普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学基础

一元函数微积分与无穷级数

（第二版）

王绵森　马知恩　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

高等数学基础

一元函数微积分与无穷级数

Yiyuan Hanshu Weijifen yu Wuqiong Jishu

（第二版）

王绵森　马知恩　主编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

由西安交通大学编写的普通高等教育“十一五”国家级规划教材——《高等数学基础》(第二版)共分三册,本书是其中的一册,内容包括微积分的理论基础、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用和无穷级数,共四章。

与第一版相比,本书第二版适当降低了教学要求,删去了一些要求较高的理论内容,努力揭示数学概念的本质,注重数学思想方法的讲授和应用能力的培养,加强基本训练,更加符合认知规律,更易于读者接受。

本书体系结构简明严谨,内容丰富,要求适中,应用实例范围广泛,叙述清晰,深入浅出,富于启发性。习题分为 A、B 两类,并配有综合练习题,书末有习题答案和提示。

本书可作为理工科高等学校非数学类专业本科生的教材,也可供其他社会读者阅读与参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学基础. 一元函数微积分与无穷级数 / 王绵森,马知恩主编. —2 版. —北京:高等教育出版社,2010.7

ISBN 978-7-04-029667-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王… ②马… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材②微积分-高等学校-教材③级数-高等学校-教材 Ⅳ.①O13②O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 110258 号

策划编辑 王　强　**责任编辑** 董达英　**封面设计** 张　志　**责任绘图** 尹　莉
版式设计 张　岚　**责任校对** 殷　然　**责任印制** 韩　刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		
印　　刷	高等教育出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	2004 年 6 月第 1 版 2010 年 7 月第 2 版
开　　本	787×960　1/16		
印　　张	22.25	印　　次	2010 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	420 000	定　　价	28.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　29667-00

第二版前言

本套教材(《高等数学基础》,包括《一元函数微积分与无穷级数》、《多元函数微积分与线性常微分方程》、《线性代数与解析几何》三个分册)第一版自2004年7月出版以来,被不少兄弟院校用作相关课程的教材,第二版又被列入普通高等教育"十一五"国家级规划教材。为了进一步提高教材的质量,我们在听取了同行专家、使用过该套教材的教师和读者意见的基础上,总结了近几年来的教学经验,对第一版进行了认真的修改。在保持第一版的基本框架结构和主要特色的基础上,本次修改主要集中在以下几个方面:

1. 精简了次要内容,删去了某些较难的理论,适当降低了难度。例如:删去了二重积分一般换元公式的证明及三重积分的一般换元法,仅保留了二重积分的一般换元公式;删去了空间曲线的曲率、挠率与 Frenet 标架,将平面曲线的曲率以及与此密切相关的平面曲线的弧长、弧微分的内容移到《一元函数微积分与无穷级数》分册中;对二元函数的极限和连续性定义进行了改写,将第一版中要求(x_0,y_0)是函数定义域的聚点改为仅要求函数定义在(x_0,y_0)的邻域中,用与一元函数类似的方法来定义,然后对定义域的边界点等情况再将定义作适当的拓展;将有界闭集上连续函数的性质改为在有界闭域上讨论;二元函数在点(x_0,y_0)处可微的充分条件中删去了该函数"在(x_0,y_0)的邻域内可偏导"的要求。

2. 为了进一步培养学生应用数学知识分析解决实际问题的能力,在《线性代数与解析几何》分册中,新增了"MATLAB 软件简介及其应用举例"一章,供各校选用,既可作为数学实验课的内容,也可穿插在有关内容中讲解。考虑到加强几何直观和应用的重要性,在新版中增加了多元函数的等值线与等值面及其在函数的几何表示、梯度和 Lagrange 乘数法的应用等方面的内容。另外,新版中还增加了一些饶有趣味的应用方面的例题和习题。

