量用什么表达式表示无关，即可得 $f(x)=e^{x+1}$.

12. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}$(其中 $x\geqslant 0$)，试作出 $f(x)$的图形.

分析：$f(x)$也是用 n 为极限变量、含参变量 x 的极限式定义的，也需要把参变量 x 暂时看作常量来求出极限. 但是，由于参变量 x 的取值不同，极限值也不同，所以需要根据参变量 x 在不同范围的取值求出相应的定义表达式，然后才能作出 $f(x)$的图形. 此例是运用辩证法解决数学问题的又一个实例，以后不再赘述.

解：由于已知极限表达式中含有 x^n 和 $\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$，故宜分五种情况来讨论(熟练以后也可只分为三种)：

当 $0\leqslant x<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}=1$；

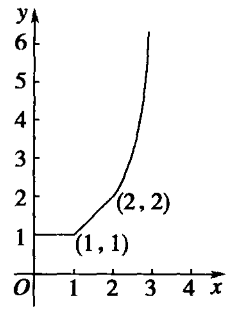
当 $x=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}=1$；

当 $1<x<2$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[x\cdot\sqrt[n]{\left(\dfrac{1}{x}\right)^n+1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^n}\right]=x$；

当 $x=2$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[x\cdot\sqrt[n]{\left(\dfrac{1}{x}\right)^n+1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^n}\right]=x$；

当 $2<x<\infty$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2}{2}\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{2}{x^2}\right)^n+\left(\frac{2}{x}\right)^n+1}=\frac{x^2}{2}$.

$$\therefore f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x, & 1<x\leqslant 2,\\ \frac{1}{2}x^2, & 2<x<+\infty,\end{cases}$$ 其图形如右所示.



提示：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n$：当 $|q|<1$ 时收敛于 0；当 $q=1$ 时收敛于 1；当 $q=-1$ 或 $|q|>1$ 时发散. 它在许多数学问题中有着广泛的运用.

二、习题精选

1. 下列命题中错误的是(　　).

(A) 若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时恒有 $|X_n-a|<\sqrt[k]{\varepsilon}$（其中 k 是正整数），则 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=a$

(B) 若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时恒有 $|X_n-a|\leqslant\varepsilon$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=a$

(C) 若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时恒有 $|X_n-a|<\varepsilon$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=a$

(D) 若 $\forall\varepsilon>0$，总存在无限多个 x_n 在区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 之内，则 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=a$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题中正确的是(　　).

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛

3. 下列命题中错误的是(　　).

(A) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{n\to x_0}g(x)$ 均存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 必存在

(B) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 均存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必存在

(C) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 均存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 必存在

(D) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 均存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必存在

4. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7\cdot 26\cdot 63\cdot\cdots\cdot(n^3-1)}{9\cdot 28\cdot 65\cdot\cdots\cdot(n^3+1)}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{3^2}+\frac{8}{3^3}+\cdots+\frac{3n-1}{3^n}\right)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}\right]$.

5. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1^n+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^3+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

6. (1) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x+x^2\cdot e^{nx}}{1+e^{nx}}$，求 $f(x)$；

(2) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$，作出 $y=f(x)$图形；

(3) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$，作出 $y=f(x)$图形.

7. (1) 设 $0<x_1<4$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(4-x_n)}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；

(2) 设 $x_1=\sqrt{a}$，$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

8. 设 $x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，试利用不等式$\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}$证明$\{x_n\}$收敛.

9. 设 $x_1=\sqrt{3}$，$x_2=\sqrt{3-\sqrt{3}}$，$x_{n+2}=\sqrt{3-\sqrt{3+x_n}}$ $(n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{x_n\}$收敛.

10. 一点先向正东移动 a m，然后左拐弯移动 aq m(其中 $0<q<1$)，如此不断重复左拐弯，使得后一段移动的距离为前一段的 q 倍，这样该点有一极限位置. 试问该极限位置与原出发点相距多少米？

1.2 无穷小量和无穷大量

一、例题精讲

1. $\forall x\in\mathbf{R}$，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$(　　).

(A) 存在且为 0　　(B) 存在但不一定为 0

(C) 一定不存在　　(D) 不一定存在

分析： 不少同学以为从$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$ 可以推出$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$，进而根据题干与夹逼定理的条件“类似”，选择选项(A)或(B).

而$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，只能说明$[g(x)-\varphi(x)]$是当 $x\to\infty$时的无穷小量. 由于$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$ 可能是$(C-C)$型极限式(其中 C 表示常数)，也可能是$(\infty-\infty)$型未定式，不能推得$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$和$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$必然都存在并且相等，也不能推

得$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$和$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$必然都不存在，故选项(A)、选项(B)、选项(C)都不能入选.下面用举例的方法说明应选(D).

设$\varphi(x)=f(x)=g(x)=x$，可得$\forall x$，总有$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，但$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$不存在；再设$\varphi(x)=f(x)=g(x)=1^x$，可得$\forall x$，总有$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，但$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在.

解： 选项(D)入选.

提示： 再次提醒仅从$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$只能推得$[g(x)-\varphi(x)]$是$x\to\infty$时的无穷小量，不能推得$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$和$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$必然都存在且相等，也不能推得$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$和$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$必然都不存在！

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x-1}=($ $)$.

(A) 1 (B) -1

(C) ∞ (D) 不存在，但不为∞

分析： 这是判断当$x\to\infty$时函数极限是否存在、若存在极限是多少的选择题.根据$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在的充要条件，多种多样$x\to\infty$的变化过程可以归结为$x\to+\infty$和$x\to-\infty$两种形式的变化过程，故宜先分别求出当$x\to-\infty$和$x\to+\infty$时的极限，然后判断之.因为

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x-1}\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}\text{型}}\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+2\cdot\frac{1}{x}-3\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}}{1-\frac{1}{x}}\xlongequal{\frac{C}{C}\text{型}}-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x-1}\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}\text{型}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+2\cdot\frac{1}{x}-3\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}}{1-\frac{1}{x}}\xlongequal{\frac{C}{C}\text{型}}1$$

可见$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x-1}$不存在，但不为$\infty$.

解： 选项(D)入选.

提示： 求$x\to-\infty$时极限应取x为负值(不妨设$x<0$)，则

$$\sqrt{x^2+2x-3}=-x\sqrt{1+2\cdot\frac{1}{x}-3\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}$$

故$\sqrt{x^2+2x-3}$除以x得$-\sqrt{1+2\cdot\frac{1}{x}-3\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}$；

求$x\to+\infty$时极限应取x为正值(不妨设$x>0$)，则

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com