高普考、高普檢、特考
公務員各類考試　**參考用書**
大專、五專、商職學生

統計學九百題

附歷屆高普特考、留考、研究所入學考試試題解答

（上　冊）

黃　琼　珠　編譯

五南出版社　印行

本書共分十七章，每章計列綱要、問題解答、補充問題及試題詳解四部份，凡八七五題，內容精闢。各章前三部分係譯自Murray R. Spiegel博士所著之「統計學理論及問題」：後部份則爲歷屆高普特考、留考、及研究所入學考試試題之解答。舉凡有關統計學之各類型問題，皆已搜羅無遺，讀者如能詳加演練、專心研討，則非但能貫通統計學原理，更能了解考試命題之重點及趨勢，實爲參加各類考試之最佳參考用書。

五南出版社

統計學九百題

附：歷屆高普特考、留考、研究所入學考試試題解答

目　　錄

（上　冊）

第六章　基本機率理論

機率的傳統定義．機率的相對次數定義．條件機率．獨立和相依事件．相斥事件．不連續機率分配．連續機率分配．數學上的期望值．整體和樣本平均數變異數間關係．組合分析．排列．組合．機率對點集合理論的關係．

第七章　二項分配、常態分配和波爾生分配

二項分配．二項分配之性質．常態分配．常態分配的特性．二項分配和常態分配的關係．波爾生分配．波爾生分配之性質．二項分配和波爾生分配的關係．多項分配．抽樣次數分配和理論分配的配合．

第八章　基本抽樣理論

抽樣理論．隨機抽樣．隨機號碼．放回抽樣和不放回抽樣．樣本統計量分配．樣本平均數分配．樣本比率分配．抽樣的差異分配和總和分配．標準誤．

第九章　統計推定理論

母數推定．不偏推定值．有效推定量．點推定和區間推定．可靠性．整體母數之信賴區間推定．平均數的信賴區間推定．比率之信賴區間．差異及總和的信賴區間．標準差的信賴區間．可能機誤．

第十章　統計決策理論—假設和顯著性測驗

統計決策．統計假設．假設和顯著性測驗．第一種和第二種誤差．顯著水準．包含常態分配的試驗．單尾和雙尾測驗．特殊測驗．OC曲線．管制圖．有關樣本差的顯著性測驗．有關二項分配的測驗．

下 册 簡 目

第十一章　小樣本理論

第十二章　卡方測驗

第十三章　曲線配合和最小平方法

第十四章　相關理論

第十五章　複相關和偏相關（淨相關）

第一章　變數和圖表

本章要點

統計學

統計學是有關於收集，組織，彙總，資料，及顯示所分析的資料，並作結論的科學方法，根據這些分析以作合理的決策的一門科學。

狹義而言，即指用來指示資料本身或從這些資料導出來的數字，例如，平均數……等。

整體和樣本—敍述統計學和歸納統計學

收集有關一羣人或一些事物特徵的資料，諸如：一所大學，其學生的身高、體重等，通常很難觀察其整體中的每一份子，尤其是當人數為數很多時。故吾人在作此類收集工作，通常不採觀察全體的方法，而是就全體中抽出一部分加以仔細觀察其特徵，這一小部分稱為樣本。

一個整體，其數量可能是有限的，或無限的，例如，在某一特定日子，一工廠所生產的螺旋釘，為數有限，然而，連續地投擲一銅板，所出現的可能結果（正面，反面）所組成的整體，其數目則是無限的。

如果一樣本是代表一整體，則由分析該樣本便可推得該整體的重要結論，用來處理在這樣的推論是正確的情況下，所用的統計學稱為歸納統計學。因為這種推論不可能是絕對正確無誤，因此通常也利用機率來陳述其結果。