3. 考虑到当前我国中学数学教学的实际情况、新版中还适当增加了一些内容或附录。例如:在一元函数中增加了函数的参数表示与极坐标表示;在《一元函数微积分与无穷级数》分册后面编写了"几种常用的曲线"、"几类常用的初等

数学公式”和“复数简介”三个附录;在《多元函数微积分和线性常微分方程》分册后面增加了“部分曲面与空间立体的图形”(共25幅)一个附录。这些内容可供读者选学或查阅。

4. 对某些内容的讲述方法和全套教材的文字表述作了进一步加工,使得本套教材更具可读性和启发性,同时也改正了少数不确切甚至错误之处(例如:误将无穷小量阶的高低看做是无穷小量趋于零的“速度”)。

5. 删去了习题(特别是每章后的习题)中的一些难题,增加了一些基本训练题和应用题。

参加第二版微积分两个分册修订工作的有:马知恩、王绵森、魏战线、武忠祥、常争鸣;参加《线性代数与解析几何》分册修订工作的有魏战线、李继成。

多年来,许多同行专家及使用过本套教材的兄弟院校、西安交通大学的老师和学生们通过多种方式对本套教材第一版提出了很多非常宝贵的意见和建议,这些意见和建议对提高本套教材的质量起到了重要的作用。在此,编者向他们表示诚挚的感谢,并恳请他们对第二版继续提出批评和进一步修改的意见。

编　者

二〇一〇年三月于西安交通大学

第一版前言

本套教材是普通高等教育“十五”国家级规划教材。全套教材共分三册，即《一元函数微积分与无穷级数》、《线性代数与解析几何》、《多元函数微积分与线性常微分方程》，其中的微积分部分是作者编写的《工科数学分析基础》一书的简化本。《工科数学分析基础》是由高等教育出版社出版的面向21世纪课程教材，也是“九五”国家级重点教材，并于2001年获中国高校科学技术一等奖，2002年获国家优秀教材一等奖，适用于高等理工科院校对数学要求较高的非数学类专业的本科生。本套教材则兼顾科技发展的需要和当前我国高等院校的实际情况，对《工科数学分析基础》内容的深、广度作较大幅度的调整，使其适用于多数院校的教学需求。本书在编写的指导思想和内容体系方面继承了《工科数学分析基础》的一些主要特色：

1. 适当拓宽必要的数学基础。与《工科数学分析基础》相比，本套教材虽然删去了实数完备性、确界定理、一致连续、含参变量积分、微分方程稳定性与无限维分析等内容，削减了极限理论以及某些定理的证明，并对级数的一致收敛、二元函数的Taylor公式、Frenet标架、挠率、重积分的一般换元法、线性微分方程组等目录标题前冠以“＊”号，其内容用楷体字排印，不作为教学基本要求。但是，本书仍保留了在集合与映射的基础上讲解函数、极限的基本理论、向量值函数的微分、通过向量值函数的微分来研究曲线与曲面的性质等内容。对于没有给出分析证明的重要定理，也努力通过几何直观或其他方法分析并揭示定理的正确性或定理证明的基本思路，以便使学生在掌握必要的数学知识的同时，在数学的抽象性、逻辑性和严谨性方面受到必要的基本训练，培养他们的理性思维方法，提高数学素养和能力。

2. 注意分析、代数与几何相关内容的有机结合和相互渗透。本套教材从多元函数微分学开始，就注意逐步加强向量和矩阵的运用，利用向量、矩阵和线性代数中的知识来表述微积分中的有关内容，并采用从二维、三维逐步过渡到 n 维的讲解方法。例如，利用Jacobi矩阵来表示向量值函数的导数和微分；用向量值函数的微分来研究曲线和曲面的性质；将第二型线、面积分与向量场的研究结合

起来。另一方面,在线性代数中,又列举了一些分析方面的例题,说明线性代数的某些概念。例如在讲解内积时,介绍了用两个函数乘积的定积分定义函数空间中内积的例子,在矩阵特征值理论中讲解了它在求解线性微分方程组方面的应用等。这样做,既有利于培养学生综合运用数学知识的能力,又能更好地满足现代科技的发展对数学的需求。

