



初等数学

复习及研究(立体几何)

朱德祥 朱维宗 编著

CHUDENG SHUXUE
 FUXI JI YANJIU
 (LITI JIHE)



CHUDENG SHUXUE FUXI JI YANJIU (LITI JIHE)

初等数学

复习及研究(立体几何)

朱德祥 朱维宗 编著

哈尔滨工业大学出版社

内 容 提 要

本书以中学平面几何和立体几何为基础写成,为了方便读者学习,特别注意全书内容自成系统,对立体几何知识加以系统地复习、整理和适当地加深、提高.全书内容分为五章,分论空间直线与平面、球与轨迹、初等几何变换、面积和体积、简单球面几何与球面三角.编写时注意到与平面几何、解析几何、射影几何、几何基础各科间的联系.每章末附有习题(附录中有解答),以帮助读者进一步加深对本课程的理解.

本书可作为高等院校数学与应用数学专业的参考教材、中学教师自修用书或教学参考资料,也可作为喜欢初等几何并愿意在这门课程上深入研讨的读者的自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

初等数学复习及研究. 立体几何/朱德祥,朱维宗编著.

—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2010.5

ISBN 978-7-5603-3002-0

I. ①初… II. ①朱… ②朱… III. ①初等数学—教学研究—师范大学—教材 ②立体几何—教学研究—师范大学—教材 IV. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 059024 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 唐 蕾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 20.75 总字数 362 千字

版 次 2010 年 6 月第 1 版 2010 年 6 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-3002-0

印 数 1~3000 册

定 价 38.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

代序言^①

对《初等数学复习及研究(立体几何)》教学和学习的体会

教材是学校进行教育必不可少的条件之一。新中国成立前,我国大专院校所使用的教材绝大部分是欧美教材;解放初期又多以苏联教材为主,唯独没有适合我国国情的自己的教材,有鉴于此,解放初的新中国,在百废待兴、百业待举的关键时刻,就开始组织力量编写适合我国国情、具有中国特色的教材。一系列的筹备之后,于1955年在长沙召开了师范院校教学大纲的讨论会,经过会议的充分讨论和研究,制定出各科教学大纲试行草案作为编写教材的依据。

由于朱德祥教授在几何方面有很高的造诣,因此教育部把编写《初等数学复习及研究(立体几何)》的任务交给了他,这是一项光荣而艰巨的任务,也是昆明师范学院(现为云南师范大

^①该文是朱德祥先生的学生,云南师范大学郑佩瑶教授为纪念朱德祥先生执教55周年所撰。郑佩瑶教授师从朱德祥先生,1949年毕业于昆明师范学院数学系,后留校任教至20世纪80年代末退休(期间曾到滇西大学组建数学系)。郑佩瑶教授历任昆明师范学院数学系几何教研室主任、滇西大学数学系主任、云南师范大学函授处处长等职。郑佩瑶教授对几何学有精深的造诣,尤其对初等几何的教学与研究在云南省享有盛誉,曾多次与朱德祥先生合作编写几何教材,是朱德祥先生最喜爱的学生之一。

学)的光荣.学校及数学系领导对此给予极大的关心和支持.朱老师除完成自己的教学任务外,把全部精力和时间都花在了这本书的编写上.

1960年,高等教育出版社以高等学校教学用书作为高师院校教材正式出版《初等数学复习及研究(立体几何)》一书.1979年由人民教育出版社重印^①,两次共印了34万册,充分说明了这本教材在全国师范院校对提高教学质量所起的突出作用和巨大影响.至今仍不失为一非常适用的优秀教材.

近水楼台先得月,我很荣幸第一个使用初稿的油印本为教材,对我来说这是一个向老师学习的好机会,经过多年的教学实践,对朱老师的这本教材我体会颇深.

