

高等学校规划教材

# 结构力学

下册

长安大学结构力学教研室

王新华 贾红英 李悦

赵均海

编

审

JIEGOU  
LIXUE



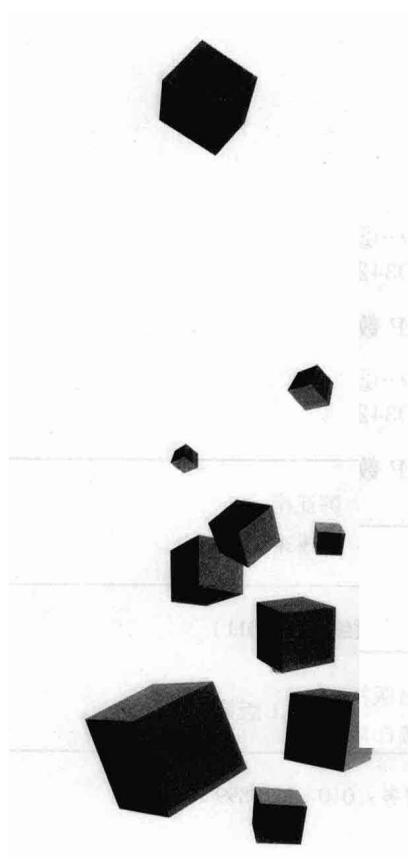
化学工业出版社

高等学校规划教材

# 结构力学

## 下册

长安大学结构力学教研室 编  
王新华 贾红英 李悦  
赵均海 审



化学工业出版社

· 北 京 ·

本书根据国家教育部审定的《结构力学课程教学基本要求》编写,全书分上、下册。上册为课程的基础部分,内容包括:平面体系的几何组成分析,静定结构的内力计算,虚功原理与结构的位移计算,计算超静定结构内力的力法、位移法和实用算法,影响线及应用。下册为专题部分,内容包括:矩阵位移法,结构动力计算基础,结构的极限荷载。

本书可作为土木工程、水利工程专业本科教材。其上册可作为土木管理专业、给排水专业、工程管理专业,以及土木工程、水利工程专业专科等少学时结构力学课程的教材。也可供有关工程技术人员参考。

#### 图书在版编目(CIP)数据

结构力学. 下册/王新华,贾红英,李悦编. —北京:  
化学工业出版社, 2010.7  
高等学校规划教材  
ISBN 978-7-122-08703-4

I. 结… II. ①王…②贾…③李… III. 结构力学-  
高等学校-教材 IV. O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 096967 号

---

责任编辑: 满悦芝

文字编辑: 韩亚南

责任校对: 战河红

装帧设计: 尹琳琳

---

出版发行: 化学工业出版社 (北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011)

印 装: 北京市兴顺印刷厂

787mm × 1092mm 1/16 印张 8½ 字数 211 千字 2010 年 8 月北京第 1 版第 1 次印刷

---

购书咨询: 010-64518888 (传真: 010-64519686)

售后服务: 010-64518899

网 址: <http://www.cip.com.cn>

凡购买本书, 如有缺损质量问题, 本社销售中心负责调换。

---

定 价: 19.80 元

版权所有 违者必究

# 前 言

本书依据教育部高等学校力学教学指导委员会力学课程教学分委员会结构力学课程指导小组的《结构力学课程教学基本要求(A类)》编写。其内容为土木、水利和路桥专业本科(四年制)的必学内容。编写中主要参考了龙驭球、包世华主编的《结构力学教程I、II》，杨蓓康、李家宝主编的《结构力学》上、下册，杨天祥主编的《结构力学》上、下册，以及李廉锟主编的《结构力学》上、下册等。

本书旨在体现对结构力学课程的基本要求及专业技术基础课程的特点。着眼于课程基本内容的基本理论、基本概念和基本方法的论述。通过例题尽可能描述运用结构力学基本概念和综合利用结构力学概念分析、解决问题的思路和方法。通过安排适量的与内容紧密相关的思考题和习题，引导读者掌握知识点并得到结构分析和计算的基本能力的训练。

全书由王新华任主编。执笔李悦(第3章)，贾红英(第4章)，王新华(第1、2章，第5章~第11章及其它)。并由长安大学建筑工程学院结构力学教研室主任刘鸣老师、刘青和魏雪英两位老师帮助校稿，他们提出了许多有益的建议。

本书由教育部高等学校教学指导委员会力学类专业教学指导分委员会委员、陕西省力学学会副理事长、长安大学博士生导师赵均海教授审阅，他提出了许多宝贵的意见并对定稿进行了具体的指导。此外，本书在成书过程中还得到研究生周蓉、李天华、张东芳、韩向丽、王继秀的鼎力帮助。在此，谨致诚挚的谢意。

限于编者水平，书中难免有疏漏和不足之处，恳请读者批评和指正。

长安大学建筑工程学院结构力学教研室

编者

2010年2月



# 目 录

|                                         |    |
|-----------------------------------------|----|
| 第 9 章 矩阵位移法                             | 1  |
| 9.1 概述                                  | 1  |
| 9.2 局部坐标系下的单元刚度矩阵                       | 2  |
| 9.2.1 典型单元刚度矩阵                          | 2  |
| 9.2.2 其它单元刚度矩阵                          | 4  |
| 9.2.3 单元刚度矩阵的子块形式                       | 5  |
| 9.3 结构坐标系下的单元刚度矩阵                       | 5  |
| 9.3.1 坐标转换矩阵                            | 6  |
| 9.3.2 结构坐标系下的单元刚度矩阵                     | 6  |
| 9.3.3 结构坐标系单元刚度矩阵的子块形式                  | 7  |
| 9.4 建立典型结构刚度矩阵                          | 9  |
| 9.4.1 建立结构刚度方程                          | 9  |
| 9.4.2 结构刚度矩阵 $K$ 的特征和意义                 | 11 |
| 9.4.3 典型结构刚度矩阵 $K$ 和直接刚度法               | 12 |
| 9.5 直接刚度法 (结点位移码集成法)                    | 16 |
| 9.5.1 结点位移码和结构刚度矩阵                      | 16 |
| 9.5.2 单元定位向量和杆端位移码                      | 17 |
| 9.6 等效结点荷载 (非结点荷载处理)                    | 19 |
| 9.6.1 等效结点荷载概念                          | 20 |
| 9.6.2 等效结点荷载列阵集成法                       | 21 |
| 9.7 忽略杆件轴向变形的矩形刚架                       | 23 |
| 9.7.1 忽略轴向变形的受弯直杆单元刚度矩阵                 | 23 |
| 9.7.2 按典型单元刚度矩阵 $\bar{k}^e$ 集成 $K$      | 24 |
| 9.7.3 按与单元变形和位移特征一致的 $\bar{k}^e$ 集成 $K$ | 25 |
| 9.7.4 刚架的结点荷载列向量 $F$                    | 26 |
| 9.8 矩阵位移法示例                             | 27 |
| 习题                                      | 33 |
| 第 10 章 结构动力分析                           | 36 |
| 10.1 概述                                 | 36 |
| 10.2 结构的振动自由度                           | 37 |
| 10.2.1 结构的振动自由度概念                       | 37 |
| 10.2.2 用附加链杆法判定体系的振动自由度                 | 38 |
| 10.3 单自由度体系振动方程                         | 40 |
| 10.3.1 刚度法 (建立动平衡方程)                    | 40 |
| 10.3.2 柔度法 (建立动位移方程)                    | 42 |
| 10.3.3 单自由度体系振动方程的一般形式                  | 44 |
| 10.4 单自由度体系的自由振动                        | 46 |
| 10.4.1 自由振动微分方程                         | 46 |
| 10.4.2 体系的自由振动特征和固有动力特性                 | 47 |
| 10.5 简谐荷载下单自由度体系的强迫振动                   | 50 |
| 10.5.1 简谐荷载下的振动方程及解                     | 50 |
| 10.5.2 动力系数 $\beta$ 对振幅 $A$ 的影响         | 52 |
| 10.5.3 简谐荷载在质点上时体系的动位移和动内力              | 53 |
| 10.5.4 简谐荷载在质点外时体系的动位移和动内力              | 54 |
| 10.5.5 简谐荷载作用下体系的动力反应特点                 | 56 |
| 10.6 一般动荷载下单自由度体系的强迫振动                  | 56 |
| 10.7 阻尼对体系振动的影响                         | 60 |
| 10.7.1 阻尼对自由振动的影响                       | 60 |
| 10.7.2 阻尼对强迫振动的影响                       | 63 |
| 10.8 多自由度体系的自由振动                        | 66 |
| 10.8.1 多自由度体系的自由振动方程                    | 66 |
| 10.8.2 多自由度体系的频率和振型                     | 69 |
| 10.8.3 振型的正交性                           | 75 |
| 10.9 多自由度体系的强迫振动                        | 76 |
| 10.9.1 多自由度体系在简谐荷载下的强迫振动                | 76 |