3. 强化学生数学应用能力的培养。在讲解数学内容的同时,着力于揭示数学概念的本质和在实际问题中有重要应用的数学思想方法是本书的另一个鲜明特色。例如,编者反复强调了微积分的基本思想方法、局部线性化方法、逼近的思想、最优化方法、微元法以及变量代换的思想和方法等。为了培养学生应用数学解决实际问题的意识、兴趣和能力,书中精选了一批工程、生态、人口、经济、医学,甚至在日常生活方面饶有趣味的应用性例题和习题,并配备了一些综合练习题,供读者选做。

4. 削减次要内容,淡化运算技巧的训练。与某些传统教材相比,本套教材精减了一些次要内容。例如,以链式法则为主线讲解一元函数求导法;以换元法和分部积分法两种基本方法为主线讲解积分法,将一些简单的有理函数、三角有理函数和无理函数的积分作为两种基本积分法的应用例题;将某些近似计算方法移至数学实验等后继课中;每节配备的习题均分为 A、B 两类,微积分部分每章后还配备了一些综合性习题。A 类为基本要求题,致力于基本概念、基本理论、基本运算和应用的训练;B 类题以及每章后配备的习题,可供学有余力的同学选做。

5. 适当采用了一些近代数学的思想、术语和符号,为学生学习近代数学开设一些"窗口"和"接口"。与《工科数学分析基础》相比,本套教材删去了不少要求较高的内容,但仍保留了某些近代数学的思想和观点。例如,将多元函数分为数量值函数与向量值函数,定义为从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的映射;将定积分、重积分、第一型线(面)积分统一为几何形体上的数量值函数的积分;以参数方程为主线讲解曲线与曲面的有关内容等。但在讲解这些内容时,我们更加注意可接受性,采用由直观到抽象、由特殊到一般的方法循序渐进,逐步深入。

本套教材中的《线性代数与解析几何》分册介绍了线性代数和空间解析几何的基本内容,共分八章。该分册采用模块式结构,可根据不同专业大类的教学要求和学时对内容进行取舍。讲完基本内容(除打"*"的部分)需 42~48 学时,讲完全部内容需 56~60 学时。该分册力求将线性代数与解析几何相互结合,相互渗透,并为学习多元函数微积分和线性常微分方程提供必要的准备,因此,它既可与微积分课程配套使用,又可单独作为线性代数课程的教材。

由于学习本套教材的《多元函数微积分和线性常微分方程》分册需要少量线性代数与解析几何的知识,因此使用本套教材可采用两种不同的方法。一种

是将线性代数与解析几何单独设课，与一元函数微积分双轨并进，在学习多元函数微积分与线性常微分方程前完成；另一种是用单轨串连式，即先讲一元函数微积分，再讲线性代数与解析几何，最后讲多元函数微积分。本套教材在《多元函数微积分与线性常微分方程》分册后编写了一个附录，简要介绍了使用该分册时所必须具备的线性代数和解析几何的基本知识。这样，即便对于某些将线性代数在二年级单独设课，而将解析几何放在高等数学课程中讲解的院校（如果不讲线性微分方程组一节），也可用本套教材作为教材。

另外，为了便于在高等数学课程中进行双语教学，编者与美国著名数学家 Fred Brauer 合作，编写了书名为《Fundamentals of Advanced Mathematics》的英文教材，由高等教育出版社正式出版。该书在体系和内容方面与本套教材基本相同，是两本相互配套的教材。因此，一方面，本套教材可作为使用该英文教材进行双语教学师生配套的参考书；另一方面，使用本套教材的读者也可将该英文教材作为一本英文参考书。

