高职高专精品课程规划教材
GAOZHIGAOZHUANJINGPINKECHENGGUIHUAJIAOCAI

高等数学（下册）

侯同运⊙主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高职高专精品课程规划教材

高等数学(下册)

主　编　侯同运

副主编　翟祥傺　吕春燕　邵婷婷

林艳斌　张继奎

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

高等数学.下册/侯同运主编. —北京：北京理工大学出版社，2009.8（2010.7 重印）

ISBN　978－7－5640－2618－9

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 侯…　Ⅲ. 高等数学－高等学校：技术学校－教材

Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 142734 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 /（010）68914775（办公室） 68944990（批销中心） 68911084（读者服务部）
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京国马印刷厂
开　　本 / 787 毫米 × 960 毫米　1/16
印　　张 / 19.75
字　　数 / 404 千字
版　　次 / 2009 年 8 月第 1 版　2010 年 7 月第 2 次印刷
印　　数 / 5001～7000 册　　责任校对 / 陈玉梅
总 定 价 / 33.00 元（共 2 册）　　责任印制 / 周瑞红

图书出现印装质量问题，本社负责调换

前　言

在科学技术迅猛发展的今天，各个领域对所需人才的数学知识和应用能力的要求不断提高。高等数学作为一门专业基础课，其理论性强，对学生的抽象思维能力、逻辑思维能力要求较高，这导致学生对高等数学的学习产生畏惧心理，学习兴趣不足。解决这些问题要求数学教育工作者解放思想，立足高职学生的学习现状，针对高职各专业对高等数学的教学需求，不断更新教材的形式和内容，开发出以培养高职教育职业能力为本质特征的新教材。正是在这一思想的指导下，我们组织山东理工职业学院、枣庄科技职业学院等院校的专家教授编写了适合高等职业院校使用的《高等数学》教材。新编《高等数学》继续以“掌握概念、强化应用、培养技能”为重点，充分体现“以应用为目的，以必需够用为度”的高职高专教学基本原则，理论描述精确简约，具体讲解明晰易懂，很好地兼顾了高职高专各专业后续课程教学对数学知识的范围要求，同时也充分考虑了学生可持续学习的需要。本教材包括一元函数微积分、微分方程、空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数等内容。每节配有足量的习题及答案，书末附有高等数学常用公式、常用的平面曲线图等。

本教材具有以下特点：

（1）结构合理、由浅入深、思路流畅、简明易懂；

（2）突出强调数学概念与实际问题的联系；

（3）适度淡化逻辑论证，充分利用几何说明帮助学生理解有关概念和理论；

（4）充分考虑高职高专学生的数学基础，较好地处理了初等数学与高等数学的过渡与衔接；

（5）优选了微积分在几何、物理、经济等多方面的应用实例，适应专业面宽；

（6）每节配有足量习题，便于学生巩固基础知识、提高基本技能、加强对教材内容的理解，有利于培养学习应用数学知识解决实际问题的能力。

本教材按 120 学时安排设计，教学中授课教师可根据学生所学专业对教材内容作出适当的调整，以充分体现高职不同专业对高等数学教学内容的具体需求。本教材上册由山东理工职业学院田玉伟担任主编，山东理工职业学院的郑立、赵永贞、翟雪燕、欧阳金刚、高德平担任副主编。下册由枣庄科技职业学院的侯同运担任主编，枣庄科技职业学院的翟祥傺、吕春燕，济宁医学院的邵婷婷、山东水利职业学院的林艳斌、山东化工技师学院张继奎担任副主编。具体分工为如下，第一章：田玉伟；第二章：郑立；第三章：翟雪燕；

第四章：赵永贞；第五章：欧阳金刚、高德平；第六章：侯同运；第七章：翟祥傺；第八章：吕春燕；第九章：邵婷婷、林艳斌；第十章：张继奎、王智。全书各章附录及习题答案与提示均由田玉伟撰写。全册由田玉伟主编统稿。