|                                       |     |                                         |     |
|---------------------------------------|-----|-----------------------------------------|-----|
| 10.9.2 振型分解法 .....                    | 82  | * 10.11.2 瑞雷-里兹 (Rayleigh-Ritz) 法 ..... | 91  |
| 10.10 无限自由度体系的自由振动 .....              | 85  | 10.11.3 集中质量法 .....                     | 93  |
| 10.11 近似法计算体系的自振频率 .....              | 88  | 习题 .....                                | 96  |
| 10.11.1 瑞雷 (Rayleigh) 法 .....         | 88  |                                         |     |
| <b>第 11 章 结构的极限荷载</b> .....           | 101 |                                         |     |
| 11.1 塑性分析的概念 .....                    | 101 | 11.3.3 单跨超静定梁的极限荷载 .....                | 109 |
| 11.1.1 结构塑性分析的基本概念 .....              | 101 | 11.4 判定极限荷载的一般定理 .....                  | 113 |
| 11.1.2 理想弹塑性材料假定 .....                | 102 | 11.4.1 结构在极限状态必须满足的<br>条件 .....         | 113 |
| 11.2 塑性极限弯矩、塑性铰 .....                 | 102 | 11.4.2 判定极限荷载一般定理及<br>证明 .....          | 114 |
| 11.2.1 截面的弹塑性发展过程和矩形<br>截面极限弯矩 .....  | 103 | 11.4.3 计算结构的极限荷载的实用<br>方法 .....         | 115 |
| 11.2.2 塑性铰概念 .....                    | 104 | 11.4.4 连续梁的极限荷载 .....                   | 117 |
| 11.2.3 截面有一个对称轴的杆件的<br>极限弯矩 .....     | 105 | * 11.5 刚架的极限荷载 .....                    | 119 |
| 11.3 单跨梁的极限荷载 .....                   | 107 | 11.5.1 刚架的可能破坏机构分类 .....                | 120 |
| 11.3.1 结构的塑性极限状态概念 .....              | 107 | 11.5.2 刚架极限荷载的计算 .....                  | 121 |
| 11.3.2 计算极限荷载的基本方法和<br>静定梁的极限荷载 ..... | 107 | 习题 .....                                | 124 |
| <b>附录 部分习题参考答案</b> .....              | 127 |                                         |     |
| <b>参考文献</b> .....                     | 130 |                                         |     |

# 第 9 章 矩阵位移法

## 9.1 概述

矩阵位移法与位移法原理相同, 解题步骤也无本质区别。矩阵位移法是以矩阵数学为工具, 将结构的分析、运算过程程式化, 以适合编写结构分析的电算程序。

矩阵位移法直接按平衡条件建立方程, 将建立结构的矩阵位移法方程 (以下称结构刚度方程) 分为两大步。第一步为单元分析, 即视结构中各等截面直杆为单元, 根据力和位移之间的线性关系建立单元刚度方程 (即单元杆端力和杆端位移之间的关系式)。第二步为整体分析, 根据结构中结点 (或某部分) 的平衡条件, 建立结构刚度方程 (即结点力与结点位移之间的关系式)。

结构的单元通常以结构构造结点为界进行划分, 如杆件弯折点、杆件汇交点、截面刚度突变点、支座所在点等。另外, 集中荷载作用点、分布荷载起始点等非构造结点, 有时也作为单元的分界点。结构中每个单元有各自独立的单元编码, 用带圆圈的数字表示, 如图 9.1.1 所示。

在矩阵位移法中用到两类直角坐标系, 即局部坐标系  $\bar{x}\bar{y}$  和结构坐标系  $xoy$ , 均采用左手螺旋规则。 $\bar{x}\bar{y}$  坐标系是每个单元各自的独立坐标系。规定  $\bar{x}\bar{y}$  坐标原点在单元一端 (起点), 其  $\bar{x}$  轴沿杆轴指向单元另一端 (终点)。 $xoy$  坐标系用于结构整体分析。单元分析时, 先要建立  $\bar{x}\bar{y}$  坐标系下的各单元刚度方程, 然后经坐标转换, 统一到  $xoy$  坐标系下, 进行结构整体分析。

当杆件为渐变截面时, 可将其沿杆轴等分成有限个小段, 近似地视各小段为等截面直杆。

矩阵位移法中, 物理量 (力、位移等) 按统一符号标示, 算式或方程均表示为矩阵形式, 物理量的正、负规定统一按所设直角坐标系的正方向为正。

后文包括单元分析、整体分析和计算实例三部分。前两部分研究建立单元和结构刚度方程, 最后通过实例说明矩阵位移法解题的主要方法及步骤。

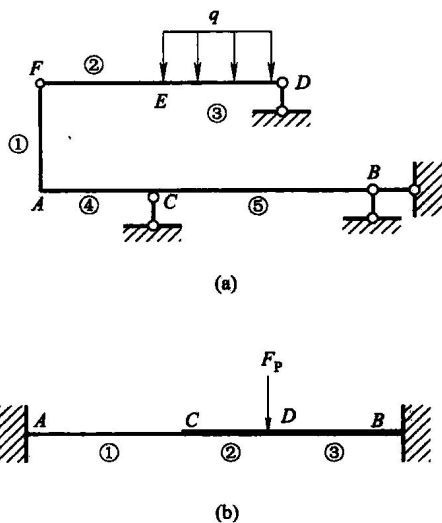


图 9.1.1 单元划分

## 9.2 局部坐标系下的单元刚度矩阵

### 9.2.1 典型单元刚度矩阵

典型单元刚度方程的力学模型如图 9.2.1 所示。一单元编码为⊙、长度为  $l$  的等截面直杆  $AB$  (弹性模量  $E$ 、截面惯性矩  $I$  和截面积  $A$  均为常数)，局部坐标系的  $\bar{x}$  轴由杆  $A$  端指向  $B$  端。该单元为一般自由单元，即单元可由原直线  $AB$  位置移动、变形到  $A'B''$  曲线位置，杆的两端可在平面内任意方向上自由移动，每一端均发生三个杆端位移 (两个线位移和一个转角位移)，并在单元两端产生相应于杆端位移的杆端力。

