十一五

21世纪高等职业教育创新型精品规划教材
高等职业教育“十一五”精品规划教材

新编 高等数学教程

XINBIAN GAODENG SHUXUE JIAOCHENG

主编 张淑贤 彭瑜

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

21 世纪高等职业教育创新型精品规划教材
高等职业教育“十一五”精品规划教材

新编高等数学教程

主　编　张淑贤　彭　瑜
副主编　张　军　朱世强
主　审　谷源敏　牛铁林

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书遵照“必需与够用”的原则，意在培养学生的数学思想与应用意识. 本书注重数学的基本概念与基本解题方法，适当地增加了解决实际问题的例子，以培养学生用数学原理和方法解决问题的能力.

全书内容包括了一元函数微积分、常微分方程、空间解析几何简介、多元函数微积分、无穷级数、线性代数. 本书可作为高职高专高等数学的教学用书.

图书在版编目(CIP)数据

新编高等数学教程/张淑贤，彭瑜主编. —天津：天津大学出版社，2010. 8

21 世纪高等职业教育创新型精品规划教材　高等职业教育“十一五”精品规划教材

ISBN 978-7-5618-3629-3

Ⅰ. ①新…　Ⅱ. ①张…　②彭　Ⅲ. ①高等数学－高等学校：技术学校－教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 164250 号

出版发行　天津大学出版社
出 版 人　杨欢
地　　址　天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电　　话　发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
网　　址　www. tjup. com
印　　刷　肃宁县科发印刷厂
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　185mm×260mm
印　　张　21. 25
字　　数　530 千
版　　次　2010 年 8 月第 1 版
印　　次　2010 年 8 月第 1 次
定　　价　39. 80 元

前　言

高等数学作为一门公共基础课，遵照“必需与够用”的原则，树立“为专业课服务”的思想，以培养学生的数学思想与应用意识；强化数学计算方法的掌握，提高基本运算技能；充分满足各专业课程对数学知识的需要，体现工具性课程的特色，重点突出．同时也要为学生继续深造、终生学习奠定良好的基础．学好高等数学，对高职学生综合素质的提高是极为重要的．

高职教育的培养目标要求以“培养能力”为核心，以“加大实训课教学力度”为主要内容．面对新形势，高职数学教学不应该再追求数学体系的完美，而应与时俱进，实行卓有成效的改革．为此，我们结合职业教育特点，以积极的态度，适应当前和未来职业教育的发展趋势，从实用的角度出发编写了《新编高等数学教程》．

本教程取材合理，深度适宜，符合学生的认识规律；内容深入浅出，富有启发性，适用于高职学生的学习．本教程主要有以下几个特色．

(1)恰当处理教材内容的广度和深度，不刻意追求理论上的严密性，尽可能显示数学从理论到方法的直观性和应用性，将高等数学抽象、复杂的理论和思维方法直观化、简明化，便于学生阅读、理解和接受．

(2)采用“存储器”式的编写，对大量的知识点、结论、计算方法等，给予直接的介绍，其目的是为专业学习储备相关的知识与计算方法，并不需要太多理论的支撑．

(3)采用“对比法”编写了一元函数微积分．教育家乌申斯基认为“比较是一切理解和思维的基础”，对比法适用于高职层次的学生学习，有利于学生较快、较熟练地掌握复杂的积分运算，并将两个不同的概念加以区别和建立联系．

(4)采用“倒叙法”编写有关章节．即在概念引入时，凸显数学计算的功能，以计算方法作为定义，直奔主题，最后再谈为什么．这样既突出重点，又强化了计算方法的学习．如定积分、二重积分，在引入方法上就采取了这种形式．

(5)每章后均编有“阅读与提高”．根据每章的重点和特色，展示该章的内容或是理论、或是应用、或是运算技能等，这是在基本要求的基础上适当增加的内容，有一定的难度，但对学有余力的学生，“阅读与提高”给其逻辑思维能力、数学计算水平、数学应用能力的提高创造了一个空间．

(6)与本教程相配套的有《新编高等数学实训教程》，用以加大数学实训课的教学力度．

本教程共分为13章．内容包括：一元函数微积分、常微分方程、空间解析几何简介、多元函数微积分、无穷级数、线性代数．

本教程主编张淑贤、彭瑜，副主编张军、朱世强，参编程树林、苏莹，主审谷源敏、牛铁林，终审定稿由张淑贤、彭瑜完成.