本教材在编写过程中得到了山东鲁东大学数学科学学院杨振光院长、王秀红教授的大力支持，在此一并致以诚挚的谢意。由于编者水平有限，书中仍难免有不妥之处，恳请各教学单位和读者在使用教材的过程中给予关注，并将意见和不足及时反馈给我们，以便下次修订时改进。

所有意见和建议请发至：rongcooltyw@163.com。

编　者

2009 年 6 月

目　录

第 7 章 微分方程

微积分学所研究的对象为函数，它是用来反映客观现实世界中量与量之间的数量关系，但由于现实世界中事物发展运动规律的复杂性，因此并非所有研究的变量之间的关系（函数）都直接容易用具体的函数关系来描述，而有时更容易刻画为这些变量以及它们的导数（或微分）间的关系式，在数学上称之为微分方程.

7.1 微分方程的概念

7.1.1 微分方程及微分方程的阶

【例 7.1.1】 物体冷却过程的数学模型.

实验证明：一块热的物体，其温度下降的速度是与其自身温度及其所在介质的温度的差值呈正比关系；同样，一块冷的物体，其温度上升的速度是与其自身温度及其所在介质的温度的差值呈正比关系. 这就是物理学中的牛顿加热及冷却定律.

现有一杯温度为 100 ℃的开水，其周围空气的温度恒为 20 ℃. 根据牛顿冷却定律，当开水温度下降时，开水降温的速度也随之减慢，这是因为开水和空气的温度差在逐渐减小，最终冷却的速度趋于零，同时开水的温度也趋于空气的温度，经分析该降温过程可用图 7.1.1 表示.

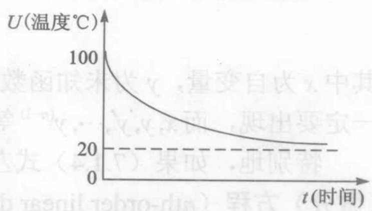


图 7.1.1

一般地，设物体在时刻 t 的温度为 $U=U(t)$，物体所处的介质温度为 U_a（为常数），温度的变化速度用 $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$ 来表示. 而热量总是从温度高的物体向温度低的物体传导，因而有温差 $U-U_a$ 恒正（$U>U_a$）；同时物体将随时间的推移逐渐冷却，故温度变化的速度 $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$ 恒负，因此由牛顿冷却定律得到物体冷却过程数学模型为

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=-k(U-U_a) \tag{7.1.1}$$

其中 $k>0$ 为比例常数，称为冷却系数.

上面物理问题中所建立的物体冷却过程的数学模型（7.1.1）为含有未知函数以及未知函数的导数的方程. 一般地，凡表示为未知函数、未知函数的导数以及自变量之间的关系的方程称为**微分方程**（differential equation），有时也简称为**方程**. 进一步，若方程中的未知函数为一元函数，就称为**常微分方程**（ordinary differential equation）；若方程中的未知函数为多元函数（导数为未知函数的偏导数），就称为**偏微分方程**（partial differential equation）. 显然方程（7.1.1）为常微分方程，而方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\sin(x+y)$$

为偏微分方程. 本章中只讨论常微分方程，因此以后所提到的微分方程，如果未作特殊说明，一般都指常微分方程.

我们还注意到在方程（7.1.1）中，只含有未知函数的一阶导数，我们称这样的方程为**一阶微分方程**（first-order differential equation）.

一般地，若方程中未知函数的最高阶导数为 n 阶，就称其为 **n 阶微分方程**（nth-order differential equation），简称为 **n 阶方程**，并称方程中未知函数导数的最高阶数 n 为方程的**阶**（order）. 例如，方程

$$y''-2y'+y=0 \tag{7.1.2}$$

为二阶微分方程；方程

$$y'''+(\sin x)y'+e^x y=x+5 \tag{7.1.3}$$

为三阶微分方程.

n 阶方程的一般形式为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{7.1.4}$$

其中 x 为自变量，y 为未知函数；$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$ 是 $x,y,y',\cdots,y^{(n)}$ 的已知函数关系式，且 $y^{(n)}$ 一定要出现，而 $x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}$ 等变量可以不出现.