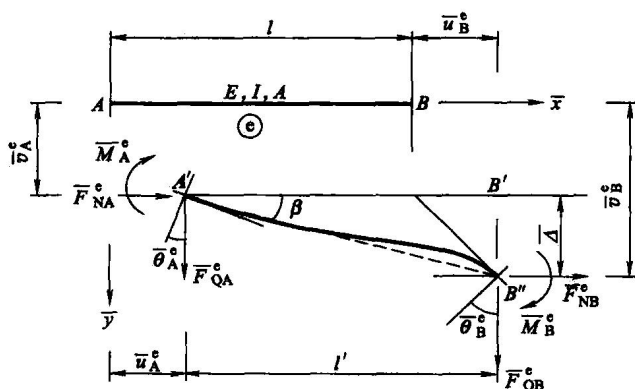


图 9.2.1 典型单元力学模型

规定：在局部坐标系下，单元杆端位移和杆端力的正方向均在局部坐标系的正方向上。即在杆端截面法向、切向上的杆端位移和杆端力均以  $\bar{x}$  和  $\bar{y}$  的正方向为正；杆端截面的角位移和弯矩以顺时针转向为正 (注意，根据作用力与反作用力原理，单元各杆端力反作用到结点或支座上时，其正方向在  $\bar{x}\bar{y}$  坐标的反方向上)。图 9.2.1 所示单元的杆端位移和杆端力均在规定的正方向上。在局部坐标系下的杆端力即杆端的轴力、剪力和弯矩，作为绘制结构内力图的控制值，通常是结构矩阵分析所要得到的最后结果。

将单元⊙的杆端位移和杆端力写成列阵：

$$\bar{\delta}^e = \{\bar{u}_A^e \quad \bar{v}_A^e \quad \bar{\theta}_A^e \quad ; \quad \bar{u}_B^e \quad \bar{v}_B^e \quad \bar{\theta}_B^e\}^T \quad (9.2.1)$$

$$\bar{F}^e = \{\bar{F}_{NA}^e \quad \bar{F}_{QA}^e \quad \bar{M}_A^e \quad ; \quad \bar{F}_{NB}^e \quad \bar{F}_{QB}^e \quad \bar{M}_B^e\}^T \quad (9.2.2)$$

$\bar{\delta}^e$ 、 $\bar{F}^e$  分别称为单元⊙在  $\bar{x}\bar{y}$  坐标系下的杆端位移列向量、杆端力列向量。注意， $\bar{\delta}^e$  按先起点  $A$  端后终点  $B$  端，且每一端按先  $\bar{x}$ 、 $\bar{y}$  方向线位移后角位移的次序写成； $\bar{F}^e$  相应地也按先起点  $A$  端后终点  $B$  端，每一端的杆端力按轴力、剪力和弯矩的次序写成。以下所涉及整体坐标系下单元的每个杆端的位移和杆端力，以及结构每个结点的位移、结点力，若无说明，均按结构坐标系先  $x$ 、 $y$  方向的位移或力后角位移或力矩的次序排列。

建立典型单元的刚度方程 (即  $\bar{F}^e$  和  $\bar{\delta}^e$  的关系式)，可视典型单元为两端固定梁，用力法 (或其它解超静定结构的方法)，求因杆端位移引起的梁的支座反力 (杆端力) 的方法获得。先分别计算因每个单位杆端位移单独作用时的杆端力，如图 9.2.2 所示，再将各图中因不同

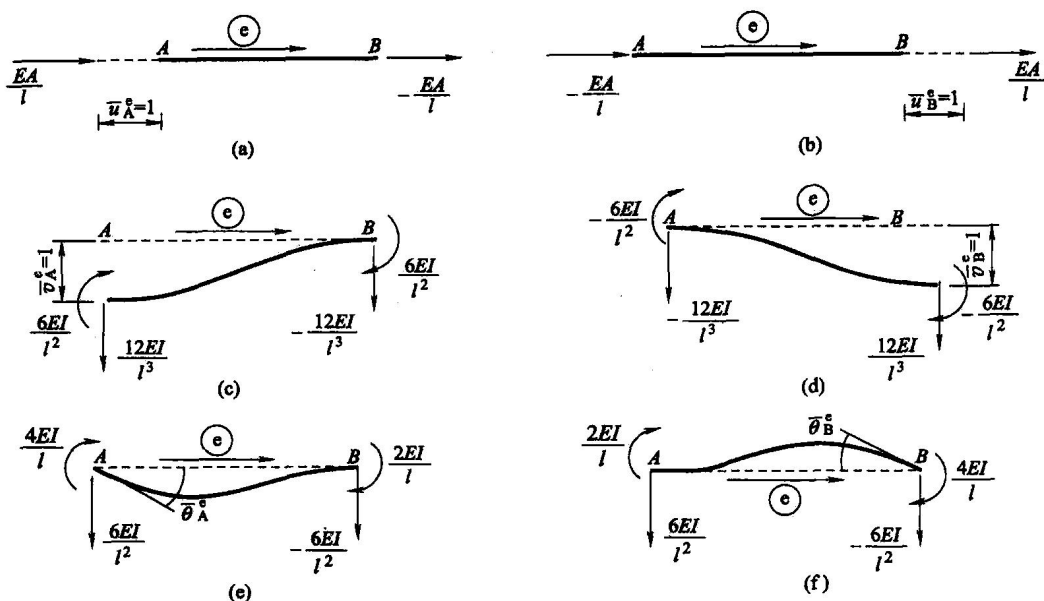


图 9.2.2 单位杆端位移下的杆端力关系分解图 (杆侧箭头表示  $x$  坐标轴)

的杆端位移为任意值时引起的同一个杆端力叠加, 得到以下方程:

$$\begin{cases} \bar{F}_{NA}^e = \frac{EA}{l} u_A^e - \frac{EA}{l} u_B^e \\ \bar{F}_{QA}^e = \frac{12EI}{l^3} v_A^e + \frac{6EI}{l^2} \bar{\theta}_A^e - \frac{12EI}{l^3} v_B^e + \frac{6EI}{l^2} \bar{\theta}_B^e \\ \bar{M}_A^e = \frac{6EI}{l^2} v_A^e + \frac{4EI}{l} \bar{\theta}_A^e - \frac{6EI}{l^2} v_B^e + \frac{2EI}{l} \bar{\theta}_B^e \\ \bar{F}_{NB}^e = -\frac{EA}{l} u_A^e + \frac{EA}{l} u_B^e \\ \bar{F}_{QB}^e = -\frac{12EI}{l^3} v_A^e - \frac{6EI}{l^2} \bar{\theta}_A^e + \frac{12EI}{l^3} v_B^e - \frac{6EI}{l^2} \bar{\theta}_B^e \\ \bar{M}_B^e = \frac{6EI}{l^2} v_A^e + \frac{2EI}{l} \bar{\theta}_A^e - \frac{6EI}{l^2} v_B^e + \frac{4EI}{l} \bar{\theta}_B^e \end{cases} \quad (9.2.3a)$$