具体编写分工如下：张淑贤编写第1章、第4章、第6章，彭瑜编写第2章、第7章、第8章，张军编写第3章、第5章，朱世强编写第13章，程树林编写第9章、第11章，苏莹编写第10章、第12章.教程中的插图由程树林绘制.

由于编者的水平有限，教程中难免有不妥之处，衷心希望得到各位专家和读者的批评指正.

编者

2010年6月

目　　录

第 1 章　极限与连续

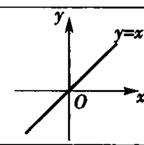
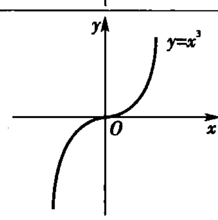
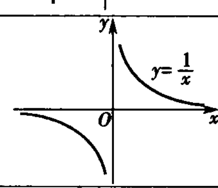
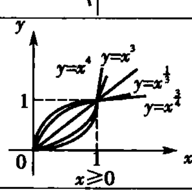
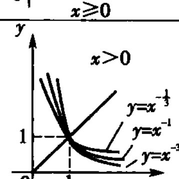
高等数学与初等数学的主要区别在于它们研究对象的不同，初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学研究的对象是空间形式及数量关系，即函数关系，其研究方法是极限论的方法，因此本章先在中学数学知识的基础上对函数概念进一步扩展，然后介绍极限的思想，最后用极限概念讨论函数的一个重要性态——函数的连续性.

1.1　复习有关知识

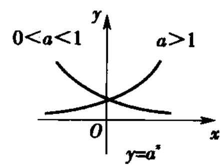
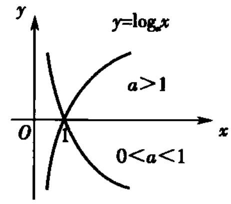
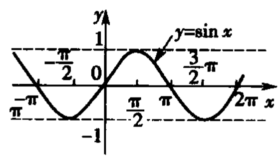
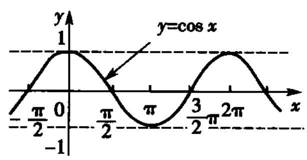
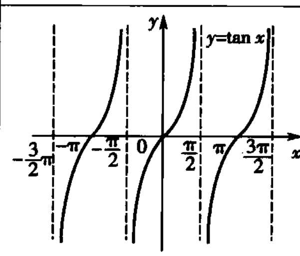
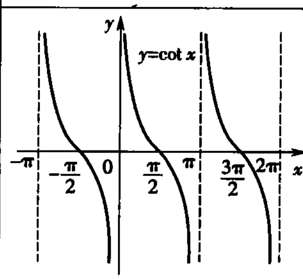
1.1.1　基本初等函数

定义 1.1　常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数. 它们的定义域、值域、图像及函数的性质如表 1.1 所示.

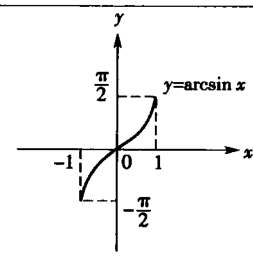
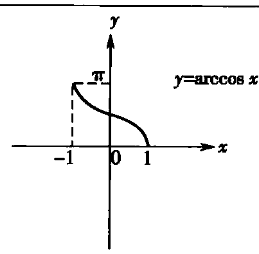
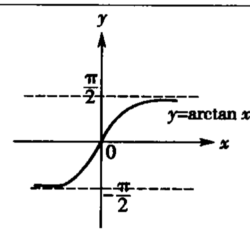
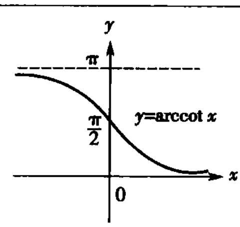
表 1.1