特别地，如果（7.1.4）式左端函数 F 为 $y,y',\cdots,y^{(n)}$ 的线性函数，则称此方程为 **n 阶线性（微分）方程**（nth-order linear differential equation），一般形式为

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x) \tag{7.1.5}$$

其中 $a_1(x),\cdots,a_{n-1}(x),a_n(x)$ 和 $f(x)$ 均为自变量 x 的已知函数. 例如，方程（7.1.2）、方程（7.1.3）均为线性方程.

不是线性方程的微分方程，统称为**非线性（微分）方程**（non-linear differential equation）.

7.1.2 微分方程的解

在研究实际问题中，我们需要找出满足微分方程的函数（解微分方程），也就是说，找出

这样的函数，将其带入方程中能使该方程成为恒等式，这个函数就称为该方程的**解**（solution）.

例如，对于方程（7.1.1）式考虑函数

$$U=U_\alpha+C\mathrm{e}^{-kt} \qquad (C\text{ 为一任意常数}) \tag{7.1.6}$$

将（7.1.6）式带入方程（7.1.1）式中，可以得到

左边 $=\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=-kC\mathrm{e}^{-kt}$，

右边 $=-k(U_\alpha+C\mathrm{e}^{-kt}-U_\alpha)=-kC\mathrm{e}^{-kt}$.

则函数（7.1.6）式能使方程（7.1.1）式成为恒等式，因此函数 $U=U_\alpha+C\mathrm{e}^{-kt}$ 为方程（7.1.1）式的解.

一般地，如果函数 $y=\varphi(x)$ 满足方程（7.1.4）式，即

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))\equiv 0$$

则称函数 $y=\varphi(x)$ 为方程（7.1.4）式的解.

若方程（7.1.4）式的解中含有 n（与方程的阶相同）个相互独立的任意常数，即

$$y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n) \quad (c_1,c_2,\cdots,c_n\text{ 为 }n\text{ 个相互独立的任意常数})$$

这样的解就称为方程（7.1.4）式的**通解**（general solution）. 在通解中，当任意常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 取为确定的值而得到的相应的解，称为方程（7.1.4）式的一个**特解**（particular solution）.

根据通解的定义，不难看出（7.1.6）式不仅是方程（7.1.1）式的解，它也是该方程的通解.

类似地，还可以验证 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x$（$C_1,C_2$ 为任意常数）为方程（7.1.2）式的通解.

在实际问题中，往往需要求的不是方程的通解，而是具有某特点的特解，这就需要确定方程通解中任意常数的具体取值. 为了求出任意常数的值，就需要一个确定常数的附加条件，我们称这个附加条件为方程的**初始条件**（initial conditions）. 例如，我们通过把初始条件 $t=0$ 时 $U=100$（或 $U\big|_{t=0}=100$）代入方程（7.1.1）式的通解（7.1.6）式中，可得到

$$100=C\mathrm{e}^0+U_\alpha\text{，即 }C=100-U_\alpha.$$

于是，函数 $U=U_\alpha+(100-U_\alpha)\mathrm{e}^{-kt}$ 为方程（7.1.1）式的满足初始条件 $U\big|_{t=0}=100$ 的特解. 一般地，n 阶方程（7.1.4）式常见的初始条件为

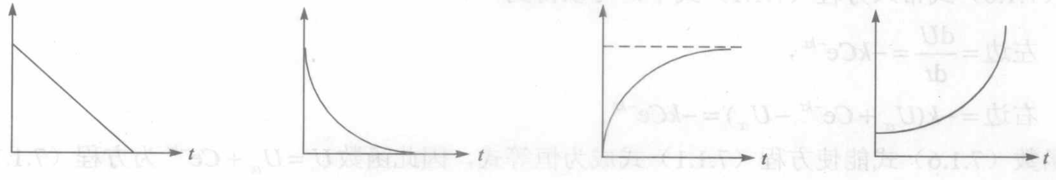
$$y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_1,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$$

或 $y\big|_{x=x_0}=y_0,y'\big|_{x=x_0}=y_1,\cdots,y^{(n-1)}\big|_{x=x_0}=y_{n-1}$.