可以看出, 上式中的第 2、3、5 和 6 式即是位移法的等截面直杆的转角位移方程, 只是表示杆端力、杆端位移的符号及其正、负按矩阵位移法的新规定。上式第 1、4 式是考虑单元轴向变形时的杆端力。将上式写成矩阵形式, 即

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{NA}^e \\ \bar{F}_{QA}^e \\ \bar{M}_A^e \\ \dots \\ \bar{F}_{NB}^e \\ \bar{F}_{QB}^e \\ \bar{M}_B^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/l & 0 & 0 & \vdots & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/l^3 & 6EI/l^2 & \vdots & 0 & -12EI/l^3 & 6EI/l^2 \\ 0 & 6EI/l^2 & 4EI/l & \vdots & 0 & -6EI/l^2 & 2EI/l \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -EA/l & 0 & 0 & \vdots & EA/l & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/l^3 & -6EI/l^2 & \vdots & 0 & 12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ 0 & 6EI/l^2 & 2EI/l & \vdots & 0 & -6EI/l^2 & 4EI/l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A^e \\ v_A^e \\ \bar{\theta}_A^e \\ \dots \\ u_B^e \\ v_B^e \\ \bar{\theta}_B^e \end{Bmatrix} \quad (9.2.3b)$$

矩阵缩写形式为

$$\bar{F}^e = \bar{k}^e \bar{\delta}^e \quad (9.2.3c)$$

$\bar{k}^e$  为局部坐标系下典型单元刚度矩阵，单独取出分析如下。

$$\bar{k}^e = \begin{matrix} \begin{matrix} \bar{u}_A^e=1 & \bar{v}_A^e=1 & \bar{\theta}_A^e=1 & \bar{u}_B^e=1 & \bar{v}_B^e=1 & \bar{\theta}_B^e=1 \end{matrix} \\ \left[ \begin{array}{cccccc} EA/l & 0 & 0 & : & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/l^3 & 6EI/l^2 & : & 0 & -12EI/l^3 & 6EI/l^2 \\ 0 & 6EI/l^2 & 4EI/l & : & 0 & -6EI/l^2 & 2EI/l \\ \dots & \dots & \dots & : & \dots & \dots & \dots \\ -EA/l & 0 & 0 & : & EA/l & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/l^3 & -6EI/l^2 & : & 0 & 12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ 0 & 6EI/l^2 & 2EI/l & : & 0 & -6EI/l^2 & 4EI/l \end{array} \right] \begin{matrix} \bar{F}_{NA}^e \\ \bar{F}_{QA}^e \\ \bar{M}_A^e \\ \dots \\ \bar{F}_{NB}^e \\ \bar{F}_{QB}^e \\ \bar{M}_B^e \end{matrix} \end{matrix} \quad (9.2.4)$$

①  $\bar{k}^e$  为 6 阶对称方阵。该方阵是由图 9.2.2 中的各杆端力为元素组成的，即每一个元素都是仅由一个杆端位移为单位位移时引起的单元的某一个杆端力，如第 5 行第 3 列的元素值  $-\frac{6EI}{l^2}$ ，是仅在 A 端发生角位移  $\bar{\theta}_A^e=1$  时引起单元 B 端上的剪力  $\bar{F}_{QB}^e$ （位移法中所称的形常数）。这些元素都只与单元的截面抗弯刚度、轴向刚度和杆长有关，而与引起单元变形或内力的外因无关。因此  $\bar{k}^e$  表示单元自身具有的抵抗杆端位移能力。

②  $\bar{k}^e$  中元素按与杆端位移列向量相应的次序排列。式 (9.2.4) 中，每一列上的 6 个元素，是仅由一个单位杆端位移引起的单元两端的 6 个杆端力（即取自图 9.2.2 中的某个图上的全部杆端力）；每一行上的 6 个元素，是单元的 6 个单位杆端位移各自单独引起的单元的同一个杆端力。

③  $\bar{k}^e$ （即典型单元刚度矩阵）是奇异矩阵。该矩阵元素的行列式值等于零，其逆阵不存在。说明典型单元刚度方程  $\bar{F}^e = \bar{k}^e \bar{\delta}^e$  只能用于在已知  $\bar{\delta}^e$  的条件下求  $\bar{F}^e$ ，而不能用  $\bar{F}^e$  求  $\bar{\delta}^e$ 。这是因为典型单元是自由单元，其杆端位移包括使杆件发生变形和刚体移动两部分，只有使杆件发生变形的位移部分（杆两端的转角和杆两端的相对线位移）影响杆端力。由式 (9.2.3a) 容易看出，用杆端绝对线位移  $\bar{u}_A^e$  和  $\bar{u}_B^e$ 、 $\bar{v}_A^e$  和  $\bar{v}_B^e$  表示的对杆端力的影响实际等于  $\bar{u}_A^e - \bar{u}_B^e$ 、 $\bar{v}_A^e - \bar{v}_B^e$ （即杆两端水平、竖直方向上的相对线位移）对杆端力的影响。当由杆端力  $\bar{F}^e$  求  $\bar{\delta}^e$  时，无法确定  $\bar{\delta}^e$  中的刚体位移部分。

## 9.2.2 其它单元刚度矩阵

连续梁单元刚度矩阵：连续梁单元，指两端只有转角位移的等截面受弯直杆，并只考虑杆件的小弯曲变形。由图 9.2.2 (e)、图 9.2.2 (f) 得连续梁单元刚度矩阵，见式 (9.2.5)，可知该矩阵为非奇异矩阵。

$$\bar{k}^e = \begin{matrix} \begin{matrix} \bar{\theta}_A^e=1 & \bar{\theta}_B^e=1 \end{matrix} \\ \left[ \begin{array}{cc} 4EI/l & : & 2EI/l \\ \dots & & \dots \\ 2EI/l & : & 4EI/l \end{array} \right] \begin{matrix} \bar{M}_A^e \\ \bar{M}_B^e \end{matrix} \end{matrix} \quad (9.2.5)$$

桁架单元刚度矩阵：桁架单元，即理想二力杆，仅发生轴向变形。由图 9.2.2 (a)、图 9.2.2 (b) 得桁架单元刚度矩阵，见式 (9.2.6)，该矩阵为奇异矩阵。矩阵中元素为零的

行列, 是单元刚度矩阵在两个坐标系间转换时应满足相同阶数 (4 阶) 而做的补位。

$$\bar{k}^e = \begin{matrix} \begin{matrix} \bar{u}_A^e=1 & \bar{v}_A^e=0 & \bar{u}_B^e=1 & \bar{v}_B^e=0 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} EA/l & 0 & \vdots & -EA/l & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ -EA/l & 0 & \vdots & EA/l & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_{NA}^e \\ \bar{F}_{QA}^e=0 \\ \bar{F}_{NB}^e \\ \bar{F}_{QB}^e=0 \end{Bmatrix} \end{matrix} \quad (9.2.6)$$

容易看出, 上述两个单元的刚度矩阵, 均可借助典型单元刚度矩阵式 (9.2.4), 代入相应的杆端位移条件得到。如令单元两端只有杆轴 ( $\bar{x}$ ) 方向位移  $\bar{u}_A^e$ 、 $\bar{u}_B^e$  时, 划去式 (9.2.4) 中其它四个 (等于零的) 杆端位移所对应的列及相应的行, 便得到式 (9.2.6) 桁架单元刚度矩阵。