基本初等函数		定义域和值域	图像	性质
幂函数	$y=x$ $(\alpha=1)$	$x\in\mathbf{R}$ $y\in\mathbf{R}$		单调增函数 奇函数 无界
	$y=x^3$ $(\alpha=3)$	$x\in\mathbf{R}$ $y\in\mathbf{R}$		单调增函数 奇函数 无界
	$y=x^{-1}$ $(\alpha=-1)$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		在$(-\infty,0)$与$(0,+\infty)$内都是单调减函数 奇函数，无界
	$y=x^{\alpha}$ $(\alpha>0)$	随 x 的取值不同而不同		在$[0,+\infty)$内是单调增函数，图像过点$(0,0)$及$(1,1)$
	$y=x^{\alpha}$ $(\alpha<0)$	随 x 的取值不同而不同		在$(0,+\infty)$内是单调减函数，图像过点$(1,1)$

续表

基本初等函数		定义域和值域	图像	性质
指数函数	$y=a^x$ $(a>0,a\neq 1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		过点$(0,1)$ 当$a>1$时,是单调增函数 当$0<a<1$时,是单调减函数 $y=a^x$与$y=a^{-x}$的图像关于y轴对称
对数函数	$y=\log_a x$ $a>0,a\neq 1$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		过点$(1,0)$ 当$a>1$时,是单调增函数 当$0<a<1$时,是单调减函数 $y=\log_a x$与$y=\log_{\frac{1}{a}} x$的图像关于x轴对称
三角函数	正弦函数 $y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		在$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$上单调递增 在$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$上单调递减,奇函数,周期为$2\pi$,有界
	余弦函数 $y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		在$[2k\pi,2k\pi+\pi](k\in\mathbf{Z})$上单调递减 在$[2k\pi-\pi,2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上单调递增,偶函数,周期为$2\pi$,有界
	正切函数 $y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		在$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$上单调递增,奇函数,周期为$\pi$,无界
	余切函数 $y=\cot x$	$x\neq k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		在$(k\pi,k\pi+\pi)(k\in\mathbf{Z})$上单调递减 奇函数,周期为$\pi$,无界

续表

基本初等函数		定义域和值域	图像	性质
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		单调递增,奇函数,有界
	反余弦函数 $y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调递减,有界
	反正切函数 $y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		单调递增,奇函数,有界
	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调递减,有界

1.1.2　分段函数

本课程讨论的函数大多是由解析法给出的,解析法给出的函数,不一定总是用一个式子表示,也可以用几个式子表示一个函数,习惯上,称用多个式子表示的这种函数为分段函数.

定义 1.2　在定义域不同的取值范围内,具有不同解析表示式的一个函数称为分段函数.

例如

$$y=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ 1+x, & x>0,\end{cases}$$

其图像如图 1.1 所示.

再如,符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

其定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$\{-1,0,1\}$,图像如图1.2所示.

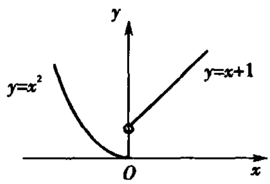


图1.1

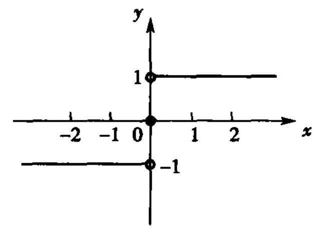


图1.2

有些分段函数也用一些特殊的符号表示,例如,取整函数$y=[x]$,其中$[x]$表示不大于x的最大整数,如$[3.14]=3$,$[-0.2]=-1$.取整函数$y=[x]$的图像如图1.3所示.

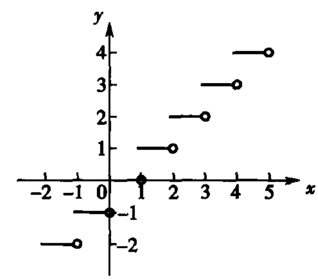


图1.3

注意:

(1)分段函数表示的是一个函数,不是几个函数;

(2)分段函数的定义域是几段区域的并集;

(3)分段函数求值注意x所属区域的对应法则.