其中 $x_0,y_0,y_1,\cdots,y_{n-1}$ 为 $n+1$ 个给定的常数. 求微分方程满足某个初始条件的解的问题称为微分方程的**初值问题**（initial value problem）.

习 题 7.1

1. 把图 7.1.2 中各图像分别与下边的说明对应起来.



（a）（b）（c）（d）

图 7.1.2

（1）一杯放在厨桌上的冰水的温度.

（2）在一个盈取利息的银行账户中存入 500 元后此账户中钱的数目.

（3）匀减速运动的汽车的速度.

（4）一块在高炉中加热现在被取出使其自然被冷却的钢的温度.

2. 下列等式中哪些是微分方程？

（1）$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}+2\mathrm{e}^{2x}=\dfrac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x}+1)}{\mathrm{d}x}$；（2）$u'v-uv'=v^2\left(\dfrac{u}{v}\right)'$；

（3）$y''-\mathrm{e}^x\sin 2x-5y=2y'$；（4）$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}-s=t$.

3. 试说出下列各微分方程的阶数，并指明其是否为线性方程.

（1）$xy'+yy'=x$；（2）$(7x-6y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=0$；

（3）$x^2y''-xy'+y=0$；（4）$x^2y'''+2y''+\mathrm{e}^xy=x^3$；

（5）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$；（6）$2y\mathrm{d}x-(x+y^4)\mathrm{d}y=0$.

4. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程：

（1）曲线在点 (x,y) 处的切线的斜率等于该点的横纵坐标的平方和；

（2）某商品的需求量 Q 对价格 p 的弹性为 $-\dfrac{5p+2p^2}{Q}$.

5. 试找出下面哪个函数是哪个微分方程的解（注：一个函数可能是不只一个方程的解，也可能不是任何一个方程的解；一个方程也可能有不只一个解）

（a）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-2y$ （1）$y=2\sin x$

（b）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2y$ （2）$y=\sin 2x$

（c） $\dfrac{d^2y}{dx^2}=4y$　　　　（3） $y=e^{2x}$

（d） $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-4y$　　　　（4） $y=e^{-2x}$

6. 在下列各题中，确定函数关系式中所含的参数，使函数满足所给的初始条件：

（1） $x^2-y^2=C, y\big|_{x=0}=5$；

（2） $y=(C_1+C_2x)e^{2x}, y\big|_{x=0}=0, y'\big|_{x=0}=1$；

（3） $y=C_1\sin(x-C_2), y\big|_{x=\pi}=1, y'\big|_{x=\pi}=0$.

习题答案与提示

1. 如图 7.1.3 所示.

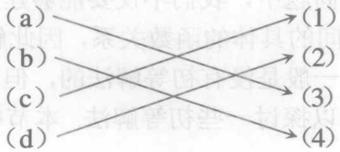


图 7.1.3

2.（1）、（2）不是微分方程，（3）、（4）是微分方程.

3. 如表 7.1.1 所示.

（1）	一阶非线性
（2）	一阶非线性
（3）	二阶线性
（4）	三阶线性
（5）	一阶线性
（6）	一阶线性（ y 为自变量）

4.（1） $\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$；

（2） $\dfrac{p}{Q}\dfrac{dQ}{dp}=-\dfrac{5p+2p^2}{Q}$ （或 $\dfrac{dQ}{dp}=-(5+2p)$ ）.

5. 如图 7.1.4 所示.

