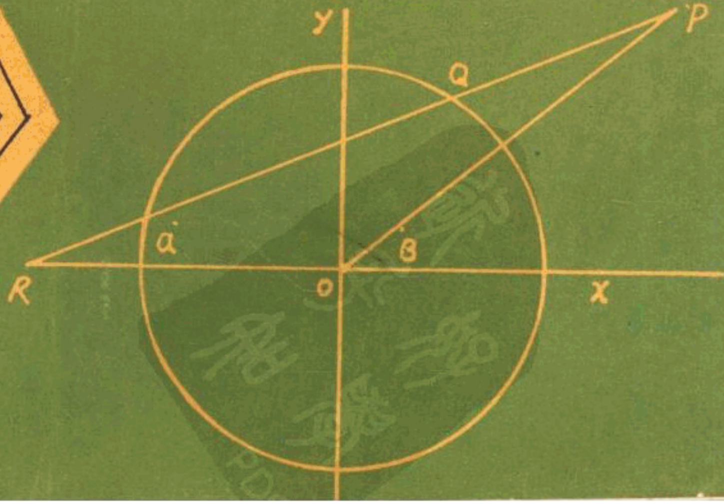
数学基本思想方法与平面三角解析

天津人民出版社



数学基本思想方法与平面三角解析

王 培 德 编著

天 津 人 民 出 版 社

数学基本思想方法与
平面三角解析
王培德　编著
*
天津人民出版社出版
（天津市赤峰道130号）
天津新华印刷一厂印刷　新华书店天津发行所发行
*
787×1092毫米　32开本　16.5印张　338千字
1991年12月第1版　1991年12月第1次印刷
印数：1—1,500
ISBN 7-201-00754-8/G·317
定　价：7.20元

序 言

高士其说："国家的竞争，社会的竞争，归根结蒂是人才的竞争……，而人培养成才，其关键在于思维，在于科学的思维。"数学既是一种知识，也是一种磨炼智力启迪思维的手段．数学作为"思维的体操"，确实可以使我们整体地、有条理地、逻辑地、系统地发现和思考问题，完善我们的思维品质，增强自身的思维意识，发展思维能力．

从这个观点出发，学习数学就不仅限于知识的学习，数学教育的目的也不单纯是建立一个完善的知识结构．正象皮亚杰说的那样，学习数学的过程就是从一种思维结构过渡到另一种思维结构的过程，数学知识只是进行思维训练的结构材料．

为了使数学知识结构与思维结构同步建立和发展，我们必须十分重视数学基本思想方法的教学与研究．

我国古人很早就重视思想方法在解题中的作用．在"周髀算经"中，陈子曾指出："算数之术，是用智矣．"宋朝著名爱国科学家沈恬在总结数学发展趋势时说："算术不患文学，见简即用，见繁即变，不胶一法，乃为通术也．"

从世界范围看，在第四届国际数学教育会议上，许多国家的专家都指出：应当把数学思想和方法作为数学课程中重要的环节。他们说“设计……教学大纲必须以能帮助解决各种实际问题的数学方法来武装学生。解决问题的能力不仅需要宽广的知识，而且需要知识之间的联系以及把它们统一起来的基本原理。”这里所说的“数学方法”、“基本原理”指的是把实际问题数学化处理、分类的思考、基本量的思考、化归的思考和变换的思考，这些就是我们泛指的数学基本思想方法。

目　　录

第一篇　数学基本思想方法

第一章　数学基本思想方法

一、数学方法

数学内容包括数学知识和数学方法两个部分．数学方法即解决数学问题时采用的方式．途径或手段．任何一个定理的证明或一个习题的解答都离不开一定的数学方法．

（一）数学方法是对数学形式的认识

列宁说：“方法就是对于自己内容的内部自己的运动的形式的觉识”．我们所考察的对象、问题，总是既有内容又有形式的，要紧的是先弄清它的内容，认真进行剖析，着眼于它们之间的联系及其运动和变化；形式是具体的、丰富多

