

丘成桐主编
数学翻译丛书

Number Theory

An approach through history
from Hammurapi to Legendre

[法] André Weil 著 胥鸣伟 译 王元 校

数论

——从汉穆拉比到勒让德
的历史导引



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

“这是一本罗曼蒂克式的文献小说！它将完全的哲学准确性、敏锐的观察力、对本质问题的切题评议、生动的想象、对学科的爱、富于才气的文学风格完美结合起来。它是数论及其历史的一个不可分割的整体，帮助我们了解这个学科最初根植于何处，以及其发展的第一个重要阶段。作为最卓越数论学家之一的作者……向我们展示了现代数论诞生的壮阔全景。”

——*Periodica Mathematica Hungaria*（匈牙利数学期刊）

“所评论的这本书……是站在许多伟大数论作者肩膀上的，对数论所作的推论性、诠释性的轻松一瞥……在激发学习数论的热情方面，或许是独特的。”

——*Mathematical Reviews*（数学评论）

数论——或者一些人称之为的算术，是最古老、最纯粹、最有活力、最初等却也是最深奥的数学领域。这门学科具有“数学皇后”的名声绝非偶然。一些最为复杂的传统的数学思想便是由对数论的基本问题的研究发展起来的。

对数论有杰出贡献的韦伊，写成了诠释数论历史的这本书；他的研究内容涵盖了大约三十六个世纪的算术工作——从一块可追溯到汉穆拉比王朝的古巴比伦的泥板到勒让德的《论数论》（1798）。韦伊一直希望向有较好教育背景的读者讲述他的研究领域，这促使他在问题的分析、数论方法的演变以及它们在数学中的意义方面使用了历史性的解读方法。在他的论述过程中，韦伊和读者一起来到现代数论的四位主要作者（费马、欧拉、拉格朗日、勒让德）的工作室，并在那里进行了一场仔细的、带有批判眼光的查验。本书富含知识史的广博内容，对了解我们的文化遗产有很重要的贡献。

■ 学科类别：数学史

academic.hep.com.cn

ISBN 978-7-04-029213-8



9 787040 292138 >

定价 56.00 元

0156-09
1

丘成桐 主编
数学翻译丛书

数论

——从汉穆拉比到勒让德的历史导引

Shulun

[法] André Weil 著 胥鸣伟 译 王元 校

17 幅插图

—

—

—

—

—

—



高等教育出版社 · 北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

International Press

图字: 01-2010-1384 号

Translation from the English language edition:
Number Theory by André Weil
Copyright © 2007 Birkhauser Boston
Birkhauser Boston is part of Springer Science + Business Media
All Rights Reserved

图书在版编目 (CIP) 数据

数论: 从汉穆拉比到勒让德的历史导引 / (法) 韦
伊 (Weil, A.) 著; 胥鸣伟译. — 北京: 高等教育出版
社, 2010.4

(数学翻译丛书 / 丘成桐主编)

书名原文: Number Theory: An approach through
history from Hammurapi to Legendre
ISBN 978-7-04-029213-8

I. ①数... II. ①韦...②胥... III. ①数论-数学史
IV. ①O156-09

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 045672 号

策划编辑 赵天夫 责任编辑 李 鹏 封面设计 王凌波
责任绘图 黄建英 责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landracom.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landracom.com.cn
印 刷	北京信彩瑞禾印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×1092 1/16	版 次	2010 年 4 月第 1 版
印 张	18.25	印 次	2010 年 4 月第 1 次印刷
字 数	320 000	定 价	56.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究
物料号 29213-00

《数学翻译丛书》序

改革开放以后，国内大学逐渐与国外的大学增加交流。无论到国外留学或邀请外地学者到中国访问的学者每年都有增长，对中国的科学现代化都大有帮助。但是在翻译外国文献方面的工作尚不能算多。基本上所有中国的教科书都是由本国教授撰写，有些已经比较陈旧，追不上时代了。很多国家，例如俄罗斯、日本等，都大量翻译外文书本来增长本国国民的阅读内容，对数学的研究都大有裨益。高等教育出版社和海外的国际出版社有鉴及此，开始计划做有系统的翻译，由王元院士领导，北京的晨兴数学中心和杭州的浙江大学数学科学研究中心共同组织数学教授进行这个工作。参与的教授很多，有杨乐院士，刘克峰教授等等。我们希望这套翻译书能够使我们的大学有更多的角度来看数学，丰富他们的知识。海外的出版公司如美国数学会等多有帮助，我们谨此鸣谢。

丘成桐 (Shing-Tung Yau)

2005 年 1 月

前 言

数论, 一个有关整数性质的深奥专业.