1.1.3 复合函数

在研究函数时,两个变量的联系有时不是直接的,而是通过另一个变量间接联系起来的.

例如:自由落体运动的动能E是速度v的函数,$E=f(v)=\frac{1}{2}mv^2$(m为物体的质量),而速度v又是时间t的函数,$v=\phi(t)=gt$,通过中间变量v,E又成了t的函数,即由$E=f(v)$通过中间变量$v=\varphi(t)$复合而成的关于t的函数

$$E=f[\phi(t)]=\frac{1}{2}m(gt)^2=\frac{1}{2}mg^2t^2$$

称为复合函数.

定义1.3 设函数$y=f(u)$的定义域为A,函数$u=\varphi(x)$的定义域为C,值域为B,且$B\cap A\neq\varnothing$,则称$y=f[\varphi(x)]$为定义在C上的函数$u=\varphi(x)$经$y=f(u)$复合而成的复合函数.其中x是函数的自变量,u为中间变量.

例如,$y=\sqrt{u}$,$u=\lg v$,$v=1+x^4$,则$y=\sqrt{\lg(1+x^4)}$是x的复合函数,中间变量为u和v,这就是说复合函数也可以由两个以上函数复合而成.

一般情况下,设$y=f(u)$,$u=\varphi(v)$,$v=\Psi(x)$,则复合函数为$y=f\{\varphi[\Psi(x)]\}$,这里中间变量是u,v.

注意:

(1)不是任何两个函数都可复合成一个函数的;

(2)复合函数可以多层,中间变量可以是两个以上;

(3)复合函数的分解原则"由外向里,逐层分解";

(4)复合函数的分解要到位,最后分出的函数都是基本初等函数或简单函数.

例如,$y=\arcsin u$,$u=2+x^2$就不能复合成一个复合函数.

因为 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$u\geqslant 2$ 全部落在 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 之外，使 $y=\arcsin(2+x^2)$ 没有意义.

例1 设 $y=f(u)=\sin u, u=\varphi(x)=x^2+1$，求 $y=f[\varphi(x)]$.

解 $y=\sin(x^2+1)$.

例2 设 $y=f(u)=\sqrt{u}, u=\varphi(t)=e^t, t=p(x)=x^3$，求 $y=f[\varphi(p(x))]$.

解 $y=\sqrt{e^{x^3}}$.

例3 设 $y=f(u)=\arctan u, u=\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$，求 $y=f[\varphi(x)]$.

解 $y=\arctan\dfrac{1}{x}$.

由此可知

$$\boxed{\begin{matrix}y=f(u)\\u=\varphi(x)\end{matrix}\xrightarrow{\text{合成}}y=f[\varphi(x)]},$$

反之

$$\boxed{\begin{matrix}y=f(u)\\u=\varphi(x)\end{matrix}\xleftarrow{\text{分解}}y=f[\varphi(x)]}.$$

例4 分析下列复合函数的结构，并作分解：

(1) $y=(1-x)^5$； (2) $y=\sin^3 x$；

(3) $y=\tan\dfrac{1}{x}$； (4) $y=e^{\sqrt{x}}$；

(5) $y=\ln\arcsin(x^2)$.

解 (1) $y=(1-x)^5$ 是由函数 $y=u^5, u=1-x$ 复合而成；

(2) $y=\sin^3 x$ 是由函数 $y=u^3, u=\sin x$ 复合而成；

(3) $y=\tan\dfrac{1}{x}$ 是由函数 $y=\tan u, u=\dfrac{1}{x}$ 复合而成；

(4) $y=e^{\sqrt{x}}$ 是由函数 $y=e^u, u=\sqrt{x}$ 复合而成；

(5) $y=\ln\arcsin(x^2)$ 是由函数 $y=\ln u, u=\arcsin v, v=x^2$ 复合而成.