### 9.2.3 单元刚度矩阵的子块形式

以上所得三类单元在局部坐标系下的单元刚度矩阵 (或单元刚度方程), 均可表示成按单元的两个杆端 (或按单元两端结点编码) 区分的子块形式, 见式 (9.2.7a)。单元刚度方程见式 (9.2.7b)。

$$\bar{k}^e = \begin{bmatrix} \bar{k}_{AA}^e & \vdots & \bar{k}_{AB}^e \\ \dots & & \dots \\ \bar{k}_{BA}^e & \vdots & \bar{k}_{BB}^e \end{bmatrix} \quad (9.2.7a)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_A^e \\ \dots \\ \bar{F}_B^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{AA}^e & \vdots & \bar{k}_{AB}^e \\ \dots & & \dots \\ \bar{k}_{BA}^e & \vdots & \bar{k}_{BB}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_A^e \\ \dots \\ \bar{\Delta}_B^e \end{Bmatrix} \quad (9.2.7b)$$

式中,  $\bar{F}_A^e$ ,  $\bar{F}_B^e$ ,  $\bar{\Delta}_A^e$ ,  $\bar{\Delta}_B^e$  分别为单元起端、终端上的杆端力子列阵和杆端位移子列阵。

单元刚度矩阵中的四个子块, 有相同的两个下标的称为主子块, 另两个为副子块。其主子块  $\bar{k}_{AA}^e$  (或  $\bar{k}_{BB}^e$ ) 为仅因 A 端  $\bar{\Delta}_A^e$  (或 B 端  $\bar{\Delta}_B^e$ ) 中各杆端位移为单位杆端位移时引起单元 A 端 (或 B 端) 上的杆端力子块。副子块  $\bar{k}_{AB}^e$  (或  $\bar{k}_{BA}^e$ ) 则为仅因 B 端  $\bar{\Delta}_B^e$  (或 A 端  $\bar{\Delta}_A^e$ ) 中各杆端位移为单位杆端位移时引起 A 端 (或 B 端) 上的杆端力子块。

### 思 考

1. 试由式 (9.2.5)、式 (9.2.6) 的单元刚度矩阵分别写出相应的单元刚度方程 (或相应的杆端位移和杆端力列阵)。
2. 单元刚度矩阵中系数的物理意义是什么?
3. 为什么连续梁单元刚度矩阵为非奇异矩阵? 怎样辨别奇异矩阵?
4. 规定单元杆端位移和杆端力列阵中元素按怎样的顺序排列?

## 9.3 结构坐标系下的单元刚度矩阵

在进入结构的整体分析之前, 结构各单元的单元刚度方程必须在同一个结构坐标系下, 即需要先将局部坐标系下各单元刚度方程转换成结构坐标系下的单元刚度方程。



### 9.3.1 坐标转换矩阵

设结构坐标系下的单元杆端位移、杆端力列向量分别为

$$\delta^e = \{u_A^e \quad v_A^e \quad \theta_A^e \quad : \quad u_B^e \quad v_B^e \quad \theta_B^e\}^T \quad (9.3.1)$$

$$F^e = \{F_{Ax}^e \quad F_{Ay}^e \quad M_A^e \quad : \quad F_{Bx}^e \quad F_{By}^e \quad M_B^e\}^T \quad (9.3.2)$$

先考虑两个坐标系下单元杆端力之间的关系。如图 9.3.1 所示, 设单元③的局部坐标系  $\bar{x}\bar{o}\bar{y}$  与结构坐标系  $xoy$  相差  $\alpha$  角, 单元两端上的实、虚箭头分别表示两个坐标系正方向上的杆端力。只需将结构坐标系的杆端力向局部坐标系  $\bar{x}$ 、 $\bar{y}$  轴投影后叠加, 便得到下面由  $\bar{F}^e$  表示的  $\bar{F}^e$  的关系式:

$$\begin{cases} \bar{F}_{NA}^e = F_{Ax}^e \cos\alpha + F_{Ay}^e \sin\alpha \\ \bar{F}_{QA}^e = -F_{Ax}^e \sin\alpha + F_{Ay}^e \cos\alpha \\ \bar{M}_A^e = M_A^e \\ \bar{F}_{NB}^e = F_{Bx}^e \cos\alpha + F_{By}^e \sin\alpha \\ \bar{F}_{QB}^e = -F_{Bx}^e \sin\alpha + F_{By}^e \cos\alpha \\ \bar{M}_B^e = M_B^e \end{cases} \quad (9.3.3a)$$

上式的矩阵缩写式为

$$\bar{F}^e = T F^e \quad (9.3.3b)$$

显然有

$$\bar{\delta}^e = T \delta^e \quad (9.3.4)$$

式中,  $T$  为典型单元坐标转换矩阵。

$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & : & & & \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & : & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & & & \\ \dots & \dots & \dots & : & \dots & \dots & \dots \\ & & & : & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ & 0 & & : & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ & & & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.3.5)$$

$T$  为正交矩阵, 即  $T^{-1} = T^T$ 。

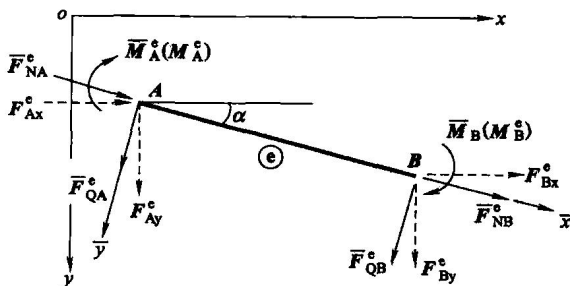


图 9.3.1 两个坐标系下的杆端力

### 9.3.2 结构坐标系下的单元刚度矩阵

将式 (9.3.3b)、式 (9.3.4) 代入式 (9.2.3c) 局部坐标系下的单元刚度方程, 得

$TF^e = \bar{k}^e T\delta^e$ ，再将其等号两侧同时左乘  $T^{-1} = T^T$ ，即得结构坐标系下杆端力与杆端位移关系式：

$$F^e = T^T \bar{k}^e T \delta^e \quad (9.3.6a)$$

令

$$k^e = T^T \bar{k}^e T \quad (9.3.6b)$$

则结构坐标系下的单元刚度方程：

$$F^e = k^e \delta^e \quad (9.3.7a)$$

显然，要获得结构坐标系下的单元刚度方程，关键是要得到  $k^e$ ，只需将  $\bar{k}^e$  代入式 (9.3.6b) 计算即可。式 (9.3.6b) 为结构坐标系下单元的刚度矩阵  $k^e$  的计算式。

将式 (9.2.4) 和式 (9.3.5) 代入式 (9.3.6b) 计算，得典型单元在  $xoy$  坐标系下单元刚度矩阵  $k^e$  的一般式：

$$k^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \sin^2 \alpha & (\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{6EI}{l^2} \sin \alpha & -(\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \sin^2 \alpha) & -(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{6EI}{l^2} \sin \alpha \\ (\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \cos^2 \alpha & \frac{6EI}{l^2} \cos \alpha & -(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}) \sin \alpha \cos \alpha & -(\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \cos^2 \alpha) & \frac{6EI}{l^2} \cos \alpha \\ -\frac{6EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{6EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} \sin \alpha & -\frac{6EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{2EI}{l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -(\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \sin^2 \alpha) & -(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{6EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \sin^2 \alpha & (\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{6EI}{l^2} \sin \alpha \\ -(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}) \sin \alpha \cos \alpha & -(\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \cos^2 \alpha) & -\frac{6EI}{l^2} \cos \alpha & (\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \cos^2 \alpha & -\frac{6EI}{l^2} \cos \alpha \\ -\frac{6EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{6EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} \sin \alpha & -\frac{6EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (9.3.7b)$$

