

成人高等教育公共课系列教材

高等数学

主编 李梅 侯亚君

GDSX

辽宁大学出版社

成人高等教育公共课系列教材

高等数学

主 编 李 梅 侯亚君
副 主 编 刘玉凤 原 璐
编写人员 (按姓氏笔画排列)
王宏栋 刘立士
刘玉凤 孙宏国
李 梅 侯亚君
原 璐

GD SX

辽宁大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学/李梅, 侯亚君主编. - 沈阳: 辽宁大学出版社, 2009. 12

(成人高等教育公共课系列教材)

ISBN 978-7-5610-5959-3

I. ①高… II. ①李…②侯… III. ①高等数学 - 成人教育: 高等教育 - 教材 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 220510 号

出 版 者: 辽宁大学出版社

(地址: 沈阳市皇姑区崇山中路 66 号 邮政编码: 110036)

印 刷 者: 沈阳市第二市政建设工程公司印刷厂

发 行 者: 辽宁大学出版社

幅面尺寸: 185mm × 260mm

印 张: 26. 25

字 数: 680 千字

出版时间: 2009 年 12 月第 1 版

印刷时间: 2009 年 12 月第 1 次印刷

责任编辑: 胡家诗

封面设计: 邹本忠 徐澄玥

责任校对: 齐 悦

书 号: ISBN 978-7-5610-5959-3

定 价: 38.00 元

联系电话: 024 - 86864613

邮购热线: 024 - 86830665

网 址: <http://press.lnu.edu.cn>

电子邮件: lnupress@vip.163.com

前 言

数学作为一门主要的基础学科有着极其广泛的应用。随着科学技术的进步,后续课程对基础课的教学内容也提出了新的要求,为了适应 21 世纪人才发展的市场需要,配合产业技术的提升和社会经济的迅速发展,为了满足成人高等院校职业教育的发展,提升成人高等职业技术人才的综合能力和素质,培养应用型、实用型人才的需要,根据教育部制定的《全国成人高等教育工学专科高等数学课程教学基本要求》,在认真总结全国成人高等教育数学教改的基础上,切合成人高等教育数学教学改革的实际,我们编写了这本《高等数学》。

本书的特点体现了成人高等教育的特色,贯彻“理解概念,强化应用和适用”的教学原则,以教师好用,学生好学为编写出发点,突出成人教育特色,立足以专业“够用、实用”为度,难易适中,统筹兼顾,强化基础知识、基本思想,从学生的实际出发,以达到会用为目的。本书内容的阐述及讲解浅显易懂,在每一节习题设置上难度低于例题难度,为了学生课后复习方便,本书在每一章后面还配备了学习指导及复习题。

本书共十一章,包括第一章函数、极限与连续,第二章导数与微分,第三章中值定理与导数的应用,第四章不定积分,第五章定积分及其应用,第六章微分方程,第七章向量代数与空间解析几何,第八章多元函数微分法及其应用,第九章重积分,第十章无穷级数,第十一章曲线积分。本书在教学过程中,宜分两个学期完成,总学时不少于 120 学时。本书个别章节标注“※”表示可学可不学,各院校可根据专业需要而定。

参加本书编写的有刘玉凤(第一章、第二章)、李梅(第三章)、原璐(第四章)、王宏栋(第五章、第九章、第十一章)、刘立士(第七章、第八章)、孙宏国

(第六章、第十章)、侯亚君(书后积分表及常用曲线、曲面)。本书由主编李梅教授统纂并定稿,由第二主编侯亚君教授主审。

本书在编写过程中得到了辽宁大学出版社、辽宁省数学届同仁及沈阳理工大学的大力支持,在此表示衷心的感谢!由于编者的水平和经验有限,书中不当之处在所难免,希望同行和广大读者批评指正,以便及时修正。

编 者

2009 年 11 月

目 录

第一章 函数 极限与连续	1
第一节 函数	1
一、区间	1
二、函数概念	2
三、函数的几种特性	4
四、反函数与复合函数	6
五、初等函数	7
习题 1-1	11
第二节 函数的极限	12
一、自变量趋于有限值时函数的极限	12
二、自变量趋于无穷大时函数的极限	14
习题 1-2	15
第三节 无穷小与无穷大	15
一、无穷小	15
二、无穷大	17
习题 1-3	17
第四节 极限运算法则	18
习题 1-4	21
第五节 两个重要极限	22
习题 1-5	24
第六节 无穷小的比较	25
习题 1-6	27
第七节 函数的连续性	28
一、函数的连续性的概念	28
二、函数的间断点	29
三、初等函数的连续性	30
四、闭区间上连续函数的性质	31
习题 1-7	32
第一章学习指导	33