初等数学复习及研究这类课程,在师范院校里是比较难教的,因此教材也较难于编写,既要注重“复习及研究”的关系处理,又要让学生在彻底掌握知识的同时注重能力的培养.朱老师的书给我们树立了一个典范.初等数学复习及研究这类课程,既是师范生的基础课,又是他们的业务课.既要把初等数学讲深讲透,又不能是中学数学的简单重复再现,必须开阔视野、居高临下,用高观点来处理初等数学,既要注重本学科与其他学科的内在联系,又要注意结合中学数学教育的实际.兹举例以明之:

作为复习来讲,该书包括了全部中学立体几何的内容,又不是简单的重复,如立体几何一开始所讲的点、直线、平面及其相互位置关系,本书是用公理法讲述,把中学课本中不能讲清楚的问题讲清了.这恐怕就是常说的要给学生一碗水,教师得有一桶水的关系了.虽然在中学的几何教材里不讲希尔伯特公理体系,但教师都应该知道这些,才能对中学的几何有深刻地理解,讲起课来心里就踏实而不致出错.

该书用语十分准确,如不少教科书上把圆柱定义为“底面是圆的柱”,在本书第4.5节中定义为“直截面是圆的柱”,两者在表达的准确和精确程度上的差别显而易见.

该书的论证是严密的,如第1.10.7小节三直三角面,在这里共讲了四个命题,是一环紧扣一环的论证.证法严密、巧妙.尤其是其中的第3款,同时给了三个证法,广泛联系体积概念及解析几何知识,给人以新的启迪.再如第1.7.4小节直线与平面间的角,有的教科书是这样定义的:“一个平面的斜线和它在这平面内的射影所成的锐角,叫做这条直线和这个平面所成的角.”在本教材上首先

^① 本书第一版1960年由高等教育出版社出版.在“文化大革命”期间,高等教育出版社和人民教育出版社合并,因此1979年重印时,属名人民教育出版社.

证明了定理 12“斜线与其在平面 α 上的射影所成的锐角, 小于该斜线与 α 上任何其他直线间的角。”然后才给出直线与平面夹角的定义. 这样就使人对直线与平面夹角的定义又有了更深入的了解; 在第 1.9 节作图题 3“给定两条不共面直线, 求作一直线和它们垂直相交.”这定理如 1987 年出版的中学教师专业合格证书数学教材——杨大淳主编的《解析几何》中第 285 页, 第 3.6 节一开头就指出现行立体几何中没有给出存在性与唯一性. 杨编解析几何给出了解析证法. 在朱老师所编立体几何中论证是全面的. 又如第 1.7 节定理 3 证明了“平行线段的比, 不因平行射影而变”这里实际上是为讲仿射几何做准备, 等等. 从此可看出朱老师是如何处理复习及研究的关系的.

存在性的证明是本书的一大特点. 言之有物还是言之无物, 是唯物论与唯心论的重要分水岭.

少而精在本教材中也为我们树立了典范, 如本书第 1.10.1~1.10.6 小节中用了不到 12 页的版面, 把三面角和多面角作了较完整的介绍. 在第 5.3~5.6 节中就把球面三角形和球面多边形讲了, 这样前呼后应真是一举两得, 如果我们再将它们与有关的平面几何相联系, 那将是一举三得. 少而精不是少在内容上, 而是独具匠心的前后安排、内容归类、方法巧妙、化难为易. 这一点在朱先生所编的《高等几何》一书中体现得更明显.

这本书第四章讲了面积与体积及其计算公式, 采用的不是可公度与不可公度的理论, 而是极限的理论. 这不仅解决了当前的需要, 更广泛一点, 若用其法, 那么圆周长、圆面积、球的表面积、球的体积等都能得到解决, 方法的选择, 用心的奥妙, 真是越想味越浓.

这本教材不仅讲了立体几何, 而且广泛联系球面几何、球面三角、解析几何、近世几何与几何基础, 这里就不再赘述了. 最后还需说明一点, 教材中对我国立体几何方面的历史成果适时地给予介绍, 让学生对立体几何及其发展有了一定的了解, 如第 4.4.1 小节祖暅原理、附录 B 及习题中均有所见. 这样不但让学生受到了爱国主义教育, 而且对学生树立民族自尊心与民族自信心起到良好的教育作用.