式中， $\alpha$  为单元局部坐标系  $\bar{x}\bar{o}\bar{y}$  与结构坐标系  $xoy$  之间的夹角。

上式供计算  $k^e$  时直接使用。

### 9.3.3 结构坐标系单元刚度矩阵的子块形式

经坐标转换后，结构坐标系下的单元刚度矩阵  $k^e$  仍可按单元两端的结点编码划分子块。结构坐标系下  $k^e$  的子块形式为

$$k^e = \begin{bmatrix} k_{AA}^e & \vdots & k_{AB}^e \\ \dots & & \dots \\ k_{BA}^e & \vdots & k_{BB}^e \end{bmatrix} \quad (9.3.8a)$$

$$\begin{Bmatrix} F_A^e \\ \vdots \\ F_B^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{AA}^e & \vdots & k_{AB}^e \\ \dots & & \dots \\ k_{BA}^e & \vdots & k_{BB}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_A^e \\ \vdots \\ \Delta_B^e \end{Bmatrix} \quad (9.3.8b)$$

结构坐标系下单元刚度方程和刚度矩阵的意义和特征，与局部坐标系下的完全相同。

**【例 9.3.1】** 写出图 9.3.2 所示刚架中单元②在结构坐标系下的单元刚度矩阵  $k^e$ 。已知单元②截面抗弯刚度为  $EI_2 = EI$ ，轴向刚度  $EA_2 = 120EI$ 。其杆轴上的箭头表示单元②局部坐标  $\bar{x}$  轴由杆端 3 指向杆另一端 1。结构坐标系已在图中给定。

解：已知单元②杆长  $l = 2m$ ，计算以下各值：

$$\frac{EA_2}{l} = 60EI, \quad \frac{12EI_2}{l^3} = \frac{3}{2}EI, \quad \frac{6EI_2}{l^2} = \frac{3}{2}EI,$$

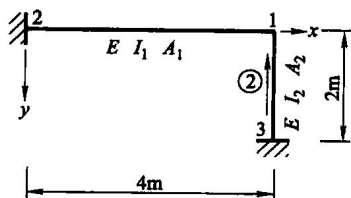


图 9.3.2 刚架

$$\frac{4EI_2}{l} = 2EI, \quad \frac{2EI_2}{l} = EI$$

将所得各值代入式 (9.2.4) 典型单元刚度矩阵, 得

$$\bar{k}^{\textcircled{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 60 & 0 & 0 & \vdots & -60 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 1.5 & \vdots & 0 & -1.5 & 1.5 \\ 0 & 1.5 & 2 & \vdots & 0 & -1.5 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -60 & 0 & 0 & \vdots & 60 & 0 & 0 \\ 0 & -1.5 & -1.5 & \vdots & 0 & 1.5 & -1.5 \\ 0 & 1.5 & 1 & \vdots & 0 & -1.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ EI \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \quad (a)$$

再由单元②的  $\bar{x}$  轴与  $x$  轴夹角  $\alpha = -90^\circ$ , 得  $\sin\alpha = -1$ ,  $\cos\alpha = 0$ 。将其代入式 (9.3.5) 得  $T$ , 按式 (9.3.6b) 计算即得  $k^{\textcircled{2}}$  如下:

$$k^{\textcircled{2}} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 1.5 & \vdots & -1.5 & 0 & 1.5 \\ 0 & 60 & 0 & \vdots & 0 & -60 & 0 \\ 1.5 & 0 & 2 & \vdots & -1.5 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1.5 & 0 & -1.5 & \vdots & 1.5 & 0 & -1.5 \\ 0 & -60 & 0 & \vdots & 0 & 60 & 0 \\ 1.5 & 0 & 1 & \vdots & -1.5 & 0 & 2 \end{bmatrix} EI \quad (b)$$

比较式 (a)、式 (b) 可知,  $k^{\textcircled{2}}$  可由  $\bar{k}^{\textcircled{2}}$  交换第 1、2 列, 4、5 列和 1、2 行, 4、5 行得到。只有设单元的局部坐标系与结构坐标系相差  $270^\circ$  时, 才可用这种换行、换列的简便方法将单元刚度矩阵在两个坐标系之间转换。

【例 9.3.2】试求图 9.3.3 所示桁架中单元②的单元刚度矩阵  $k^{\textcircled{2}}$ 。已知该单元的轴向刚度  $EA = 4 \times 10^4 \text{ kN}$ 。按图中给定的坐标系。

解: (1) 计算桁架单元  $k^e$  一般式

桁架单元的坐标转换矩阵可由划掉式 (9.3.5) 中的第 3、6 行和第 3、6 列上的元素得到, 即

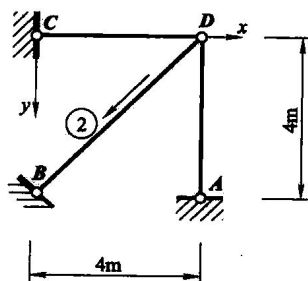


图 9.3.3 桁架

$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & \vdots & & \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & \vdots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \vdots & \cos\alpha & \sin\alpha \\ & 0 & \vdots & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (9.3.9)$$

将式 (9.2.6) 和式 (9.3.9) 代入式 (9.3.6b), 得所计算桁架单元在  $xoy$  坐标系下单元刚度矩阵  $k^e$  的一般式:

$$k^e = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & \vdots & -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha & \vdots & -\cos\alpha\sin\alpha & -\sin^2\alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha & \vdots & \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ -\cos\alpha\sin\alpha & -\sin^2\alpha & \vdots & \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix} \quad (9.3.10)$$

(2) 计算  $k^{\textcircled{2}}$

已知单元②的  $\bar{x}$  轴与  $x$  轴夹角  $\alpha = 135^\circ$ , 得  $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; 杆长  $l = 4\sqrt{2}\text{m}$ ,  $EA = 4 \times 10^4 \text{kN}$ 。

将已知值代入式 (9.3.10), 计算得单元②的  $k^{\textcircled{2}}$  :

$$k^{\textcircled{2}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \vdots & -1 & 1 \\ -1 & 1 & \vdots & 1 & -1 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ -1 & 1 & \vdots & 1 & -1 \\ 1 & -1 & \vdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{\sqrt{2}}{4} \times 10^4$$

## 思考

1. 设局部坐标系与结构坐标系相差  $90^\circ$  和  $-90^\circ$ , 分别写出两种情况下用  $\bar{\delta}$  列阵中的元素表示的  $\delta$  列阵。已知:

$$\delta^e = \{u_A^e \quad v_A^e \quad \theta_A^e \quad \vdots \quad u_B^e \quad v_B^e \quad \theta_B^e\}^T$$

$$\bar{\delta}^e = \{u_A^e \quad v_A^e \quad \bar{\theta}_A^e \quad \vdots \quad u_B^e \quad v_B^e \quad \bar{\theta}_B^e\}^T$$

2. 如何理解或解释例 9.3.1 中的, 当单元的局部坐标和结构坐标相差  $270^\circ$  ( $-90^\circ$ ) 时, 按将  $\bar{k}^e$  某些行交换和相应的某些列的交换即可得到  $k^e$ ?