如果統計學只是用來描述或分析一所予之羣體，而不須作任何推論者，稱為敍述統計學。

在研究統計學以前，我們先來複習一些重要的數學觀念。

間斷的變數和連續的變數

一個變數即是一個符號，像 X，Y，H，x，B，等，這些能假定爲任何一組值，故稱爲變數的定義域，如果該變數只能假定爲唯一之固定值，則稱爲常數。

如果一變數能代表兩所予值間之任何數值，則稱其爲連續變數，否則，稱爲間斷的變數或分立的變數。

例 1. 一家庭孩子的數目 N，它可代表 0，1，2，3，… 中任何一個值，但不能是 2.5 或 3.842，所以它是一個間斷的變數。

例 2. 一個人的高度 H，它可以是 62 吋，63.8 吋，或 65.8341 吋，這全賴測量的精確度，故是一個連續的變數。

資料若能由一分立的變數或一連續的變數來描述，則前者稱爲分立的資料，後者稱爲連續的資料。1000 家庭中每個家庭的孩子數目是一個間斷資料的例子，但是 100 位大學生之高度則是一個連續資料的例子。

把變數的觀念擴展到非數字領域，有時也是相當方便的，例如，彩虹的顏色 C，它可代表紅、橙、黃、綠、藍、靛、紫，通常也可以用數字來替代這些變數，例如，用 1 代表紅色，2 代表橙色等等。

資料的巡迴

一個數字巡迴的結果，如 72.8 最接近的單位是 73，因 72.8 在 72 與 73 之間比較起來較接近 73. 相同地，72.8146 巡迴至最接近的百分位小數之數字是 72.81 而不是 72.82。

當巡迴 72.465 至其最接近的百分位小數時，我們便遭到困難，因爲 72.465 距 72.46 和 72.47 有相等的距離，這種情形下，通常巡迴至 5 以前的偶數，因此 72.465 巡迴至 72.46，183.575 巡迴至 183.58，當 116,050,000 巡迴至最接近的百萬數時，是 116,000,000，當我們運算的數字很大時，這種作法可以使累積的巡迴誤差減至最小。

科學的記數法

即把一數字寫成 10 的乘羃

例 1. $10^1=10$，　$10^2=10\times10=100$，　$10^5=10\times10\times10\times10\times10=100{,}000$，　$10^8=100{,}000{,}000$

例 2. $10^0=1$，　$10^{-1}=0.1$，　$10^{-2}=0.01$，　$10^{-5}=0.00001$

例 3. $864{,}000{,}000=8.64\times10^8$，　$0.00003416=3.416\times10^{-5}$

通常我們利用括號或一點來表示兩個或兩個以上數字的相乘，因此

$$(5)(3) = 5 \cdot 3 = 5 \times 3 = 15$$

$$(10)(10)(10) = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

但是當字母被用來代表數字時，括號或點，通常都被省略，例如

$$ab = (a)(b) = a \cdot b = a \times b$$

科學的記數法，在計算上是很有用的，尤其在定小數點位置時，其用法如下，

$$(10^p)(10^q) = 10^{p+q}, \quad \frac{10^p}{10^q} = 10^{p-q}$$

p，q 爲任一數字。

10^p，p 稱爲指數，10 稱爲底數

例 1. $(10^3)(10^2) = 1000 \times 100 = 100{,}000 = 10^5$（即 10^{3+2}）

$$\frac{10^6}{10^4} = \frac{1{,}000{,}000}{10{,}000} = 100 = 10^2 \text{（即 } 10^{6-4}\text{）}$$

例 2. $(4{,}000{,}000)(0.0000000002) = (4 \times 10^6)(2 \times 10^{-10})$

$$= (4)(2)(10^6)(10^{-10}) = 8 \times 10^{6-10} = 8 \times 10^{-4} = 0.0008$$

例 3. $\dfrac{(0.006)(80.000)}{0.04} = \dfrac{(6 \times 10^{-3})(8 \times 10^4)}{4 \times 10^{-2}} = \dfrac{48 \times 10^1}{4 \times 10^{-2}}$

$$= \left(\frac{48}{4}\right) \times 10^{1-(-2)} = 12 \times 10^3 = 12{,}000$$

有效數字

如果一身高的精確記錄是65.4吋，即表示其眞實的高度介於65.35吋，和65.45吋間，精確的數字（暫且擱置用來確定小數點的0），稱爲有效數字。

例 1. 65.4 有三個有效數字。

例 2. 4.5300 有五個有效數字

例 3. $0.0018 = 1.8 \times 10^{-3}$ 有二個有效數字

例 4. $0.001800 = 0.001800 = 1.800 \times 10^{-3}$ 有四個有效數字

凡和計算有關的數字，都有無窮多的有效數字，我們很難決定那一個是有意義的，例如 186,000,000 可能有 3，4，……9，個有效數字，如果吾人知道它有五個有效數字，則該數字最好記爲 186.00 百萬或 1.8600×10^8