彩的，又是运动的、变化的，因此要着眼于形式的变化或变换的方式．

方法实质上就是对形式的认识，即变换形式的“全过程”．如：$y=t\sin x$，当t为常数、x变化时，它是正弦曲线；当x为不等于$k\pi$ ($k\in Z$) 的常数、t变化时，它是斜率在〔$-1,1$〕中的正比例函数的图象——直线．又如：求函数$y=\dfrac{3-\sin x}{4+\cos x}$的极值．用常规方法解，它是三角函数的极值问题；从解析法观点看，它是$P(4,3)$与$Q(-\cos x,\sin x)$两点连线斜率的极值问题．因此，对同一个内容，当你从不同角度，用不同方法考察时，它就会显示出不同的形式．这样，我们才能对被考察的对象有较完全的认识．

我们对形式的认识总是逐步深入的，因而对方法的理解也是步步提高的．

数学方法是在变换数学问题形式表达及演绎推理过程中，有目的地一步步变换，直至成为对当前问题最适宜的典型形式或最简形式．

（二）数学方法的要素

每一种数学方法通常有如下三个要素：逻辑依据、适用范围和步骤与细节．

1.逻辑依据．要求使用数学方法时，必须步步有据，这是数学严密逻辑性的反映．

2.适用范围　超出适用范围使用一种数学方法，就潜伏着出现错误的可能性．

【例1】求函数$y=2\sin^2x-4a\sin x+3a^2+1$的最大值

与最小值.

解：$y=2(\sin x-a)^2+a^2+1$，

$y_{\min}=2(1-a)^2+a^2+1=3a^2-4a+3$，

$y_{\max}=2(1+a)^2+a^2+1=3a^2+4a+3$

本例的错误在于把用于一般二次函数求极值的配方法用到带参数a的三角函数式中，而没有对参数取值的影响进行讨论。错误在于扩大了适用范围．反之，把一种方法本来可以适用的范围缩小了，便使这种方法的威力大大降低．如待定系数法只用于因式分解就把它的作用局限了．实际上，它可用来解决确定函数表达式、方程、不等式、数列等一系列的问题.

3.步骤与细节．数学方法使用步骤各有所异，不再赘述．至于细节，由于较多、较繁琐，人们常常不够注意，从而产生错误.

【例 2】 设 $f_1(x)=x^2-2$，$x=2\cos\theta$，且 $f_m(x)=f_1[f_{m-1}(x)](m\geqslant 2,m\in N)$，则$f_n(x)=2\cos 2^n\theta(2n\in N)$.

证明：（1）当$n=1$时，

$f_1(x)=(2\cos\theta)^2-2=2(2\cos^2\theta-1)=2\cos 2^1\theta$，

故$n=1$时，命题成立；

（2）假设$n=k$时命题成立，即$f_k(x)=2\cos 2^k\theta$，

由$f_n(x)=2\cos 2^n\theta$，得$n=k+1$时，

$f_{k+1}(x)=2\cos 2^{k+1}\theta$也成立.

由(1)(2)可知命题对一切$n\in N$都成立.

这里就出现了循环论证的逻辑错误．(2)中用论断作为论据，仅是形式上的照搬，实质并未证明．在(2)中，正确

的证明应为：

$$f_{k+1}(x)=f_1[f_k(x)]=f_1(2\cos 2^k\theta)$$

$$=(2\cos 2^k\theta)^2-2=2(2\cos^2 2^k\theta-1)$$

$$=2\cos 2^{k+1}\theta,$$

即$n=k+1$时，命题也成立.