## 9.4 建立典型结构刚度矩阵

本节依据位移法原理, 直接用平衡原理建立结构的矩阵位移法典型方程 (即典型结构刚度方程), 归纳并找出直接刚度法集成结构刚度矩阵 (或结构刚度方程) 的途径。

### 9.4.1 建立结构刚度方程

以图 9.4.1 (a) 所示的仅受结点荷载作用的刚架为例进行分析。

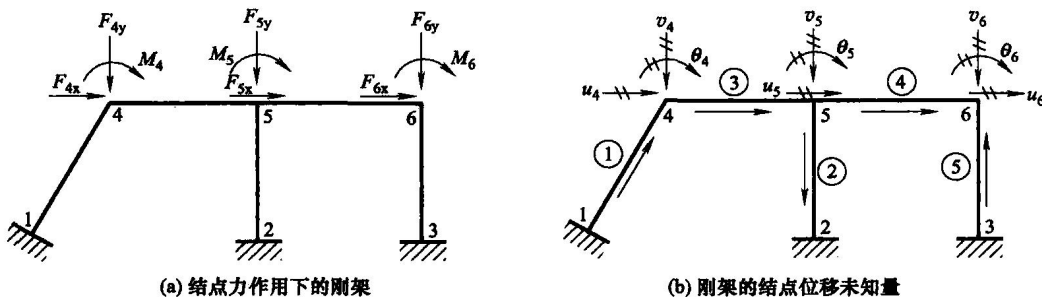


图 9.4.1 仅受结点荷载作用的刚架

#### (1) 刚架的结点位移列向量

同位移法相同, 结构的矩阵位移法基本未知量是结构中独立的未知结点位移。只是因矩阵位移法主要用于编程, 由计算机实施计算, 为了使程序能通用各类结构分析, 通常要考虑受弯杆件的轴向变形、弯曲变形的影响, 而无需考虑由此带来的结点未知量增多的问题。所以, 通常情况下若无特殊说明, 在判断结构的结点位移未知量时, 结构内的受弯直杆的轴向变形需要考虑。

图 9.4.1 (a) 所示的仅受结点荷载作用的刚架, 除了 3 个支座均为固定支座 (支座结点) 完全没有位移外, 3 个自由刚结点中的每一个刚结点在平面内都有 3 个独立的位移, 刚架共有 9 个结点位移未知量。结点位移在刚架上的标示见图 9.4.1 (b)。结构的结点位移和结点荷载一样, 均按结构坐标系的正方向表示, 符合各物理量在它们所在坐标系的正方向上时为正的统一规定。

逐个结点按  $u_i$ 、 $v_i$ 、 $\theta_i$  的顺序, 写出刚架的结点位移列向量:

$$\Delta = \{u_4 \quad v_4 \quad \theta_4 \quad ; \quad u_5 \quad v_5 \quad \theta_5 \quad ; \quad u_6 \quad v_6 \quad \theta_6\}^T \quad (9.4.1a)$$

与结点位移列向量一致, 逐个结点按  $F_{ix}$ 、 $F_{iy}$ 、 $M_i$  的顺序, 写出结点力列向量:

$$F = \{F_{4x} \quad F_{4y} \quad M_4 \quad ; \quad F_{5x} \quad F_{5y} \quad M_5 \quad ; \quad F_{6x} \quad F_{6y} \quad M_6\}^T \quad (9.4.1b)$$

以上两列向量的排列方式 (同一结点上的力或位移的下标) 均为它们所在结点的编码, 因此可将以上两向量用按结点 (或结点码) 划分的结点位移子列阵表示:

$$\Delta = \{\Delta_4 \quad ; \quad \Delta_5 \quad ; \quad \Delta_6\}^T \quad (9.4.2a)$$

$$F = \{F_4 \quad ; \quad F_5 \quad ; \quad F_6\}^T \quad (9.4.2b)$$

式中,  $\Delta_i$  为刚架  $i$  结点的结点位移子列阵,  $\Delta_i = \{u_i \quad v_i \quad \theta_i\}^T$ ;  $F_i$  为刚架  $i$  结点的结点力子列阵,  $F_i = \{F_{ix} \quad F_{iy} \quad M_i\}^T$ 。

## (2) 按平衡原理建立结构刚度方程

结构刚度方程是建立在各单元的杆端力和杆端位移的关系 (即  $k^e$ ) 已知基础上的。同上面结点位移、结点力的结点编码子列阵形式相对应, 按式 (9.3.8b) 写出刚架各单元在结构坐标系下的单元刚度方程按杆端划分子块的形式:

$$\begin{cases} F_1^{\text{①}} = k_{11}^{\text{①}} \Delta_1^{\text{①}} + k_{14}^{\text{①}} \Delta_4^{\text{①}} \\ F_4^{\text{①}} = k_{41}^{\text{①}} \Delta_1^{\text{①}} + k_{44}^{\text{①}} \Delta_4^{\text{①}} \end{cases} \quad \begin{cases} F_5^{\text{④}} = k_{55}^{\text{④}} \Delta_5^{\text{④}} + k_{56}^{\text{④}} \Delta_6^{\text{④}} \\ F_6^{\text{④}} = k_{65}^{\text{④}} \Delta_5^{\text{④}} + k_{66}^{\text{④}} \Delta_6^{\text{④}} \end{cases} \quad \begin{cases} F_5^{\text{②}} = k_{55}^{\text{②}} \Delta_5^{\text{②}} + k_{52}^{\text{②}} \Delta_2^{\text{②}} \\ F_2^{\text{②}} = k_{25}^{\text{②}} \Delta_5^{\text{②}} + k_{22}^{\text{②}} \Delta_2^{\text{②}} \end{cases} \quad (9.4.3)$$

$$\begin{cases} F_3^{\text{⑤}} = k_{33}^{\text{⑤}} \Delta_3^{\text{⑤}} + k_{36}^{\text{⑤}} \Delta_6^{\text{⑤}} \\ F_6^{\text{⑤}} = k_{63}^{\text{⑤}} \Delta_3^{\text{⑤}} + k_{66}^{\text{⑤}} \Delta_6^{\text{⑤}} \end{cases} \quad \begin{cases} F_4^{\text{③}} = k_{44}^{\text{③}} \Delta_4^{\text{③}} + k_{45}^{\text{③}} \Delta_5^{\text{③}} \\ F_5^{\text{③}} = k_{54}^{\text{③}} \Delta_4^{\text{③}} + k_{55}^{\text{③}} \Delta_5^{\text{③}} \end{cases}$$