由于教学计划的改动, 初等数学授课时数锐减, 本书已难于在现行教学计划中作为教材使用. 但本书仍不失为一本很好的教学参考书, 并且有它的现实性和积极意义, 其理由有二:

1. 本书概念准确, 论证严密、解题方法巧妙, 尤其是内容丰富, 是我国自编的为数不多的立体几何优秀教材之一, 是教好、学好现行的朱德祥编《初等几何研究》的必备参考书, 是师范生和中学数学教师的一本好的参考书.

2. 众所周知,球面几何、球面三角在天文、航海、测量、制图学、结晶学、矿山几何学等方面都有广泛的应用. 我校地理系就有老师询问、学习和应用,所以本书也是从事这些方面工作的同志的一本很好的参考书^①;对于数学工作者来说,学一点球面几何知识,有利于了解罗氏几何,从而对认识空间、开阔视野也是很有益的.

限于本人水平,对老师的著作只能有这点挂一漏万的体会,不妥之处,请同行多给指教,仅就此向老师执教 55 年奉献一点心意,感谢老师栽培,并祝老师健康长寿.

郑佩瑶

1991 年于云南师范大学

^① 2003 年我国第八次课程改革中,在高中选修课系列 3 中有一个专题就是球面上的几何.

第二版前言

几何学起源得很早,至少可追溯至公元前 3500 年. 古代的中国、埃及、巴比伦等地的先民们从生产、生活中积累了大量的几何知识,特别是从尼罗河泛滥之后的土地重新测量,建筑金字塔等实践活动中,逐步形成了经验几何. 古埃及的经验几何在公元前 7 世纪左右传入古希腊,与古希腊的逻辑学相结合,以抽象化、逻辑化、初等的公理化为特点,成为数学的独立学科. 欧几里得(Euclid, 约前 330—前 275)在前人工作的基础上写成《几何原本》,可以说是集古埃及、古希腊几何之大成. 在其后的 2 000 多年里,从《几何原本》发展出来的初等几何成为基础教育中的数学学科最基本、最重要的课程之一.

本书系统地论述初等几何中的立体几何部分,入手点是希尔伯特公理体系,在对中学已学过的初等几何进行复习的同时更关注立体几何的研究. 全书分为五章,论证了 215 个立体几何定理,45 个推论,收录了 427 道习题,此外有四个附录. 本书与梁绍鸿教授编著的《初等数学复习及研究(平面几何)》是国内高师院校数学专业在 20 世纪 60 年代初等数学方面最有影响的教材.

本书初版是遵照 1956 年 3 月教育部第 69 号文件的指示,按 1955 年在长沙所讨论的立体几何教学大纲,以前苏联数学

家别列标尔金著《初等几何教程(下卷)》为主要参考资料编写.1957年7月朱德祥先生完成初稿,同年8月印成讲义,在昆明师范学院数学系和西南师范学院数学系试用,并向国内各高师院校的同行征求意见,先后收到9所院校的意见.1959年3月教育部组织了对本书的审查,通过对原讲义增、删,进一步突出党的教育方针和师范特色,于1959年完稿,1960年由高等教育出版社出版,印刷了20000册.1979年人民教育出版社重印32万册,以满足当时青年学生学习初等几何的需求.之后,朱德祥先生收到了许多读者的信函,与朱先生探讨立体几何的学习,索要资料.1982年高等教育出版社向朱先生约稿,希望出版朱先生的《初等几何复习及研究》(当时只写了平面部分)讲义.朱德祥先生对原讲义加以增、删、改,并将本书内容压缩成第四章,取名《初等几何研究》,1985年2月由高等教育出版社出版,2003年又出版第二版并多次重印.