（三）数学方法的层次性

高层次的方法概括性强，迁移能力大，适用面广．低层次的方法，则反之．如化弦法是含多种三角函数的三角式在求值与化简中经常采用的方法．但它是较低层次的数学方法，适用面较窄，实质上它是化归法这个较高层次数学方法在三角中的具体体现．

【例3】求证：在$\triangle ABC$中，

$$\frac{\cos A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B}{\sin C\sin A}+\frac{\cos C}{\sin A\sin B}=2.$$

题中的三角函数都是“弦”，不存在化弦问题，但用化切法可把“弦”转化为“切”证明．

证明：∵ $\dfrac{\cos A}{\sin B\sin C}=\dfrac{-\cos(B+C)}{\sin B\sin C}$

$$=\frac{-\cos B\cos C+\sin B\sin C}{\sin B\sin C}$$

$$=1-\mathrm{ctg}B\,\mathrm{ctg}C$$

∴ 左式$=3-(\mathrm{ctg}B\mathrm{ctg}C+\mathrm{ctg}C\mathrm{ctg}A+\mathrm{ctg}A\mathrm{ctg}B)$.

而 $-\mathrm{ctg}A=\mathrm{ctg}(B+C)=\dfrac{1-\mathrm{tg}B\mathrm{tg}C}{\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C}$,

$$=\frac{\mathrm{ctg}B\mathrm{ctg}C-1}{\mathrm{ctg}C+\mathrm{ctg}B},$$

故　$\operatorname{ctg}B\cdot\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}C\cdot\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}A\cdot\operatorname{ctg}B=1$，

$\therefore$　左式 $=3-1=2=$ 右式．

（四）数学方法的分类

中学阶段用到的数学方法可分为两类．

1．通法．系指规律性较强的通用方法．如配方法、换元法、消元法、待定系数法、比较系数法、分离系数法、代入法、参数法、判别式法、辅助函数法、数形结合法、放缩法以及反证法、综合法、分析法、同一法等逻辑方法，还包括用其它的知识来解决的三角法、解析法、几何法、代数法．通法是数学方法的基础．

2．巧法．指技巧性较强的方法．它是通法的发展和变式，是掌握数学方法的难点．如复数法、错项相减法、裂项法、拆补项法、韦达定理法、“1”的灵活运用法、特征值法等．

（五）数学方法与数学解题

波利亚说：数学解题是命题的连续变换，又是数学方法反复运用的过程．同一问题采用不同的数学方法，殊途同归，因而产生一题多解．同一数学方法在不同问题的转化过程中的运用，产生多题一解．即使数学问题涉及的概念、命题等知识掌握的好，但缺乏一定的数学方法，也达不到解题的目的．因此，数学方法是通向解题成功的阶梯，这就是数学方法在解题中的作用．

数学方法与数学知识一样，是经验的总结，智慧的结晶，两者常常是密不可分的．如笛卡尔坐标系的建立，产生了解析几何知识，同时它又是一种重要的数学方法——解析

法．因此我们不仅要掌握好基础知识，还要注意方法的归纳和总结．

二、数学思想

随着各门科学抽象化、数学化水平的日益提高，随着数学本身由于集合论与结构思想的发展而日益走向整体化，对统一性、普遍性的数学思想的重视与研究，已成为历史的必然和时代的要求，成为数学教育现代化进程中的一个重要课题．

（一）数学思想

数学思想是对数学事实、概念、理论与方法的本质认识，是体现于基础科学中的具有奠基性、总结性的内容．它含有传统数学的精华和现代数学的基本观点，并且将继续发展完善．如运动和变化的思想、映射的思想、转化的思想、几何化代数化的思想、对称化的思想、递推的思想等等．每一个数学概念都凝结着一定的数学思想．

组成事物整体的各个要素之间稳定的联系方式就是结构，它可使各要素发挥其单独不能发挥的作用．数学思想的整体体现出结构属性，当我们从这个角度考察和运用它时，便形成了一个整体化的数学思想系统．系统则是指由相互作用、相互依赖的若干组成部分或要素间按一定的秩序结合成的具有特定功能的稳定整体．