計算

計算乘、除和開根號時，其最後的結果的有效數字可能不會比運算數字中，具有最少有效數字者多。

例1．$73.24 \times 4.52 = (73.24)(4.52) = 331$

2．$1.648/0.023 = 72$

3．$\sqrt{38.7} = 6.22$

4．$(8.416)(50) = 420.8$　如果 50 是正確的數字

在計算加、減時，其最後結果在小數點後面的有效數字不會比運算數字小數點後面的有效數字多。

例1．$3.16 + 2.7 = 5.9$

2．$83.42 - 72 = 11$

3．$47.816 - 25 = 22.816$，如果 25 是正確的

涵數

如果一變數 X 能對應一個或更多的變數 Y 的值，我們稱 Y 是 X 的一涵數，寫成 $Y = F(X)$.

變數 X 稱爲獨立變數，Y 稱爲非獨立變數，對於每一 X 值若只有一個 Y 值與之對應，則稱 Y 是 X 的一個單值涵數，否則稱爲 X 的複值涵數。

例1．美國的人口總數 P 是時間 t 的一個涵數，則寫成 $P = F(t)$.

2．一垂直彈簧的伸展度 S 是其尾端所加重量 W 的一個涵數，以符號表示爲 $S = G(W)$.

在兩個變數間的涵數對應關係通常是用一表格敍述，然而也可以用該變數的方程式表示之，諸如 $Y = 2X - 3$，Y 值由不同的 X 值來決定。

如果 $Y = F(X)$，習慣上 $F(3)$ 是表示當 $X = 3$ 時 Y 之值。因此，如果 $Y = F(X) = X^2$，則 $F(3) = 3^2 = 9$，即是當 $X = 3$ 時，Y 之值爲 9.

這類涵數的觀念可被擴展至兩個或更多的變數。

直角坐標

圖 1-1 兩條互相垂直的直線 $X'OX$ 和 $Y'OY$，分別稱爲 X 軸，Y 軸，這兩直線把平面分成四個區域，分別以Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ表示之，分別稱爲第一，第二，第三，第四象限。

點O稱原點，在所予點P，X的值2，Y之值3．即X值與Y值在其垂直線相交之點，稱為點P之座標。在圖1-1，P點的縱座標是3，橫座標是2，而P點的座標即為(2,3)。

相反地，若給予一點的座標，則吾人便能定該點的位置，因此，在右圖，座標(－4，－3)，(－2.3，4.5)和(3.5，－4)分別以Q，R，和S表示之。

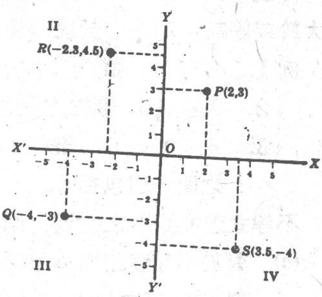

圖 1-1

若吾人從O點建立Z軸使之垂直於XY平面，我們仍很容易可擴展上述之觀念此情形下，點P的座標以(X, Y, Z)表示之。

涵數圖

一個涵數圖是上述兩個變數間之關係的圖解表現法，依照資料的性質和圖形所要表達的目的，有很多類型的涵數被應用於統計上，如條形圖，圓形圖等，這些圖形有時被歸入於表格之類，因此，我們有時稱條形表格或圓形表格等。

方程式

方程式是$A=B$形式的一種敍述，A稱為此方程式的左邊數，B稱右邊數只要在方程式的左右兩數運用相同的運算，仍得到相等的方程式，即在左、右兩邊的數字同時加、減、乘、除一相同值，所得到的方程式仍與運算前相等。但唯一例外者，即不得同時以0除之。

例：　一方程式$2X+3=9$

兩邊各減3：　$2X+3-3=9-3$　或　$2X=6$

兩邊各除以2：　$2X/2=6/2$　或$X=3$

X值即是該方程式之解，皆是3.