本次修订保留了第一版的特色与精华,增补了两个附录.鉴于本书已是一本很完善的有影响的教材,再版时仅对原书的文字作局部修改,增加一些注释.增补的两个附录,一个是“习题简解”,对原书427道习题中的绝大部分给出解答(一些读者只要认真阅读本书就能完成的习题,限于篇幅不再给出解答),有些题目提供二至三种不同解答,以供读者学习之需.另一个附录是朱德祥先生在80岁时写的“八旬回顾”,供读者加深对朱德祥先生的了解.朱德祥先生是我国著名几何学家、数学教育家,在初等几何方面有很深的造诣,在教书育人方面做出了卓越的贡献,把毕生精力奉献给了祖国边疆的教育事业,他的一生有许多值得我们学习的地方.云南师范大学郑佩瑶教授是朱德祥先生的高足,在云南省几何界享有盛誉.本书再版时将他1991年写的“对《初等数学复习及研究(立体几何)》教学和学习的体会”作为本书的代序言,在此向郑佩瑶教授致以真挚的感谢!

限于修订时间紧迫,加上我的水平有限,不妥之处,尚祈读者教正.

感谢哈尔滨工业大学出版社再版这本书!感谢云南师范大学、云南师范大学数学学院及教务处对本书再版的大力支持!感谢云南师范大学“几何课程”精品教材建设教学团队成员对本书修订的指导!

朱维宗

2009年9月于云南师范大学

第一版前言

本书是根据中华人民共和国教育部 1955 年编订的师范学院数学系初等数学复习及研究(立体几何)教学大纲编写的. 依据教学大纲, 主要参考书为别列标尔金著《初等几何教程(下卷)》. 编者除此为主要参考书资料并参考了大纲所列其他文献外, 还参考了另外一些资料, 其中特别应该提出的是阿达玛著的《初等几何(下册)》(1966 年, 上海科技出版社出版).

本书是编者在昆明师范学院试用过几次的教材, 在边教边改的过程中, 吸取了很多兄弟院校的意见, 作了适当地修改和补充而编著的.

根据教学大纲和通过大纲时的小组总结: “本学科应从公理出发系统进行讲授, 关于公理的选择, 需适当照顾学生程度, 使其易于接受, 并建议按照别氏书所列公理.” 由于本课程讲授学时有限, 而内容相当多, 没有很多时间详细地从公理出发系统地讲授. 并且别氏书中所列公理与四年级的几何基础里所列的公理讲法不同. 例如按照别氏所列结合公理 I_b , “每直线通过无限多点”, 这与几何基础里讲的有出入. 事实上, 根据希尔伯特公理系统, 直线上点数的无限性不是结合公理的推论. 我们知道, 适当地定义点、直线和平面以及结合关系, 可以证明只有四点六直线四平面的四面体模型, 已可实现全部结合公理. 为了

不致在学生思想上造成混乱,并避免与几何基础交错,编者采用了希氏公理系统,重点地介绍了结合公理,将别氏所列出的某些公理当作定理采用,声明这些命题在几何基础里可以一一证明.其他较复杂的顺序公理、连续公理的推论,也只有留给几何基础了.在条件允许的情况下,在这方面可酌量增补.

本书内容共分五章.第一章空间直线与平面,在内容上占最多篇幅,也是学好立体几何的关键所在.若时间不敷,有关四面体的材料可以少讲点.

第二章球与轨迹,教学大纲要求未来的教师能熟练地运用交规法解作图题,因此对轨迹要深刻理解和掌握.

第三章初等几何变换,螺旋运动是教学大纲上所没有的,可考虑不讲或介绍第3.2.4小节和第3.2.5小节的一部分,略去第3.2.6小节.

第四章面积和体积,大纲上规定讲四个学时,这里所写的材料当然无法在四个学时内教完,可着重面积与体积的基本概念和有关极限概念的地方,其他供读者参考自学.