课堂练习

分析下列复合函数的结构，并作分解：

(1) $y=(1+x)^{12}$ ____________________；

(2) $y=\cos^4 x$ ____________________；

(3) $y=e^{\sin x}$ ____________________；

(4) $y=\sqrt{3x-1}$ ____________________.

1.1.4 初等函数

定义1.4 由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合而成，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

例如：$y=x^2+\sin 3x, y=3xe^{\sqrt{x}}, y=\arcsin e^{\frac{x}{2}}, y=\ln\sin x$ 等都是初等函数. 而分段函数

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & x>0, \\ \sqrt{1-x^2}, & -1\leqslant x\leqslant 0 \end{cases}$$

不是初等函数,因为它在定义域$[-1,+\infty)$内不能用一个式子表示. 函数$y=x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$也不是初等函数,因为它不是基本初等函数经过有限次的四则运算构成的函数.

注意:分段函数一般不是初等函数.

1.2 极限

极限思想是人类思维的伟大结晶之一. 微积分的许多概念都是用极限来表述的,一些重要的性质、法则和定理也是通过极限方法推导的,极限的思想与方法贯穿于微积分学的始终. 当同学们学完高等数学之后,就会深切体会到极限概念是微积分的灵魂.

极限概念是由求某些实际问题的精确值而产生的,请同学们看两个体现极限思想的实例.

实例1:我国古代伟大的数学家刘徽(公元3世纪)利用圆内接正多边形面积来推算圆面积的方法——割圆术,其中就蕴涵着深刻的极限思想,如图1.4所示.

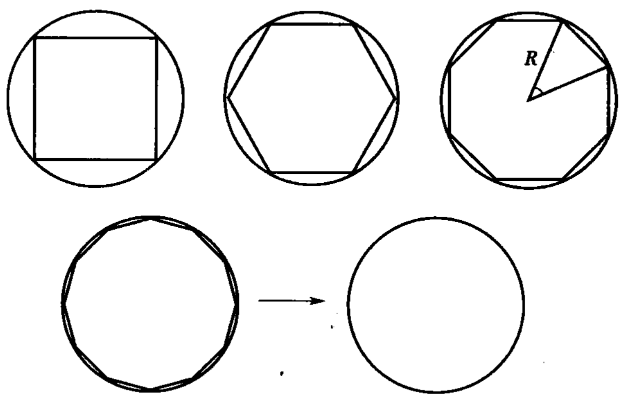


图1.4

若用S表示圆面积,S_n表示圆内接正n边形的面积,显然,正多边形的边数n越多,正n边形的面积S_n就越接近于圆的面积S,当边数n无限增加时,正n边形的面积S_n就无限接近于圆的面积S.

分析:$S_n=n\cdot\frac{1}{2}R^2\cdot\sin\frac{2\pi}{n}=\pi R^2\cdot\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}$,当$n\to\infty$时,$S_n\to S$.

上述分析中,S_n是n的函数,我们关注的焦点是当自变量$n\to\infty$这个"目标"时,函数S_n无限地接近于S.

实例2:晚上,当你走在大街上,会发现你的影子时长时短,当你从任何方向走近路灯时,你的影子都会随着你与路灯距离的接近而越来越近,此现象反映到数学上就是极限问题.

在客观世界中,有大量问题需要我们讨论. 当自变量无限接近某个"目标"时,函数无限接近于什么结果? 是否接近于一个确定的常数? 这就是极限的思想和方法.

极限有两种描述方法,其一用"$\varepsilon-N$"及"$\varepsilon-\delta$"语言精确描述,另一种为一般描述法,本

节采用一般描述法，即从几何上，以直观和形象的语言描述极限概念.

1.2.1　数列的极限

观察当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{x_n\}$ 的一般项 x_n 的变化趋势.

第一组：$\left\{1+\dfrac{1}{n}\right\}$，$\left\{1-\dfrac{1}{n}\right\}$，$\left\{1+(-1)^n\dfrac{1}{n}\right\}$，如图 1.5、1.6、1.7 所示.