“数学思想系统”植根于数学知识系统中，经过哲学与逻辑学的培育与提炼，发展成为一个复杂的开放系统（即不断丰富和变化的系统）．

（二）数学思想与数学方法的关系

处理数学内容要有一定的方法，但数学方法又受数学思想的制约．数学思想体现着高层次的数学方法和数学概念，如三角法、换元法、代换法、辅助函数法、复数法、解析法以及函数概念、对应概念等都体现在映射的思想中，离开了数学思想指导的数学方法是无源之水无本之木．

在解题过程中，各种数学思想和方法是互相渗透互相制约的．重视数学思想和方法就要在认识数学对象的过程中，对它的产生、发现和发展有所了解，而不要只停留于系统的、严密的综合演绎过程中．

三、数学基本思想方法

（一）数学基本思想方法

数学基本思想方法是由数学的基本思想、基本方法、基本概念和基本态度所构成的认识系统．它是指人们通过思维活动对客观事物所作出的概括反映，是对数学的基本看法和概括认识．它不是一般意义下的方法（即理想应用于实践的中介），而是相应方法的精神实质与理论根据，是在数学思维结果（即数学知识的总结和应用）基础上，抽出其具有指导意义和普遍思维价值的思想精髓而概括成的．数学基本思想方法包括人们在进行数学思维活动时的观点、原则、思想方法及确定行为的方式．

数学基本思想方法是通过思维活动对客观事物所作出的概括反映．如反演映射思想就是一种基本思想方法，它在数学思维结构中属于对应思维；其数学基础是函数的对应说，

包括了集合思想和对应思想两种数学思想，它是人们认识两个集合间联系的根据，是函数对应说的升华，是许多重要数学概念和方法赖以产生和建立的基础与工具.

（二）数学基本思想方法的性能

数学基本思想方法是由工具性和方法性的知识组成，具有知识结构的一些性质，即它的客观性与可传授性．另一方面，它又反映了认知者的思想观点及分析处理问题的方法，它也是认知者心理结构（即指组成人的心理活动整体各要素间稳定的联系方式）的综合体现，因而又有认知结构（指人类的认识活动从属于主体和外部世界在连续不断的相互作用中逐渐建立起来的，即制约人的认识活动的心理结构）的某些特性，如可以形成广泛的迁移．它是群体数学思维的产物，又是认知个体的思维成果，蕴含着主体认识和改变外部现实的理性应变能力，起着由主观到客观又由客观到主观的适应调节作用.

（三）数学基本思想方法与数学认知结构

数学基本思想方法是数学认知结构形成的核心．作为知识结构内化的认知结构是学习材料本身的逻辑结构在人脑中的反应．它既包括作为知识内容的表象、概念、概念体系，又包括掌握相应知识内容所必需的思维能力.

人们的认知结构是自身学习知识和智力活动的主要模式，是主观能动作用获得充分发挥的产物．他们总是依靠已有的认知结构去掌握新的知识，接触或解决各种问题．在学习过程中，人们把原有的认知结构中的信息与接触到的信息加工、重组并产生新的信息．认知结构随着知识的增加、深

化而不断地扩大发展.

一定的认知结构与知识客体的关系有可同化关系（即指主体将外部刺激吸收到本身的心理机能结构中，去引起认知结构量变的过程）、非同化可顺应关系（即指主体认知结构不能同化外部环境时，主体改变原有认知结构去适应环境的变化过程，顺应引起认知结构的质变）和非顺应关系诸种．如有理指数幂函数$y=x^{\alpha}$（$x\in R^{+}$、$\alpha\in Q$），当α取无理数时，引起了认知结构的不平衡，原有的认知结构不能同化这新的知识客体．因为无理数α都可看成某一有理数列$\{\alpha_n\}$（$\alpha_n\in Q$，$n\in N$）的极限，即$\alpha=\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$．这样$x^{\alpha_n}(n\in N)$均有意义，所以就可用极限的思想定义$x^{\alpha}=\lim\limits_{n\to+\infty}x^{\alpha_n}$，从而把无理指数幂纳入幂函数的认知结构中．通过极限这一基本思想方法定义了无理指数幂，使它的认知结构在整体上出现突变，进入可顺应关系这一更高层次．由此可见，要使人们已有的认知结构部分改组以适应不相吻合的新知识输入的需要，使新知识纳入原有的认知结构内，产生同化（如正整指数幂函数扩大到有理指数幂函数），或者变外在知识的无序为认知结构的有序，产生顺应（如有理指数幂函数扩大到实指数幂函数）．即使是对非顺应关系的知识输入（如底取负数的幂函数），也都必须牢固地掌握数学基本思想方法．