第五章简单球面几何与球面三角,这一章要经常注意与几何基础的联系.这里比教学大纲多一个定理,即球面三角形的面积和它的球面过剩成正比,因为在这里介绍这个定理是比较方便的.我们知道,罗巴切夫斯基几何上有一个类似命题,即三角形面积与其角度亏缺成正比.球面几何的这一简单性质,有助于了解罗氏几何.

轨迹虽集中在第二章讲,习题仍分散于各章.作图题也是基本上采取分散在各章讲授.习题是本书的重要组成部分之一,每一章都备有数目相当多的题目,大体上按讲授的顺序排列,其中一些是简易的,有的则较难,希望能帮助学习者培养兴趣、理解并巩固讲授的内容.所有证明题、计算题、轨迹探求、作图问题等,兼容并包,希望有助于独立思考的锻炼.

本书注意搜罗了一些解决实际应用问题的例题和习题,以培养解决实际问题的能力,但为数尚少,希望各校教师结合当地具体情况,加以补充.

承昆明师范学院许多同志给以帮助,并承郑佩瑶同志制图,在这里谨向他们致谢!

由于本人水平有限,疏漏之处在所难免,尚希读者指正!

朱德祥

1960年1月于昆明师范学院

目 录

第一章 空间直线与平面	1
1.1 点与直线、点与平面的相关位置·空间几何公理	1
1.1.1 结合公理	1
1.1.2 顺序公理	2
1.1.3 合同公理	2
1.1.4 连续公理	3
1.1.5 平行公理	3
1.1.6 公理的推论	3
1.1.7 希尔伯特几何体系的三个基本对象和三个基本关系	5
1.2 空间二直线的相关位置	5
1.2.1 注意	6
1.2.2 引理	6
1.2.3 平行线的传递性	7
1.2.4 空间二直线间的角	7
1.3 直线与平面的相关位置	8
1.4 二平面的相关位置·三平面的相关位置	11
1.4.1 介于平行平面间的平行线段	13
1.4.2 三平面的相关位置	14

1.5	立体几何作图	15
1.5.1	立体几何作图公法	16
1.5.2	简单作图题	16
1.6	直线与平面的垂直	18
1.7	正射影·平行射影	23
1.7.1	从一点到一平面的垂线和斜线	25
1.7.2	三垂线定理及其逆定理	26
1.7.3	直角的射影	27
1.7.4	直线与平面间的角	28
1.8	二面角	29
1.9	作图题三则	32
1.10	三面角·多面角	34
1.10.1	互补三面角	34
1.10.2	关于多面角中面角与二面角的不等式	36
1.10.3	三面角的外二面角	37
1.10.4	有向三面角	38
1.10.5	两个三面角的相等	38
1.10.6	三面角的面角与其二面角之间的关系	41
1.10.7	三直三面角	42
1.11	四面体	45
1.11.1	四面体的外接平行六面体	45
1.11.2	四面体的高线	47
1.11.3	四面体的相等	49
1.12	多面体	51
1.12.1	关于凸多面体的欧拉定理	51
1.12.2	正多面体	53
1.12.3	正多面体至多有五种	53
1.12.4	有五种正多面体存在	55
1.12.5	例题	58
	习题 1	58
	第二章 球·轨迹	68
2.1	球	68

2.2	球与直线以及球与平面的相关位置	68
2.3	两球的相关位置	70
2.4	点对于球的幂	72
2.5	立体几何轨迹	73
2.5.1	基本轨迹命题	74
2.5.2	较复杂的轨迹命题	76
2.6	四面体的外接、内切和旁切球	80
2.7	用交轨法解作图题	82
	习题 2	84
第三章	初等几何变换	89
3.1	图形的相等	89
3.2	运动	92
3.2.1	平移	93
3.2.2	旋转	94
3.2.3	半周旋转或轴反射	95
3.2.4	螺旋运动	95
3.2.5	螺旋运动与轴反射	97
3.2.6	螺旋运动的乘积	98
3.3	反射或对称变换	99
3.3.1	面反射	99
3.3.2	(中)心反射	101
3.4	合同变换	102
3.5	自相对称——面对称、轴对称、(中)心对称	103
3.5.1	正多面体的内切球和外接球	104
3.5.2	正多面体所容许的旋转和对称变换	105
3.5.3	立方体所容许的旋转和对称变换	106
3.6	利用运动和反射解作图题	107
3.7	位似形及其性质	110
3.8	两球的位似	113
3.9	用位似法解作图题	114
3.10	反演	115
3.10.1	反演的二重点	116