参见图 9.4.2 (a)~图 9.4.2 (c), 分别建立刚架每个自由刚结点的平衡方程  $\sum F_x = 0$ 、 $\sum F_y = 0$  和  $\sum M = 0$ , 可得

$$\begin{cases} F_{4x} = F_{4x}^{\text{①}} + F_{4x}^{\text{③}} \\ F_{4y} = F_{4y}^{\text{①}} + F_{4y}^{\text{③}} \\ M_4 = M_4^{\text{①}} + M_4^{\text{③}} \end{cases} \quad \begin{cases} F_{5x} = F_{5x}^{\text{②}} + F_{5x}^{\text{③}} + F_{5x}^{\text{④}} \\ F_{5y} = F_{5y}^{\text{②}} + F_{5y}^{\text{③}} + F_{5y}^{\text{④}} \\ M_5 = M_5^{\text{②}} + M_5^{\text{③}} + M_5^{\text{④}} \end{cases} \quad \begin{cases} F_{6x} = F_{6x}^{\text{④}} + F_{6x}^{\text{⑤}} \\ F_{6y} = F_{6y}^{\text{④}} + F_{6y}^{\text{⑤}} \\ M_6 = M_6^{\text{④}} + M_6^{\text{⑤}} \end{cases}$$

由以上三组方程可看出, 结点上的某一结点力等于该结点上所有杆端在该结点力方向上的杆端力之和, 或结点上的结点力子列阵等于结点上所有杆端的杆端力子列阵和的形式, 即

$$\begin{cases} F_4 = F_4^{\text{①}} + F_4^{\text{③}} \\ F_5 = F_5^{\text{②}} + F_5^{\text{③}} + F_5^{\text{④}} \\ F_6 = F_6^{\text{④}} + F_6^{\text{⑤}} \end{cases} \quad (9.4.4)$$

若称与某一结点相连的单元为该结点的相关单元, 则上式表明某一结点的结点力 (子列阵), 等于该结点的所有相关单元在该结点的杆端力子列阵之和。将式 (9.4.3) 相应的单元杆端力子列阵代入上式, 得

$$\begin{cases} F_4 = k_{41}^{\text{①}} \Delta_1^{\text{①}} + k_{44}^{\text{①}} \Delta_4^{\text{①}} + k_{44}^{\text{③}} \Delta_4^{\text{③}} + k_{45}^{\text{③}} \Delta_5^{\text{③}} \\ F_5 = k_{55}^{\text{②}} \Delta_5^{\text{②}} + k_{52}^{\text{②}} \Delta_2^{\text{②}} + k_{54}^{\text{③}} \Delta_4^{\text{③}} + k_{55}^{\text{③}} \Delta_5^{\text{③}} + k_{55}^{\text{④}} \Delta_5^{\text{④}} + k_{56}^{\text{④}} \Delta_6^{\text{④}} \\ F_6 = k_{65}^{\text{④}} \Delta_5^{\text{④}} + k_{66}^{\text{④}} \Delta_6^{\text{④}} + k_{63}^{\text{⑤}} \Delta_3^{\text{⑤}} + k_{66}^{\text{⑤}} \Delta_6^{\text{⑤}} \end{cases} \quad (9.4.5)$$

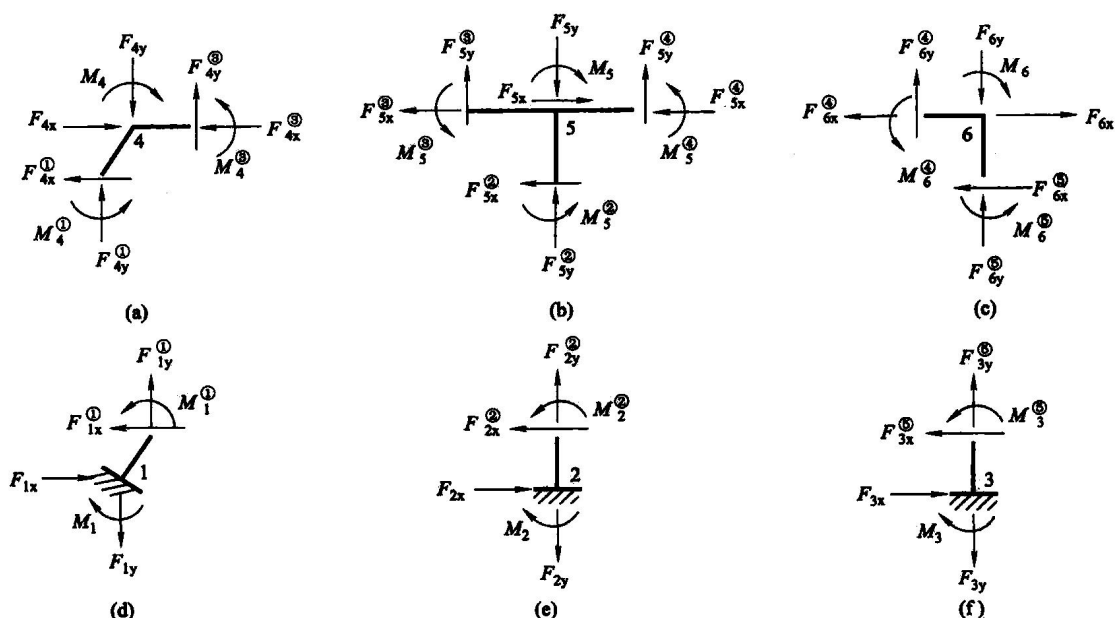


图 9.4.2 刚架的结点隔离体

根据结点的位移与结点上所连的各杆端位移一致的条件, 即  $\Delta_i^e = \Delta_i$  (结点位移列阵  $\Delta_i$  与结点  $i$  相关单元  $i$  端的杆端位移列阵  $\Delta_i^e$  相等), 可知上式中凡有相同下标的单元杆端位移子列阵与有同一下标的结点位移子列阵相等。即

$$\Delta_4^1 = \Delta_4^3 = \Delta_4 \quad \Delta_5^2 = \Delta_5^3 = \Delta_5^4 = \Delta_5 \quad \Delta_6^4 = \Delta_6^5 = \Delta_6 \quad \Delta_1^1 = \Delta_2^2 = \Delta_3^3 = 0$$

将以上关系代入式 (9.4.5), 整理后得

$$\begin{cases} F_4 = (k_{44}^1 + k_{44}^3) \Delta_4 + k_{45}^3 \Delta_5 \\ F_5 = k_{54}^3 \Delta_4 + (k_{55}^2 + k_{55}^3 + k_{55}^4) \Delta_5 + k_{56}^4 \Delta_6 \\ F_6 = k_{65}^4 \Delta_5 + (k_{66}^4 + k_{66}^5) \Delta_6 \end{cases} \quad (9.4.6a)$$

写成由结点子块表示的矩阵:

$$\begin{Bmatrix} F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{44}^1 + k_{44}^3 & k_{45}^3 & 0 \\ k_{54}^3 & k_{55}^2 + k_{55}^3 + k_{55}^4 & k_{56}^4 \\ 0 & k_{65}^4 & k_{66}^4 + k_{66}^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{Bmatrix} \quad (9.4.6b)$$

该式即为刚架的结构刚度方程, 可进一步缩写为

$$F = K \Delta \quad (9.4.7)$$

刚架的结构刚度方程最终表现为结点力与结点位移之间的关系,  $K$  称为结构刚度矩阵。

## 9.4.2 结构刚度矩阵 $K$ 的特征和意义

由式 (9.4.6b) 可看出, 刚架的刚度矩阵  $K$  是由单元刚度矩阵的子块有规律地构成的。

设  $K$  中第  $i$  行第  $j$  列上的子块为  $K_{ij}$ , 式 (9.4.6b) 可表示为