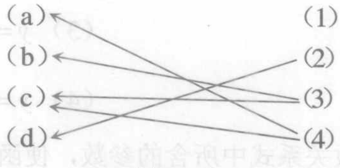


图 7.1.4

6. （1） $x^2-y^2=-25$；

（2） $y=x\mathrm{e}^{2x}$；

（3） $y=-\cos x$.

7.2　一阶微分方程

在解决有关微分方程的实际问题中，我们不仅要能够建立起微分方程模型，同时还需要求解微分方程，找到方程中变量间的具体的函数关系，因此解微分方程也是一个重要的问题. 解微分方程与解代数方程一样，一般是没有初等解法的，但对于具有某些特点的较为特殊类型的一阶方程来说，我们还是可以探讨一些初等解法. 本节中将介绍几类特殊的一阶微分方程的解法.

7.2.1　分离变量方程

定义 7.2.1　称形如

$$f(x)\mathrm{d}x=g(y)\mathrm{d}y \tag{7.2.1}$$

的一阶微分方程为**分离变量方程**.

对于分离变量方程（7.2.1）式可通过**积分法**求解，即在方程（7.2.1）式的两端分别对变量 x 和 y 积分可得

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int g(y)\mathrm{d}y+C \tag{7.2.2}$$

其中 C 为任意常数，则（7.2.2）式为方程（7.2.1）式的通解.

注意　（1）这里规定 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x$ 表示函数 $\varphi(x)$ 的某个原函数，而将（7.2.2）式中两端不定积分中的任意常数合并在一起，单独写出来记为 C；

（2）在方程的两端分别对不同的变量进行积分是正确的. 我们知道方程中 y 是 x 的函数，于是 $y=y(x),\mathrm{d}y=y'(x)\mathrm{d}x$，则（7.2.1）式可以写成

$$f(x)\,\mathrm{d}x=g[y(x)]y'(x)\,\mathrm{d}x$$

在上式两端对 x 积分得

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int g[y(x)]y'(x)\mathrm{d}x+C$$

再在上式右端部分作变量替换 $y=y(x),\mathrm{d}y=y'(x)\mathrm{d}x$，则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int g(y)\mathrm{d}y+C$$

【例 7.2.1】 求方程

$$x\mathrm{d}x=y\mathrm{d}y \tag{7.2.3}$$

的通解.

解 此方程为分离变量方程，在方程两边分别对 x 和 y 积分得

$$\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}y^2+C_1$$

即 $x^2-y^2=2C_1$，因 C_1 为任意常数，所以记 $2C_1=C$ 仍为任意常数，便得方程（7.2.3）式的通解 $x^2-y^2=C$.

例 7.2.1 中最后所解得方程（7.2.3）式的解并不是一个关于自变量 x 的函数关系式，而是一个关于 x 和 y 的二元方程，且可以验证此二元方程依隐函数求导法求导是满足方程（7.2.3）式的. 我们把这种由二元方程确定的隐函数所给出微分方程的解称为方程的**隐式解**（implicit solution），而直接表示为自变量的函数关系式的微分方程的解称为方程的**显式解**（explicit solution）.

7.2.2 可分离变量方程

定义 7.2.2 称形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(x)\psi(y) \tag{7.2.4}$$

或

$$M_1(x)M_2(y)\mathrm{d}x=N_1(x)N_2(y)\mathrm{d}y \tag{7.2.5}$$

的一阶微分方程为**可分离变量方程**（equation with the variables separated）.

对于可分离变量方程采用**分离变量法**求解，即首先对方程进行分离变量化为分离变量方程，然后再进行积分. 具体的求解程序为：

（1）分离变量. 将（7.2.4）式或（7.2.5）式分离变量，化为分离变量方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)}=\varphi(x)\mathrm{d}x, \tag{7.2.6}$$

或

$$\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\mathrm{d}y=\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\mathrm{d}x. \tag{7.2.7}$$

（2）积分. 在（7.2.6）式或（7.2.7）式两端进行积分，得方程（7.2.4）式或（7.2.5）式的通解为

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)} = \int \varphi(x)\mathrm{d}x + C,$$

或

$$\int \frac{N_2(x)}{M_2(x)}\mathrm{d}y = \int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\mathrm{d}x + C.$$

注意 与解代数方程相类似，在化可分离变量方程为分离变量方程时，可能会有丢解现象. 实际上我们可以验证：（1）如果常数 y_0 是方程 $\psi(y)=0$ 的根，则常函数 $y=y_0$ 也是方程（7.2.4）式的解；（2）如果常数 y_0 是方程 $M_2(y)=0$ 的根，则常函数 $y=y_0$ 也是方程（7.2.5）式的解.