一、基本要求	33
二、重点与难点分析	33
三、常见题型与解题指导	33
四、学法建议	38
第一章复习题	38
第二章 导数与微分	44
第一节 导数的概念	44
一、引 例	44
二、导数的定义	45
三、求导数举例	47
四、导数的几何意义	49
五、函数的可导性与连续性之间的关系	50
习题 2-1	50
第二节 函数的求导法则	51
一、函数的和、差、积、商的求导法则	51
二、反函数的求导法则	54
三、复合函数的求导法则	55
四、求导法则与导数公式	57
习题 2-2	58
第三节 高阶导数	59
习题 2-3	61
第四节 隐函数的导数以及由参数方程所确定的函数的导数	62
一、隐函数的导数	62
二、由参数方程所确定的函数的导数	64
习题 2-4	65
第五节 函数的微分	66
一、微分的定义	66
二、微分的几何意义	67
三、基本初等函数的微分公式与微分运算法则	68
习题 2-5	70
第二章学习指导	71
一、基本要求	71
二、重点与难点分析	71
三、常见题型与解题指导	71
四、学法建议	77
第二章复习题	77

第三章 中值定理与导数的应用	82
第一节 中值定理	82
一、罗尔定理	82
二、拉格朗日中值定理	83
习题 3-1	85
第二节 洛必达法则	86
习题 3-2	89
第三节 函数的单调性和曲线的凹凸性	90
一、函数单调性的判定法	90
二、曲线的凹凸性与拐点	92
习题 3-3	93
第四节 函数的极值和最大、最小值	94
一、函数的极值	94
二、函数的最大、最小值	96
习题 3-4	97
第五节 函数图形的描绘	98
习题 3-5	100
第三章学习指导	100
一、基本要求	100
二、重点与难点分析	100
三、常见题型与解题指导	102
四、学法建议	108
第三章复习题	109
第四章 不定积分	111
第一节 不定积分的概念与性质	111
一、原函数与不定积分的概念	111
二、基本积分表	114
三、不定积分的性质	115
习题 4-1	117
第二节 换元积分法	117
一、第一类换元法	118
二、第二类换元法	121
习题 4-2	124
第三节 分部积分法	125
习题 4-3	128

* 第四节 有理函数的不定积分	128
一、有理函数的不定积分	129
二、可化为有理函数的积分举例	130
* 习题 4-4	132
第五节 积分表的使用	132
习题 4-5	134
第四章学习指导	134
一、基本要求	134
二、重点与难点分析	135
三、常见题型与解题指导	137
四、学法建议	142
第四章复习题	142
第五章 定积分及其应用	144
第一节 定积分的概念及性质	144
一、曲边梯形的面积	144
二、变速直线运动的路程	145
三、定积分的概念	146
四、定积分的几何意义	147
五、定积分的性质	147
习题 5-1	149
第二节 微积分基本定理	149
一、积分上限的函数及其导数	149
二、牛顿-莱布尼茨公式	151
习题 5-2	152
第三节 定积分的换元积分法和分部积分法	153
一、定积分的换元积分法	153
二、定积分的分部积分法	154
习题 5-3	155
第四节 定积分在几何上的应用	156
一、微元法	156
二、平面图形的面积	157
三、立体的体积	159
习题 5-4	161
第五节 定积分在物理上的应用	162
一、变力做功	162
二、液体的压力	163

习题 5-5	164
* 第六节 反常积分	164
一、无穷区间上的反常积分	164
二、无界函数的反常积分	166
* 习题 5-6	167
第五章学习指导	168
一、基本要求	168
二、重点与难点分析	168
三、常见题型与解题指导	169
四、学法建议	175
第五章复习题	176
第六章 微分方程	178
第一节 微分方程的基本概念	178
习题 6-1	180
第二节 可分离变量的微分方程	181
一、可分离变量的微分方程	181
* 二、齐次方程	183
习题 6-2	184
第三节 一阶线性微分方程	185
习题 6-3	188
* 第四节 可降阶的高阶微分方程	189
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程	189
二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程	190
三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程	191
习题 6-4	192
第五节 二阶常系数齐次线性微分方程	192
一、二阶常系数线性微分方程的解的结构	192
二、二阶常系数齐次线性微分方程的通解	194
习题 6-5	196
第六节 二阶常系数非齐次线性微分方程	197
一、 $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型	197
二、 $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + P_n(x) \sin \omega x]$ 型	199
习题 6-6	200
第六章学习指导	201
一、基本要求	201
二、重点与难点分析	201