参加本套教材编写的有马知恩、王绵森、魏战线、武忠祥、常争鸣和徐文雄。全套教材分三册，其中《一元函数微积分与无穷级数》由王绵森、马知恩主编，《多元函数微积分与线性常微分方程》由马知恩、王绵森主编，《线性代数与解析几何》由魏战线编。本套教材已在西安交通大学电气工程学院等多个教学大班试用过 2～3 届，任课教师提出的许多宝贵意见对书稿的修改完善起了重要作用。借此机会对参加试用的所有教师表示衷心的感谢。同时，感谢高等教育出版社的编辑们，他们为本套教材的出版和质量的提高起了十分重要的作用。

本套教材得到了高等教育出版社和西安交通大学教务处的资助，在此，我们向有关方面一并表示感谢！

本套教材虽几经试用和修改，但由于编者水平所限，加之时间较紧，不妥之处在所难免。恳请专家、同行以及广大读者不吝指正，使本套教材在今后的教学实践中日臻完善！

编　者

二〇〇四年四月于西安交通大学

目　录

绪论　微积分的研究对象和基本思想方法

高等数学是同学们进入大学后学习的一门重要数学基础课,微积分是它的主要内容.由于生产实际的需要于17世纪下半叶创立的微积分是人类智慧的伟大结晶,是人类精神的伟大胜利,是推动工业革命和社会发展的强大动力!微积分中所蕴藏的重要的科学思想和科学方法不但是学习其他科学和从事科学研究必不可少的,而且是一个人的科学素质的重要组成部分.微积分的研究对象和基本思想方法是什么?它与中学已经学过的初等数学(如初等代数与初等几何)有什么不同?下面,就来简要地讲一讲这些问题,以便揭开微积分这座科学殿堂的神秘面纱,为读者探索它的奥秘描绘一幅导游图.

一、微积分的研究对象

大家知道,现实世界中的万事万物,无一不以一定的空间形式(例如,沿直线或曲线,在平面或曲面上)运动变化,在运动变化过程中有关的变量间都遵循着一定的数量关系.下面举几个例子.

例1　壁虎吃苍蝇

在圆柱形水泥管上位于 B 点的一只壁虎发现它的右上方不远处的 A 点有一只苍蝇.为了将苍蝇一口吃掉,壁虎必须在最短的时间内以最快的速度向苍蝇发动进攻.试问,壁虎在水泥管上应选择一条什么样的进攻路线?为了解开这个奥秘,试将圆柱面沿母线剪开,它将展开成平面上的一个长方形(图1).在此平面上,B 点的壁虎要尽快地消灭在 A 点的苍蝇,应当选择 A 和 B 之间的最短路径,也就是连接 A、B 两点的直线段 l.将此长方形重新卷成圆柱形,直线段 AB 就是圆柱面上的一条曲线,称为**圆柱螺旋线**,它就是在圆柱形水泥管上壁虎进攻苍蝇的路线.这个解答与人们对壁虎进攻苍蝇路线的实际观察是非常一致的.圆柱螺旋线是生产和科研中常见的一种曲线,例如工业中常用的弹簧,车床切削圆柱形金属工件形成的铁屑都呈圆柱螺旋线形状.早在1953年,科学家就揭示出

DNA 分子是由两条互相盘绕的平行圆柱螺旋线构成的(图 2). 为了深入研究这类问题,需要根据形成圆柱螺旋线的条件来导出它的方程.