以上之觀念可擴展，以之尋找兩個未知數之兩個方程式的解答，或是三個未知數，三個方程式之解答等，上述之方程式稱為同義方程式。

不等式

符號“＞”和“＜”分別表示“大於”和“小於”，“≧”和“≦”即“大於或等於”和“小於或等於”，這些稱爲不等式。

例 1. $3<5$ 讀爲 3 小於 5

2. $X \geqq 10$ 讀爲 X 大於或等於 10

3. $4<Y\leqq 6$ 讀爲 4 小於 Y，Y 小於或等於 6，或 Y 介於 4 與 6 之間，但包括 6.

不等式若有以下之性質，則其大小性質不變。

(a) 對於不等號左右兩邊同時加，或減一相同數。

例：因 $15>12$，$15+3>12+3$（即 $18>15$），$15-3>12-3$（即 $12>9$）

(b) 左右兩邊同乘，或同除一相同的正數。

例：因 $15>12$，$(15)(3)>(12)(3)$（即 $45>36$），

$\frac{15}{3}>\frac{12}{3}$（即 $5>4$）

(c) 左右兩邊同乘或同除一相同的負數，則不等式符號相反。

例：因 $15>12$，$(15)(-3)<(12)(-3)$（即 $-45<-36$）

$\frac{15}{-3}<\frac{12}{-3}$（即 $-5<-4$）

對數

每一正數 N 都可以 10 的次冪表示之，如 $N=10^p$，吾人稱 P 爲以 10 爲基底的 N 的對數，書爲 $P=\log N$. 或 $P=\log_{10} N$. 例如，因爲 $1000=10^3$，$\log 1000=3$，$0.01=10^{-2}$，$\log 0.01=-2$.

因 N 是介於 1 和 10 之間，即 10^0 和 10^1 間，故 $P=\log N$. 是介於 0 和 1 之間，可從對數表查得。

例 1. 從對數表找 $\log 2.36$ 時，我們先從標頭爲 N 之那欄看起，找尋前兩位數字 23. 然後再以數字 23 那列爲準，向右找標頭爲 6 的那欄的數字，得到 3729. 因此 $\log 2.36=0.3729$，或 $2.36=10^{0.3729}$

所有正數的對數，均可從對數表查得介於 1 和 10 間之對數值。

例 2. 從例 1，$2.36=10^{0.3729}$ 連續地乘以 10，

得 $23.6=10^{1.3729}$，$236=10^{2.3729}$，$2360=10^{3.3729}$，…

因此，$\log 2.36=0.3729$，$\log 23.6=1.3729$

$\log 236=2.3729$，$\log 2360=3.3729$

例3. 因爲$2.36=10^{0.3729}$，連續地除以10，得到

$$0.236=10^{0.3729-1}=10^{-0.6271},$$

$$0.0236=10^{0.3729-2}=10^{-1.6271}.$$

通常我們把$0.3729-1$寫爲$9.3729-10$，或$\overline{1}.3729$，$0.3729-2$寫爲$8.3729-10$. 或 $\overline{2}.3729$，利用此記數法，則

$$\log 0.236=9.3729-10=\overline{1}.3729=-0.6271$$

$$\log 0.0236=8.3729-10=\overline{2}.3729=1.6271$$

小數部分0.3729在對數中稱爲對數之尾數(mantissa)其餘部份，即尾數小數點前之部分如1，2，3，和$\overline{1}$，$\overline{2}$，或$9-10$，$8-10$則稱爲對數之首數(characteristic).

以下之規則，指出：

(1) 對於任一大於1之數，其首數是正的，並且是一個小於小數點前面之數字的數。因此2360，236，23.6，2.36的對數的首數是3，2，1，0；而所求得的對數是3.3729，2.3729，1.3729，0.3729

(2) 對於任一小於1之數，其首數是負的，且是一個大於小數點以後的0之數目，最接近之數，因此0.236，0.0236，0.00236之對數的首數是-1，-2，-3，或$9.3729-10$，$8.3729-10$，$7.3729-10$.

如果欲求四個數字之數的對數，諸如2.364和758.2，則可利用補差法，(看習題36).