——《时代》, 1983 年 4 月 4 日.

本书所考察的内容涵盖了从一块古巴比伦的泥板到勒让德 (Legendre) 1798 年的《论数论》发表这一漫长的时期, 而其中的这块泥板则可远远地追溯到汉穆拉比王朝^{*1}(Hammurapi) 的年代. 大体上, 书的内容截止在 1801 年高斯的《算术研究》发表之前, 但它也包含了关于勒让德以后生涯的一段情节, 从而不可避免地要涉及高斯和他的继承者们的一些发现.

数论, 或者如一些情有独钟的人所称做的算术, 直到最近以来, 一直都以它的献身者们的质量而非数量彰显于世; 或许在所能激发出的热情方面它也是独一无二的, 这种热情雄辩地表现在诸如欧拉 (Euler)、高斯 (Gauss)、艾森斯坦 (Eisenstein)、希尔伯特 (Hilbert) 的许多言辞之中. 因此, 虽然这本书包含了三十六个世纪的一些工作, 但它的绝大部分内容都在于对四位数学家, 即费马 (Fermat)、欧拉、拉格朗日 (Lagrange)、勒让德的成就的细节研讨和解说上. 他们是现代数论的奠基人, 而高斯的伟大之处则在于他使先辈们开创的东西趋于完善, 这等同于他揭开了这门学科在历史上的一个新纪元.

我们的任务是要尽可能地把读者带进我们的这些作者们的制作间, 观察他们的工作状态, 分享他们的成功, 并感受他们的失败. 所幸的是, 这并不需要对

^{*1}? — 公元前 1750 年, 这是古巴比伦王国国王 (公元前 1792—前1750) 的名字, 他在位期间武力统一了美索不达米亚地区, 实行中央集权统治, 颁布了《汉穆拉比法典》. ——译注; 后文中我们总在译注序号上加以 *, 以与本书原注区分.

于档案材料和故纸堆的任何钻研. 由于所引用的资料将受到验证, 几乎所有在本书中提及的数学家都有他们完整的著作, 他们尚存的通信已被很好地编辑出版. 我的运气也颇好, 能够参阅在高等研究院中的罗森瓦尔德珍本收藏处的一些人的原版资料, 他们是韦达 (Viète)、巴赫 (Bachet)、费马、沃利斯 (Wallis) 和勒让德.

彻底尊重历史是本书所遵循的方法; 不要求读者有专门的知识. 我的热切愿望是, 至少有一些读者能体会到, 他们若依照本书中那条重走的历史路线而将数论作为起点, 这是可行的. 一些适当的背景知识可以从我的《数论初步 (*Number theory for beginners*)》得到 (顺便提一下: 这本书的内容几乎完全取自欧拉), 或者还有 (在一个更高的水平上) J.-P. 塞尔 (Serre) 的《算术教程 (*Cours d'Arithmétique*)》的第一章. 更详细的背景信息连同一些补充资料 (并非具严格的史料性质) 可以在第二、三、四章后面的附录中找到.