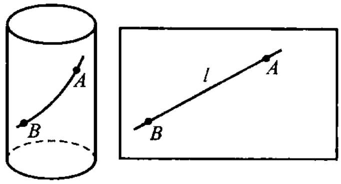

图 1

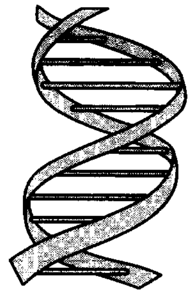

图 2

例 2　警犬搜捕逃犯

警犬之所以成为警察搜捕逃犯的得力助手,是因为它有灵敏的嗅觉. 只要将带有逃犯气味的某种物品让警犬闻一闻,它就能迅速而准确地去捕捉逃犯. 试问:警犬搜捕逃犯的路径是一条什么样的曲线呢(假定搜捕范围是一块平坦地带)? 研究发现,警犬在搜捕逃犯过程中的每一瞬时都是沿着逃犯气味浓度变化最快的方向前进的. 只要能测定逃犯气味浓度的变化规律(一般是所在位置的某种指数函数),那么,利用微积分方法就可以求出警犬搜捕路径的曲线方程. 在一定条件下,这种路径是一条抛物线. 类似地,鲨鱼在海平面上追寻受伤猎物的前进路线也是如此(详见本书多元函数微分学及其应用).

例 3　行星的运动

在浩瀚无垠的星空,行星的运动有无规律呢? 是否也以一定的空间形式运动,在运动变化中遵循一定的数量关系呢? 这是人类自古以来就不断探究的问题. 德国天文学家 Kepler 根据大量的观测资料总结出了行星运动的三大定律. 他发现的第一定律是:行星以椭圆轨道绕太阳旋转,太阳在椭圆的一个焦点上. 这一发现与长期统治人类思想的"地心说"形成了尖锐的矛盾,引起了巨大的轰动和争论. 英国著名科学家 Newton 坚信这一论断的正确性. 他相信,行星的运动规律也符合他的第二定律:$F=ma$. 那么,支配行星运动的力 F 是什么样的力呢? 经过坚忍不拔的努力,他不但发现了支配行星运动的万有引力,而且利用微积分方法准确地计算了行星运动的规律,证明了 Kepler 三大定律的正确性,从而宣告了"地心说"的彻底灭亡.

数学是研究客观事物在运动变化过程中的数量关系和空间形式的科学. 简而言之,数学是研究"数"和"形"的科学. 然而,随着人类对客观事物认识的不断

深化，在数学发展的不同阶段，“数”和“形”的内涵和表现形式也有很大不同.

初等数学所研究的“数”是常数或常量，即在某一运动变化过程中保持不变或相对地保持不变、可以看做一个取固定数值的量. 初等数学所研究的“形”是简单的规则几何形体，例如直线段、圆、规则多边形和多面体等. 而高等数学研究的“数”是变数或变量，即在某一运动变化过程中不断变化可以取不同数值的量；研究的“形”是复杂的、不规则的一般几何形体，例如，曲线、曲面、曲边形和曲面体等.

大家知道，在一运动变化过程中，不同变量的变化不是孤立的，通常是相互联系、相互依赖的，变量之间这种相互依赖的关系称为函数关系. 例如，物体运动的位移 s 随时间 t 的变化而变化，因此，位移 s 是时间 t 的函数，即 $s=s(t)$；细棒的质量 m 随棒长 x 的变化而变化，因此，质量 m 是棒长 x 的函数，即 $m=m(x)$ 等. 函数正是微积分的研究对象.

进一步研究发现，现实世界中的变量可以分为两类：一类是均匀变化或均匀分布的量；另一类是非均匀变化或非均匀分布的量. 例如，做匀速运动的物体，无论从什么时刻算起，单位时间内所通过的位移都是相同的，因此我们说位移 s 随时间 t 是均匀变化的；而对作变速运动的物体，单位时间内通过的位移一般随计算时刻的变化而变化，所以位移 s 随时间 t 是非均匀变化的. 又如，无论从物质细棒上什么位置算起，如果单位棒长上分布的物质的质量都一样，那么就说质量 m 在细棒上是均匀分布的，否则是非均匀分布的. 对于均匀变化或均匀分布量的研究，主要是初等数学的任务，而微积分主要研究非均匀变化或非均匀分布的量. 以后我们将会看到，均匀变化或均匀分布的量可以用线性函数来表示，几何上表示为一条直线（或一块平面），而非均匀变化或非均匀分布的量则表现为非线性函数，几何上表示为一条曲线（或一片曲面）. 因此，微积分的主要研究对象是非线性函数.