三、常见题型与解题指导·····	203
四、学法建议·····	205
第六章复习题·····	206
第七章 向量代数与空间解析几何·····	208
第一节 空间直角坐标系·····	208
一、坐标系的建立·····	208
二、空间两点间的距离·····	210
习题 7-1 ·····	210
第二节 向量代数·····	210
一、向量概念·····	210
二、向量的线性运算·····	211
三、向量的坐标表示及运算·····	213
四、向量的模与方向角、方向余弦·····	215
习题 7-2 ·····	217
第三节 数量积与向量积·····	217
一、两个向量的数量积·····	217
二、两个向量的向量积·····	219
习题 7-3 ·····	221
第四节 平面及其方程·····	221
一、平面的点法式方程·····	221
二、平面的一般式方程·····	222
三、平面的截距式方程·····	224
四、两平面的夹角·····	225
五、点到平面的距离·····	225
习题 7-4 ·····	226
第五节 空间直线及其方程·····	227
一、空间直线的点向式方程·····	227
二、空间直线的参数式方程·····	227
三、空间直线的一般方程·····	228
四、两直线的夹角·····	229
五、直线与平面的夹角·····	229
习题 7-5 ·····	230
第六节 二次曲面·····	231
一、旋转曲面·····	231
二、柱面·····	233
三、常见的二次曲面·····	234

习题 7-6	235
第七节 空间曲线	235
一、空间曲线的方程	235
二、空间曲线在坐标面上的投影	236
习题 7-7	236
第七章学习指导	237
一、基本要求	237
二、重点与难点分析	237
三、常见题型与解题指导	237
四、学法建议	245
第七章复习题	245
第八章 多元函数微分法及其应用	247
第一节 多元函数的基本概念	247
一、预备知识	247
二、多元函数的概念	248
三、二元函数的极限	250
四、二元函数的连续性	251
习题 8-1	252
第二节 偏导数	252
一、偏导数的定义及计算	253
二、高阶偏导数	256
习题 8-2	257
第三节 全微分	258
一、全微分的概念	258
二、可微的充分与必要条件	259
三、全微分在近似计算中的应用	260
习题 8-3	260
第四节 多元复合函数的求导法则	261
一、链式法则	261
二、几种特殊情形	262
三、抽象函数求偏导数	264
习题 8-4	264
第五节 隐函数的求导法则	265
习题 8-5	266
第六节 多元函数微分法的几何应用	267
一、空间曲线的切线与法平面	267

二、曲面的法线与切平面·····	268
习题 8-6 ·····	269
第七节 多元函数的极值及其求法·····	270
一、多元函数的极值及最大值、最小值·····	270
二、条件极值·····	273
习题 8-7 ·····	275
第八章学习指导·····	275
一、基本要求·····	275
二、重点与难点分析·····	275
三、常见题型与解题指导·····	277
四、学法建议·····	282
第八章复习题·····	282
第九章 重积分·····	285
第一节 二重积分的概念及性质·····	285
一、曲顶柱体的体积·····	285
二、二重积分的定义·····	286
三、二重积分的性质·····	287
习题 9-1 ·····	288
第二节 二重积分的计算法·····	288
一、利用直角坐标计算二重积分·····	288
二、利用极坐标计算二重积分·····	292
习题 9-2 ·····	295
第三节 二重积分的应用·····	296
一、二重积分在几何上的应用·····	296
二、平面薄片的质心·····	297
三、平面薄片的转动惯量·····	298
习题 9-3 ·····	299
* 第四节 三重积分·····	300
一、三重积分的概念·····	300
二、三重积分的计算法·····	300
三、三重积分的应用·····	303
* 习题 9-4 ·····	304
第九章学习指导·····	304
一、基本要求·····	304
二、重点与难点分析·····	305
三、常见题型与解题指导·····	306

四、学法建议·····	309
第九章复习题·····	310
第十章 无穷级数 ·····	312
第一节 常数项级数的概念和性质·····	312
一、常数项级数的概念·····	312
二、级数的性质·····	314
习题 10-1·····	316
第二节 常数项级数的审敛法·····	317
一、正项级数及其审敛法·····	317
二、交错级数及其审敛法·····	320
三、绝对收敛与条件收敛·····	320
习题 10-2·····	321
第三节 幂级数·····	323
一、函数项级数的概念·····	323
二、幂级数及其收敛性·····	323
三、幂级数的运算·····	325
习题 10-3·····	327
第四节 函数展开成幂级数·····	328
一、泰勒级数·····	328
二、函数展开成幂级数·····	329
习题 10-4·····	332
第十章学习指导·····	333
一、基本要求·····	333
二、重点与难点分析·····	334
三、常见题型与解题指导·····	335
四、学法建议·····	340
第十章复习题·····	340
* 第十一章 曲线积分 ·····	344
* 第一节 对弧长的曲线积分·····	344
一、对弧长的曲线积分的概念和性质·····	344
二、对弧长的曲线积分的计算法·····	346
* 习题 11-1·····	348
* 第二节 对坐标的曲线积分·····	348
一、对坐标的曲线积分的概念和性质·····	348
二、对坐标的曲线积分的计算法·····	350