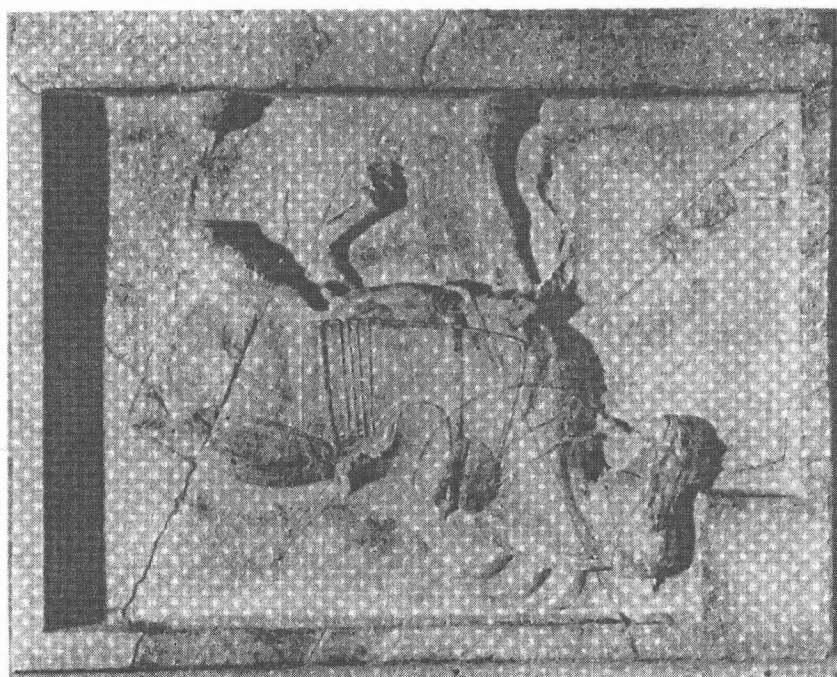
我, 还有读者, 应该衷心感谢我的朋友陈省身, 他用他漂亮的书法使我们的卷首页增色. 还要感谢宾州大学 (University of Pennsylvania) 的大学博物馆允许我们复制他们藏品中的唐朝六骏之一的照片; 感谢诺伊格鲍尔 (O. Neugebauer) 给了我们泥板 PLIMPTON 322 的照片; 还要感谢巴黎的科学院档案馆, 给了我们 Delpech 雕画的拉格朗日像的照片. 最后, 我愿表达我对波士顿的 Birkhäuser Verlag 的谢意, 特别是对 Klaus Peters 及其合作团队的谢意, 他们对此项目具有强烈的兴趣, 不止一次地伸出援手, 并使用了他们高超的技术能力保证了本书的出版.

1983 年 4 月 15 日于普林斯顿

老馬識途

陳省身題





缩写、基本参考文献以及记号

- Arch.* = ARCHIMEDES, Opera omnia cum commentariis Eutocii, it.ed. J. L. Heiberg, Teubner, 3 vol., 1910—1915.
- D. Bern.* = Die Werke von DANIEL BERNOULLI, ed.D. Speiser, Bd. 2, Birkhäuser 1982.
- J. Bern.* = Johannis BERNOULLI ... Opera Omnia ... Lausannae et Genevae, sumptibus Marci Michaelis Bousquet et sociorum, 4 vol., 1742—1743.
- Col.* = H. T. COLEBROOKE, Algebra with arithmetic and mensuration. From the sanscrit of Brahmagupta and Bhāscara, London 1817 (Reprint, 1972).
- Corr.* = Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII^{ème} siècle ... publiée ... par P.-H. Fuss, St.-Petersbourg, 2 vol., 1843 (reprint, Johnson Reprint Corp., 1968).
- Desc.* = Œuvres de DESCARTES, pub. par Charles Adam et Paul Tannery, Paris, 11 vol., 1897—1909.
- Dioph.* = DIOPHANTI Alexandrini Opera omnia cum graecis commentariis, ed. Paulus Tannery, Teubner, 2 vol. 1893—1895.
- Dir.* = G. Lejeune DIRICHLET's Werke, herausg. v. L. Kronecker und L. Fuchs, Berlin, 2 vol., 1889—97.
- Disq.* = Disquisitiones arithmeticae, auctore D. Carolo Friderico GAUSS, Lipsiae 1801 (= vol. I of Gauss, Werke, Göttingen 1870).
- Eucl.* = EUCLIDIS Elementa, ed. I. L. Heiberg, Lipsiae, Teubner, 4 vol., 1883—