概念的形成是通过思维把事物的各种本质属性抽象出来，再加以联结构成的统一体。人们每掌握一个概念或几个概念间的关系、掌握一种数学基本思想方法，都意味着他原来的认知结构受到了改造、更新、提高和深化．

信息是指一切通讯和控制系统内部各部分之间以及相互联系的各系统之间相互传送的，用以消除系统的不确定东西，它是物质的普遍属性。由于数学基本思想方法影响着人的思维方式，也影响着人们接受、加工处理信息的方式，从而影响着认知结构的形成．数学基本思想方法是数学认知结构中起重要组织作用的因素，也是建立数学认知结构的主导思想．

（四）数学基本思想方法与数学能力

数学能力是表现在解决数学问题中反映出来的能力．它本身就是一个结构复杂的心理构成物，它是一个包含着多种多样心理方面含有许多特征的综合心理品质．

能力是与活动要求相符合并保证能在活动中取得成就的人的个性特点的综合．它是人类智能的体现．从个性心理特征看，能力是人所具有的比较稳定的个性心理特征，是影响活动效果的主要心理因素．从个性意识倾向看，能力是稳固的需要动机及为实现这些需要动机而掌握的稳固行为方式的统一体．

数学能力就是用数学材料去形成概括的、简缩的、灵活的、可逆的联想和联想系统的能力．数学基本思想方法正是这种概括的简缩的认识．它的存在就为联想开辟了广阔的天地．数学基本思想方法在数学知识转化为数学能力的过程中起着纽带与桥梁作用．能力看成认知的结晶，而数学基本思想方法就起着结晶核的作用．因为它能把大量有助于能力形成的素材吸引在周围，大大加速概括的过程，增进对材料的理解，最终转化为数学能力．

（五）数学基本思想方法与数学思维结构

从思维的角度看，数学基本思想方法就是用数学的思维方式去考察和处理问题的自觉意识或思维习惯．数学基本思想方法的形成和发展，总离不开具体的数学思维过程．在数学知识结构中，概念及概念间的关系经历着“聚敛——发散——聚敛”的思维过程，是在这个发展变化过程中逐渐形成各种数学基本思想方法的．

数学思维是人脑和数学对象交互作用，并借助数学语言以抽象和概括为特点，对客观事物的数学结构和模型进行间接概括的反映．数学思维结构是学生在数学思维过程中，以数学知识结构为基础，在头脑中建立和形成的思维结构；它是数学知识结构与人们认知结构交互作用形成的．数学思维运用数学思想方法为媒介作用于思维过程的．在数学知识建立结构过程中，只有促进数学思想方法的发展才能形成广泛的迁移，进而升华为数学思维内容，促进思维结构的完善．

数学思维能力是通过数学基本思想方法为媒介来制约数学思维活动的．在获取具体数学知识过程中，也是通过数学基本思想方法才能提炼、形成和发展数学思维能力，建立数学思维结构．

在思维结构中数学思维的基本成分是人脑认知结构作用于数学对象的形式，其基础是人脑特殊的生理结构及其对客观世界的认识能力．因此，在整个思维过程中，要对自身思维活动的定向、控制及时作出评价，并且利用反馈信息进行调节，以把握数学基本思想方法发展方向，保证“结晶”成的数学思维能力有更广泛的概括性，更进一步掌握好数学基