* 习题 11-2	353
* 第三节 格林公式及其应用	353
一、格林公式	354
二、平面上曲线积分与路径无关的条件	355
* 习题 11-3	357
各章习题答案	358
附录 I 积分表	388
附录 II 几种常用的曲线	398

第一章 函数 极限与连续

高等数学课程的主要内容是微积分及其应用. 函数是微积分的主要研究对象, 极限是学习微积分的理论基础, 连续是函数的重要性质之一. 本章将在复习和加深函数有关知识的基础上, 介绍函数的极限和函数的连续性概念以及它们的一些性质.

第一节 函数

一、区间

1. 区间

设 a 和 b 都是实数, 且 $a < b$, 则称数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 为开区间, 记为 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

类似地, 有

$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间,

$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ 称为半开区间.

其中 a 和 b 称为上述区间的端点, $b - a$ 称为区间的长度. 以上这些区间称为有限区间.

$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$, $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$, $(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$ 称为无限区间.

以后在不需要辨明所讨论的区间是否包含端点, 以及是有限区间还是无限区间时, 我们简单地称它为“区间”, 且用 I 表示.

2. 邻域

以点 x_0 为中心的任何开区间称为点 x_0 的邻域, 记作 $U(x_0)$.

设 $\delta > 0$, 则称开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域, 记作 $U(x_0, \delta)$, 即

$$\begin{aligned} U(x_0, \delta) &= \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} \\ &= \{x \mid |x - x_0| < \delta\}. \end{aligned}$$

其中点 x_0 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径.

开区间 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的去心 δ 邻域, 记作 $\dot{U}(x_0, \delta)$, 即

$$\begin{aligned}\dot{U}(x_0, \delta) &= \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 \text{ 或 } x_0 < x < x_0 + \delta\} \\ &= \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}.\end{aligned}$$

开区间 $(x_0 - \delta, x_0)$ 称为点 x_0 的左 δ 邻域, 开区间 $(x_0, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的右 δ 邻域.

二、函数概念

1. 函数的定义

定义 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个非空数集. 如果按照某个对应法则 f , 使得对于每一个 $x \in D$, 都有唯一确定的 y 值与之对应, 则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的函数, 记作

$$y = f(x), x \in D$$

其中, x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域.

在函数定义中, 对于每一个 $x \in D$, 按照对应法则 f , 总有唯一确定的值 y 与之对应, 则这个 y 值称为函数 f 在 x 处的函数值, 记作 $f(x)$, 即 $y = f(x)$. 因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系通常称为函数关系. 因此, 习惯称因变量 y 是自变量 x 的函数. 当自变量 x 取遍定义域 D 中的值时, 相应的函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数的值域, 记作 $f(D)$ 或 W , 即

$$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

由函数定义可知, 定义域和对应法则是函数概念的两要素. 如果两个函数的定义域与对应法则都相同, 那么这两个函数就是同一个函数, 并且与自变量和因变量用什么字母表示无关.

函数的定义域通常按以下两种情形来确定: 一种是对有实际背景的函数, 根据实际背景中变量的实际意义确定. 例如, 边长为 x 的正方形面积 $A = x^2$ 的定义域为 $(0, +\infty)$; 另一种是用算式表达的函数, 通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合. 例如, 函数 $y = \ln(x+1)$ 的定义域是开区间 $(-1, +\infty)$. 函数的定义域通常用区间或不等式表示.

在函数的定义中, 对每个 $x \in D$, 只有唯一的 y 值与之对应, 这样定义的函数称为单值函数, 否则称为多值函数. 如函数 $y^2 = x$, 对于每个 $x \in (0, +\infty)$, 都有两个 y 值与之对应, 所以该函数为多值函数. 对于多值函数, 往往只要附加一些条件, 就可以将它化为单值函数进行讨论.

例 1 求函数 $y = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{\ln(x-1)}$ 的定义域.

解 要使函数有意义, x 必须同时满足: $4-x^2 \geq 0, x-1 > 0, x-1 \neq 1$. 解得函数的定义域为 $(1, 2)$.

例 2 设 $f(x-1) = x^2 + 1$, 求 $f(x)$ 及 $f(1)$.