- 1885 (and: Post I. L. Heiberg ed. E. S. Stamatis, Teubner, 4 vol., 1969—1973).
Eu. = Leonhardi EULERI Opera omnia, sub ausp. Soc. scient. Nat. Helv
 Series I-IV A, 1911—).
- Fag.* = Opere Matematiche del Marchese Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano,
 pubbl. ... dai Soci V. Volterra, G. Loria, D. Gamboli, 3 vol., 1911—1913.
- Fe.* = Œuvres de Fermat, pub. par ... Paul Tannery et Charles Henry, Paris, 4
 vol., 1891—1912 (+ Supplément, pub. par M. C. de Waard, 1 vol. 1922).
- Gal.* = Le Opere di GALILEO Galilei, Edizione Nazionale, Firenze, G. Barbera,
 20 vol., 1890—1909.
- Gau.* = Carl Friedrich GAUSS, Werke, Göttingen, 12 vol., 1870—1929.
- Huy.* = Œuvres complètes de Christian HUYGENS, pub. par la Soc. Holl. des
 Sc., La Haye, Martinus Nijhoff, 22 vol., 1888—1950.
- Jac.* = C. G. J. JACOBI's Gesammelte Werke, herausg. v. K. Weierstrass, Berlin,
 7 vol., 1881—1891.
- JEH.* = J. E. Hofmann, Neues über FERMAT's zahlentheoretische Herausforderun-
 gen von 1657, Abh. d. preuss. Akad. d. Wiss. 1943—1944. Nr. 9, pp. 41—47.
- Lag.* = Œuvres de LAGRANGE, pub. par M. J.-A. Serret et M. Gaston Darboux,
 Paris, 14 vol., 1867—1892.
- Leib.* = LEIBNIZ's mathematische Schriften, herausg. von C. I. Gerhardt,
 Zweite Abtheilung, die mathematischen Abhandlungen Leibnizens enthaltend,
 Halle, 3 vol., 1858—1863.
- Leon.* = Scritti di LEONARDO PISANO, matematico del Secolo decimoterzo,
 pubbl. da Baldassare Boncompagni, Roma, 2 vol., 1857—1862.
- LVE.* = LEONARD DE PISE, Le livre des nombres carrés, traduit ... par P. Ver
 Eecke, Desclée de Brouwer et C^{ie}, Bruges 1952 (French translation of *Leon.* II.
 253—283).
- Mers.* = Correspondance du P. Marin MERSENNE, Religieux Minime, Pub. par
 M^{me} Paul Tannery et Cornélis de Waard, Paris, 14 vol., 1955—1980.
- New.* = The mathematical papers of Isaac NEWTON, ed. by D. T. Whiteside,
 Cambridge University Press, 8 vol., 1967—1981.
- PkU.* = Leonhard EULER, Pis'ma k učěnym, edd. T. N. Klado, Ju. Ch. Kopelevič,
 T. A. Lukin (red. V. I. Smirnov), Moskva-Leningrad 1963.
- Viète, Op.* = Francisci VIETAE Opera Mathematica ... Operâ atque studio
 Francisci à Schooten Leydensis, Matheseos Professoris, Lugduni Batavorum, ex
 officinâ Bonaventurae et Abrahami Eizeviriorum, 1646 (reprint Georg Holms

Verlag 1970).

Wal. = Johannis WALLIS S. T. D., Geometriae Professoris in Celeberrima Academia Oxoniensi, Opera Mathematica: (I) Volumen Primum, Oxoniae, e Theatro Sheldoniano 1695; (II) De Algebra Tractatus Historicus et Practicus, Anno 1685 anglie editus, nunc auctus latine . . . Operum Mathematicorum Volumen alterum, Oxoniae . . . 1693.

(请看书后部分的补充文献)

文献及日期的说明

对于前面那些著作的参考绝大部分都是以显示卷数 (如有必要) 以及页数来给出. 例如: *Fe.II,194* 表示费马的《*Œuvres*》(在标准的 Tannery-Henry 版本), 第二卷, 194 页.

例外的是, 参考欧几里得和丢番图时是由显示“书”以及命题, 问题给出. 例如: *Eucl.VII,2* 表示欧几里得的 (标准的 Heiberg 版本) 书 VII, 命题 2; 类似的, *Dioph.V,11* 表示丢番图的 (Tannery 版本) 书 V, 问题 11. 在丢番图的情形, 有时会发现需要包含 1621 年的巴歇 (Bachet) 版本的编号 (或者等于是在 S.de Fermat 1670 年的版本; 参看文献索引); 因此表示: *Dioph.V,11=Dioph.V,14_b* 的意思是丢番图的书 V, 问题 11 (Tannery 版本) 被编为 Bachet 版本的 14.