3.10.2	直线、平面、球面、圆周的反形	116
3.10.3	反演的保角性	118
3.10.4	用反演法解作图题	119
习题 3		119
第四章	面积和体积	123
4.1	面积和体积的概念	123
4.2	长方体的体积	124
4.3	棱柱和平行六面体	126
4.4	棱锥	129
4.4.1	祖暅原理	132
4.4.2	棱锥的体积	134
4.4.3	棱台	135
4.5	圆柱	136
4.6	圆锥	138
4.7	球面积	141
4.8	球体积	143
习题 4		147
第五章	简单球面几何与球面三角	154
5.1	球面几何	154
5.2	球面角、球面二角形、大圆的垂直	155
5.3	球面多边形	156
5.3.1	球面多边形与多面角的关系	157
5.3.2	极三角形	158
5.4	球面三角形的合同	159
5.5	关于球面三角形中边与角的不等	159
5.6	球面三角形边与角之间的关系	161
5.7	一点到一圆的球面距离	161
5.8	球面三角形的面积	163
5.9	球面三角	165
5.10	正弦定律	166
5.11	边的余弦定律	168
5.12	角的余弦定律	169

5.13	半角公式	170
5.14	半边公式	171
5.15	例题	172
	习题 5	175
附录	179
附录 A	关于四面体旁切球的存在与分布	179
A1	几何的处理	179
A2	解析的处理	181
A3	讨论	183
附录 B	祖暅求球体积法	184
附录 C	习题简解	186
附录 D	八旬回顾	299
附录 E	原书的参考文献	307
编辑手记	309
后记	312

第一章 空间直线与平面

1.1 点与直线、点与平面的相关位置·空间几何公理

我们现在以中学几何以及一年级所学平面几何为基础,来学习立体几何.第一章是这个学习的关键部分.

首先介绍初等几何即欧几里得^①几何公理体系.这里所介绍的,基本上就是1899年希尔伯特^②在历史成就的基础上所完成的初等几何公理体系.

关于希尔伯特公理体系,在学习平面几何时可能已经介绍过了,此地为了完备和引用方便起见,再重复一下.

点、直线、平面称为几何元素.几何元素集合起来,便组成我们研究的对象几何图形.以后除非另有声明,将以大写字母 A, B, C 等表示点,以小写字母 a, b, c 等表示直线,以小写希腊字母 α, β, γ 等表示平面.并且当谈到两点、两直线、三平面等时,我们理解作不相同的两点、两直线、三平面.

若点 A 在直线 a 上,也就是说直线 a 通过或含有点 A .若点 A 在平面 α 上,也就是说平面 α 通过或含有点 A ^③.

1.1.1 结合公理

- I₁ 通过任意给定的两点有一直线.
- I₂ 通过任意给定的两点至多有一直线.
- I₃ 每一直线上至少有两点;至少有三点不同在一直线上.
- I₄ 通过任意给定的不共线三点(即三点不在同一直线上)有一平面;每一平面上至少有一点.
- I₅ 至多有一平面通过任意给定的不共线三点.
- I₆ 若直线 a 的两点 A, B 在平面 α 上,则 a 的所有点都在 α 上.这时直线

① Euclid(约前330—前275).

② David Hilbert(1862—1943).

③ 这里的“通过”或“含有”即“结合关系”,也称“关联关系”,参看本书1.1.7.