反對數

指數形式$2.36=10^{0.3729}$，則2.36稱爲0.3729的反對數寫爲antilog 0.2729，那是一個數，其對數是0.3729，故

$$\text{antilog } 1.3729=23.6,\quad \text{antilog } 2.3729=236,$$

$$\text{antilog } 3.3729=2360,\quad \text{antilog } 9.3729-10$$

$$=\text{antilog } \overline{1}.3729=0.236$$

$$\text{antilog } 8.3729-10=\text{antilog } \overline{2}.3729=0.0236,\cdots$$

任何一數的反對數，可從附錄表格，推算出來。

例：尋找antilog $8.6284-10$，吾人先查尾數0.6284，因其位於42那列，和標頭爲5那欄的交叉點，故吾人所要求的數字，即是425

，又因首數是 8－10，故所欲求之數是 0.0425。

同理，antilog 3.6284＝4250，antilog 5.6284＝425,000

若尾數在表格中無法找到，則可利用補差法求之。（看習題 37）.

利用對數的計算性質：

$$\log MN = \log M + \log N$$

$$\log \frac{M}{N} = \log M - \log N$$

$$\log M^p = p \log M$$

例：$\log \dfrac{A^p B^q C^r}{D^s E^t} = p \log A + q \log B + r \log C + s \log D - t \log E$

看習題 38-45.

問 題 解 答

1. 下列那些是間斷的資料，那些是連續的資料。
   (a) 每天在股票市場售出的股份。
   (b) 氣象局每半小時所記錄的溫度。
   (c) 一個公司所生產的電視的壽命。
   (d) 大學教授一年的所得。
   (e) 一工廠生產的 1000 螺釘的長度。

【解答】(a)(d) 是間斷的，　(b)(c)(e) 是連續的。

2. 給予下列各變數的定義域，並敍述其是連續變數或分立變數。

【解答】(a) 洗衣機 G 加侖的水。

定義域：從 0 至洗衣機所能容納的數量的任一值。

此爲連續變數。

(b) 圖書館書架的書之數目 B

定義域：0，1，2，3，……至書架所能容納的最大數目。

爲分立變數。

(c) 投擲一對骰子所獲得的點數和 S。

定義域：一骰子的點數 1，2，3，4，5，6，一對骰子的點數和為2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12，此為S之定義域。

為分立變數。

(d) 一球的直徑D.

定義域：大於0的任何值。

為連續變數。

(e) 歐洲的國家數目C.

定義域：1，2，3，……

為分立變數。

資料的巡迴

3. 巡迴下列各數至指定的精確數。

【解答】(a) 48.6　最接近之單位：49

(b) 136.5　最接近之單位：136

(c) 2.484　最接近的百分位：2.48

(d) 0.0435　最接近的千分位：0.044

(e) 4.50001　最接近的單位：5

(f) 143.95　最接近的十分位：144.0

(g) 368　最接近的百位：400

(h) 24.448　最接近的千位數：24.000

(i) 5.56500　最接近的百分位：5.56

(j) 5.56501　最接近的百分位：5.57

4. 把4.35，8.65，2.95，12.45，6.65，7.55，9.75相加。
(a) 直接地加，(b) 依照“偶整數”巡迴至最接近的十分位數。
(c) 利用巡迴，以增加“5”之前的數字。

【解答】

(a)	(b)	(c)
4.35	4.4	4·4
8.65	8.6	8·7
2.95	3.0	3·0
12.45	12.4	12·5
6.65	6.6	6·7
7.55	7.6	7·6
+ 9.75	+ 9.8	+ 9·8
52.35	52.4	52.7