在对费马和欧拉著作的叙述中日期特别重要 (第二章, 第三章). 在信件的情形一般不会发生问题; 在旧历法 (Julian 历) 和新历法 (Gregorian 历) 之间的差别是很小的, 绝大多数都忽略了. 至于欧拉, 有必要要一个更加精致的系统, 对于他的每篇文章值得标明它在欧拉著述 (参看文献) 的 G.Eneström 分类目录中的编号以及它大体的写作日期. 譬如, *Eu.I-2,531-555=E271;1758* 表示欧拉的论文, Eneström 编号的 no. 271, 系列 I 的第 2 卷, 531 到 555 页, 被认为是 1758 年写的; 当仅参考一篇文章的一部分时, 它这样给出: *Eu.I-20,81* 于 E252 中; 1752. 该日期是由 Eneström 给出的 (或者是提交给彼得堡或柏林科学院的日期), 除非欧拉较早已由欧拉的通信表明了日期. 参看系列 IV A 的卷 1 可由以下数字给出: *Eu.IV A-1, no.1887*; 它意思是那一卷编号为 1887 的信件. 这里所说的这个系列是现存的欧拉的通信资料库.

补充的参考资料可在本书最后面的文献目录中找到.

记号

通篇使用了传统的代数记号. 由于到十七世纪后期前还不能说已经充分建

立了这些记号, 在叙述较早期作者的工作 (包括费马, 他使用韦达的记号) 时这样做与当时的时代特征不相符. 但从欧拉以后, 我们的记号则通常与原作者的符合了, 不过需要除去同余式的记号, 因为这只能追溯到高斯那时, 然而我们为了使用方便的缩写, 通篇都采用了它. 回忆一下, “模” m 的 “同余式”

$$a \equiv b \pmod{m}$$

表示 $a - b$ 是 m 的一个倍数. 因此一个整数 a 是模 m 的 “二次剩余” 是指如果有一个 b 使得 $a \equiv b^2 \pmod{m}$, 否则就是一个 “二次非剩余”; 它是一个 n 次剩余是说如果有一个 b 使得 $a \equiv b^n \pmod{m}$.

也是出于简便的原因, 有时也采用了矩阵的记号 (在第三章 §13 以及第四章的附录 III); $\mathbb{Z}$ 用来表示所有整数 (正, 负, 及 0) 的 “环”; $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 分别代表由所有有理数, 所有实数, 所有 “虚数” (或 “复数”) $a + b\sqrt{-1}$ 组成的 “域” (其中 a, b 为实数); 当 p 为任意素数时, $\mathbb{F}_p$ 为 p 个元构成的 “域”, 它们是模 p 的同余类. 如果 θ 是个 “二次无理数”, 实际是 $\sqrt{N}$, 其中 N 是个非平方的整数, 或者 θ 为 “三次单位根” $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, 则 $\mathbb{Z}[\theta]$ 是个由所有 $a + b\theta$ 元组成的 “环”, 其中 a 和 b 为整数, 而 $\mathbb{Q}(\theta)$ 是由 $r + s\theta$ 构成的 “域”, 其中 r 和 s 为有理数.

为了打字方便, 勒让德符号

$$\left(\frac{n}{p}\right)$$

(总是被勒让德、狄利克雷及大多数经典作者所使用) 经常被打印成 (n/p) . 它的定义是, 只要 p 是个素数, 而 n 是与 p 互素的整数, 那么当 n 是个模 p 的二次剩余时, 它为 $+1$, 否则为 -1 .

目 录

《数学翻译丛书》序

前言

插图目录

缩写、基本参考文献以及记号

第一章 原史时期的数论	1
§1.1 引子	1
§1.2 素数和因数分解	4
§1.3 完全数	5
§1.4 一次问题	5
§1.5 毕达哥拉斯三角形	6
§1.6 两个平方数的和	7
§1.7 斐波那契和《平方数》	10
§1.8 关于佩尔 (Pell) 方程的早期工作	11
§1.9 佩尔方程: 阿基米德和印度人	14
§1.10 丢番图与丢番图方程	19
§1.11 丢番图及平方和	23
§1.12 丢番图的复苏: 韦达与巴歇	24