【例 7.2.2】 求方程 $4x\mathrm{d}x-5y\mathrm{d}y=5x^2y\mathrm{d}y-2xy^2\mathrm{d}x$ 的通解.

解 合并同类项得

$$2x(2+y^2)\mathrm{d}x = 5(1+x^2)y\,\mathrm{d}y$$

分离变量，得 $\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{5y}{2+y^2}\mathrm{d}y$，积分得

$$\ln(1+x^2)=\frac{5}{2}\ln(2+y^2)+C_1$$

即 $1+x^2=\mathrm{e}^{C_1}(2+y^2)^{5/2}$，则原方程的通解为 $1+x^2=C(2+y^2)^{5/2}$. 其中 $C=\mathrm{e}^{C_1}$ 为大于零的任意常数.

【例 7.2.3】 已知某商品的需求弹性为单位弹性，且当价格 $P=1$ 时，需求量 $Q=5\,000$. 求该商品的需求函数.

解 依题意可得微分方程

$$\frac{p}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=-1$$

分离变量，得 $\frac{\mathrm{d}Q}{Q}=-\frac{\mathrm{d}P}{P}$，积分得

$$\ln Q = -\ln P + C_1$$

则方程的通解为 $Q=\frac{C}{P}$，其中 $C=\mathrm{e}^{C_1}$ 为大于零的任意常数.

将 $Q|_{P=1}=5\,000$ 代入通解，可得 $C=5000$. 因此，该商品的需求函数为

$$Q=\frac{5\,000}{P}$$

另外，对于形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的一阶微分方程，虽然它本身不是可分离变量方程，但是通

过变量代换（令 $\frac{y}{x}=u$ 或 $y=ux$）可以化为可分离变量方程来求解.

【例 7.2.4】 求微分方程 $y'=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$ 的通解.

解 令 $y=xu$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=u+\tan u.$$

即 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\tan u$，分离变量，得

$$\cot u\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

积分得 $\ln|\sin u|=\ln|x|+C_1$，即 $\sin u=\pm\mathrm{e}^{C_1}x$，将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式，得

$$\sin\frac{y}{x}=Cx.$$

其中 $C=\pm\mathrm{e}^{C_1}$ 为不等于零的任意常数.

此外，$\sin\frac{y}{x}\equiv 0$ 即 $y=k\pi x$（$k\in\mathbf{Z}$）也是方程的解. 如果 $C=0$ 则 $y=k\pi x$（$k\in\mathbf{Z}$）也就包括在其中，所以方程的通解为

$$\sin\frac{y}{x}=Cx，\ C\text{ 为任意常数}.$$

【例 7.2.5】 已知生产某种产品的总成本 C 由可变成本与固定成本两部分构成. 假设可变成本 y 是产量 x 的函数，且 y 关于 x 的变化率等于产量平方与可变成本平方之和 (x^2+y^2) 除以产量与可变成本之积的二倍 $(2xy)$；固定成本为 10；$x=1$ 时，$y=3$. 求总成本函数 $C=C(x)$.

解 依题意，有微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^2+y^2}{2xy}.$$

将原方程写成 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^2+y^2}{2xy}=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$，这是齐次方程. 令 $\frac{y}{x}=u$，则有

$$y=xu,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

代入原方程，得 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1+u^2}{2u}$，分离变量得 $\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{2u}{1-u^2}\mathrm{d}u$，积分得