二、微积分的基本思想方法

从研究常量到研究变量，从研究规则的几何形体到研究不规则的几何形体，是人类对自然界认识的一大飞跃，也是数学发展中的一个转折点. 研究对象不同，研究的方法自然也不相同. 初等数学主要采用形式逻辑的方法，静止地、孤立地进行研究，而高等数学则有很大的不同. 下面以两个经典问题为例说明微积分的基本思想方法.

问题 1　求变速直线运动的瞬时速度问题

已知一作变速直线运动物体的位移 s 随时间 t 变化的规律为 $s=s(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$，求该物体在运动过程中各个不同时刻的速度（称为**瞬时速度**）.

如果物体的运动是匀速的，那么，在运动过程中，位移 s 随时间 t 的变化是

均匀的. 也就是说，不论从什么时刻 t_0 开始，在相同的时间 $\Delta t=t-t_0$ 内，物体通过的位移 $\Delta s=s(t)-s(t_0)$ 都相同. 在这种情况下，只要用初等数学的除法，由

$$v=\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=\frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{0.1}$$

就能求得该物体在各时刻的瞬时速度.

现在设物体的运动是变速的，从而位移 s 随时间 t 的变化是非均匀的，也就是说，在相同的时间 Δt 内通过的位移不尽相同. 在这种情况下，(0.1)式只能表示在时间段 $[t_0,t_0+\Delta t]$ 内的平均速度，而不能表示各个不同时刻的瞬时速度. 怎样解决这个问题呢？如果注意到当 $|\Delta t|$ 很小（今后用 $|\Delta t|\ll 1$ 表示）时，速度的变化也很小，物体可以近似看成是匀速运动. 就是说，在很小的时间段内位移随时间的变化可近似看成是均匀的，那么，由(0.1)式求得的平均速度就可以作为 t_0 时刻瞬时速度 $v(t_0)$ 的近似值，即

$$v(t_0)\approx\frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{0.2}$$

不难看出，$|\Delta t|$ 越小，上面的近似值越精确. 因此，如果当 $\Delta t\to 0$（即 $t\to t_0$）时平均速度 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 的极限存在，我们就把这个极限值作为物体在 t_0 时刻的瞬时速度，即

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{\Delta t}. \tag{0.3}$$

问题 2　求变速直线运动的位移问题

已知作变速直线运动物体的速度 v 随时间 t 的变化规律 $v=v(t)\ (a\leqslant t\leqslant b)$，求物体在时间区间 $[a,b]$ 内通过的位移 s.

如果运动的是匀速的，那么，速度 v 是常量，位移 s 随时间 t 的变化是均匀的. 因此，物体在时间区间 $[a,b]$ 内通过的位移只要用初等数学的乘法就能求得，即

$$s=v\times(b-a). \tag{0.4}$$

现在设运动是非匀速的，速度 v 是变量，位移 s 随时间 t 的变化是非均匀的，因此，不能简单地用上述方法求得物体在 $[a,b]$ 内通过的位移. 然而，如果将 $[a,b]$ 任意分割为若干小区间，并且每个小区间（称为 $[a,b]$ 的子区间）的长度 $|\Delta t|\ll 1$，那么像问题 1 中那样，在每个子区间内物体的运动都可近似看成匀速的（即位移随时间的变化可近似看成是均匀的），从而就能利用乘法公式(0.4)求得位移的近似值. 再将每个子区间内求得的位移的近似值相加，就得到整个区间 $[a,b]$ 内通过的总位移的近似值，而且 $|\Delta t|$ 越小，这个近似值越精确. 如果当每个子区间的长度无限趋近于零时，总位移近似值的极限存在，该极限值就是总位移的精确值. 上述思路可以归纳为如下四个步骤：