第二章 费马和他的信件	28
§2.1 生平	28
§2.2 二项式系数	34
§2.3 证明与“归纳”的相较	37
§2.4 完全数与费马定理	39
§2.5 最初的探索	44
§2.6 对二次剩余的初次尝试	46
§2.7 两个平方数和的素因子	47
§2.8 两个平方数之和	49
§2.9 由两个平方数和表示的数	51
§2.10 无限下降法以及方程 $x^4 - y^4 = z^2$	55
§2.11 费马成熟时期的问题	57
§2.12 “初等”二次型	61
§2.13 佩尔方程	67
§2.14 二次不定方程	73
§2.15 对亏格 1 的方程的追本溯源	75
§2.16 再论下降法	81
§2.17 结论	85
附录 I 欧几里得二次域	89
附录 II 射影空间中的亏格 1 曲线	92
附录 III 作为空间四次曲线的费马的“二重方程”	95
附录 IV 下降法与莫德尔定理	98
附录 V 方程 $y^2 = x^3 - 2x$	104
 第三章 欧拉	 112
§3.1 十六世纪、十七世纪和十八世纪的科学活动	112
§3.2 欧拉的生平	114
§3.3 欧拉与哥德巴赫	119
§3.4 欧拉关于数论的发现	121
§3.5 角色一览表 (<i>Dramatis personae</i>)	124
§3.6 模 N 的乘法群	132
§3.7 “实”对“虚”	140
§3.8 错失二次互反律	142
§3.9 二元二次型	146
§3.10 搜寻大素数	152

§3.11 四平方数之和	157
§3.12 平方根与连分式	159
§3.13 二次丢番图方程	162
§3.14 再论丢番图方程	166
§3.15 椭圆积分和加法定理	169
§3.16 作为丢番图方程的椭圆曲线	175
§3.17 求和公式以及 $\sum n^{-\nu}$	178
§3.18 欧拉和 ζ 函数	182
§3.19 三角函数	186
§3.20 ζ 函数的函数方程	190
§3.21 数的分拆 (<i>Partitio numerorum</i>) 与模函数	193
§3.22 结论	198
附录 I 二次互反律	199
附录 II 对平方和问题的一个初等证明	202
附录 III 椭圆曲线的加法定理	205
第四章 过渡时期: 拉格朗日与勒让德	215
§4.1 拉格朗日的生平	215
§4.2 拉格朗日与数论	219
§4.3 不定方程	220
§4.4 拉格朗日的二元二次型理论	221
§4.5 勒让德的生平	224
§4.6 勒让德的算术工作	227
附录 I 三元二次型的哈塞 (Hasse) 原理	235
附录 II 关于正二元二次型的勒让德的证明	240
附录 III 拉格朗日关于不定二元二次型的一个证明	242
补充参考文献	250
译后记	254
王元先生给译者的信	255
人名索引	256
内容索引	262

插图目录

1. 陈省身的书法题词. (扉页)

2. 唐太宗墓室中的战马石雕 (公元七世纪). 宾州大学博物馆藏, 费城, 承蒙宾州大学博物馆慨允. (扉页)

3. PLIMOTON (泥板) 322, 毕达哥拉斯三角形列表. 古巴比伦书写板, 大约公元前 1800 年, 取自 O. 诺伊格鲍尔与 A. 萨赫斯的《数学的楔形文文本》, New Haven, Conn., 1945, 承蒙 O. 诺伊格鲍尔允许使用. (8 页)

4. 科尔布鲁克 (H.T. Colebrooke) 的《算术的代数及求积法——取自婆罗摩笈多和罢思古罗的梵文文献》的扉页. 伦敦, 1817. (17 页)

5. 韦达像 (雕版画). J. Rabel 作, 取自《*L'Algèbre nouvelle de M. Viète*》, traduite en françois par A. Vasset, à Paris, chez Pierre Racolet, 1630. (20 页)

6. 费马像 (雕版画). F. Poilly 作, 取自《*Varia Opera Mathematica*》, D. Petri de Fermat, Tolosae, 1679. (26 页)

7. 《韦达数学文集》的扉页. Lugduni Batavorum, 1646, 取自从前属于剑桥大学三一学院的复印件, 它是 1669 年的一个赠送本, 可能是经牛顿处理的.

(31 页)