(b) 之過程優於 (c)，因其累積巡迴誤差在 (b) 最小。

科學記數法和有效數字

5. 將下列各數以不用 10 的乘冪方式表示出來。

【解答】(a) $4.823\times10^{7}=48,230,000$

(b) $8.4\times10^{-6}=0.0000084$

(c) $3.80\times10^{-4}=0.000380$

(d) $300\times10^{8}=30,000,000,000$

(e) $1.86\times10^{5}=186.000$

(f) $70,000\times10^{-10}=0.0000070000$

6. 下列各數字有幾位有效數字。

【解答】(a) 149.8 吋 ：4　　(b) 149.80 吋 ：5

(c) 0.0028 呎 ：5　　(d) 0.00280 呎 ：3

(e) 1.00280 呎 ：6　　(f) 9 吋 ：1

(g) 9 間房子 ：無限　　(h) 4.0×10^{3} 磅 ：2

(i) 7.58400×10^{-5} ：6

7. 下列測量的數字的最大誤差爲何？並給予其有效數字。

【解答】(a) 73.854 吋

該測量的範圍從 73.8535 吋至 73.8545 吋，故最大誤差是 0.0005。有 5 個有效數字。

(b)　0.09800 立方呎

即 0.097995 至 0.098005，故最大誤差：0.000005 立方呎。4 個有效數字。

(c)　3.867×10^8 哩

其眞實哩數爲 $3.8665 \times 10^8 \rightarrow 3.8675 \times 10^8$，故最大誤差：$0.0005 \times 10^8$ 或 50.000 哩，有 4 個有效數字。

8. 用科學記數法寫每一個數字。

【解答】(a)　24,380,000（4 個有效數字）$= 2.438 \times 10^7$

(b)　$0.000009851 = 9.851 \times 10^{-6}$

(c)　7,300,000,000（5 個有效數字）$= 7.3000 \times 10^9$

(d)　$0.00018400 = 1.8400 \times 10^{-4}$

計算

9. 把 4.19355，15.28，5.9561，12.3，8.472 相加，並假定所有的數字都是有意義的。

【解答】第一個方法：$5.74 \times 3.8 = 21.812$，但這些數字並非都有意義，爲了決定多少個數字是有意義的，吾人注意到 5.74 是代表 5.735 和 5.745 間之任一數，而 3.8 是代表介於 3.75 與 3.85 間之任一數，故其相乘後之最小可能值是 $5.735 \times 3.75 = 21.50625$，最大可能值是 $5.745 \times 3.85 = 22.11825$. 因其值的可能全距是 21.50625 至 22.11825，很淸楚地可知所求得之結果中，對於大於前兩個數字者，無一是有意義的，其結果寫爲 22，而 22 是代表介於 21.5 和 22.5 的任何一數。

第二方法：

考慮斜體字可能是有疑問的，則其結果計算如下，

$$\begin{array}{r} 5.74 \\ 3.8 \\ \hline 4592 \\ 1722 \\ \hline 21.812 \end{array}$$

在答案中，我們不應保留一個以上的疑問數字，因此 22 是兩個有意義的數字。

注意：有效數字之數目不須多於正確的最小數目之數，因此，若 5.74 被巡迴至 5.7，則其結果是 $5.7 \times 3.8 = 21.66 = 22$. 即巡迴至兩個有效數字，則與上解一致。

若沒利用機器，在計算時，為節省勞力，則可不須保留一個以上之有效數字數目，大於正確最小數目之數，並且可巡迴至最後答案中最適當的有效數字之數。

10. 計算 $475,000,000 + 12,684,000 - 1,372,410$，如果這些數字分別有 3，5，7，位有效數字。

【解答】(*a*) 所有之數字都保留，最後的答案才巡迴。(*b*) 使用的方法類似，9，之 (*b*).

(*a*)
$$\begin{array}{r} 475,000,000 \\ +\ \ 12,684,000 \\ \hline 487,684,000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 487,684,000 \\ -\ \ \ 1,372,410 \\ \hline 486,311,590 \end{array}$$

(*b*)
$$\begin{array}{r} 475,000,000 \\ +\ \ 12,700,000 \\ \hline 487,700,000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 487,700,000 \\ -\ \ \ 1,400,000 \\ \hline 486,300,000 \end{array}$$

最後的結果巡迴至 486,000,000. 表示有 3 位有效數字，即 4.86×10^8.

11. 運算下列各運算：

【解答】(*a*) $48.0 \times 943 = (48.0)(943) = 45.300$

(*b*) $8.35/98 = 0.085$

(*c*) $(28)(4193)(182) = (2.8 \times 10^1)(4.193 \times 10^3)$

$(1.82 \times 10^2) = (2.8)(4.193)(1.82) \times 10^{1+3+2}$

$= 21 \times 10^6 = 2.1 \times 10^7$

(*d*) $$\frac{(526.7)(0.001280)}{0.000034921} = \frac{(5.267 \times 10^2)(1.280 \times 10^{-3})}{3.4921 \times 10^{-5}}$$

$$= \frac{(5.267)(1.280)}{3.4921} \times \frac{(10^2)(10^{-3})}{10^{-5}}$$