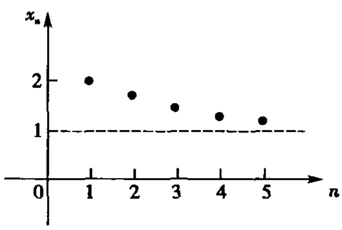


图 1.5

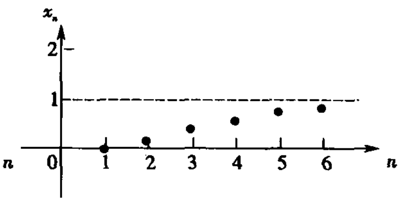


图 1.6

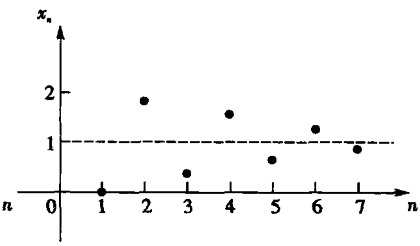


图 1.7

从图可看出，当 $n\to\infty$ 时，各个数列尽管趋近于 1 的方式不同，但其变化趋势的最终结果均无限地趋近于 1.

第二组：$\{2n\}$，$\{(-1)^n\}$，$\{2^n\}$，如图 1.8、1.9、1.10 所示.

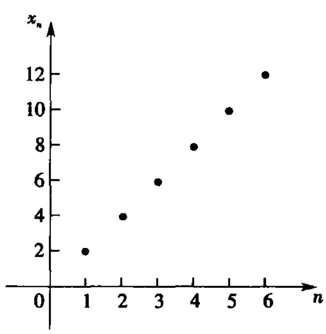


图 1.8

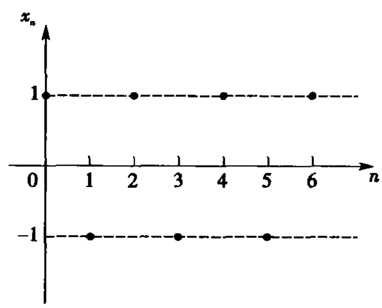


图 1.9

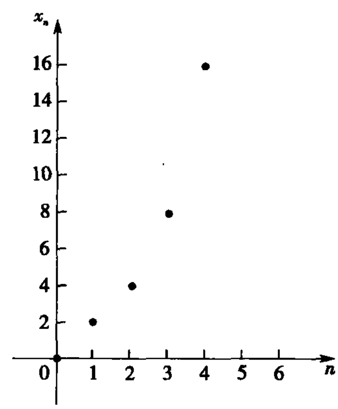


图 1.10

从图可看出，当 $n\to\infty$ 时，各个数列都不再无限地趋近于一个确定的常数值.

由以上两组数列变化趋势的对比可知 x_n 的变化趋势有两种情形：

(1) 无限接近于某一个常数；

(2) 不接近于任何确定的常数.

由此可得数列极限的描述性定义.

定义 1.5　如果数列 $\{x_n\}$ 的项数 n 无限增大，一般项 x_n 无限接近于某个常数 A，则称 A 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$ 或 $x_n\to A(n\to\infty)$. 此时也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，并称之为收敛数列. 否则称为发散数列.

有了极限的定义及表示符号，上述第一组数列的极限可表示为

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\left[1+(-1)^n\frac{1}{n}\right]=1.$$

而第二组数列均无极限,所以都是发散数列.

当 n 无限增大时,如果 $|x_n|$ 无限增大,则数列没有极限,习惯上也称数列 $\{x_n\}$ 的极限是无穷大,记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$.

注意:

(1)数列 $\{x_n\}$ 若有极限,则其极限唯一;

(2)数列 $\{x_n\}$ 若有极限,则数列必有界,反之不成立;

(3)数列 $\{x_n\}$ 若单调有界,则 $\{x_n\}$ 必有极限.

例如,数列 $\{x_n\}$,$x_n=(-1)^n$,有界,但无极限.

例1 作图观察数列 $1,\frac{5}{2},\frac{5}{3},\frac{9}{4},\frac{9}{5},\cdots\frac{2n+(-1)^n}{n},\cdots$ 的极限.

解 如图1.11所示.

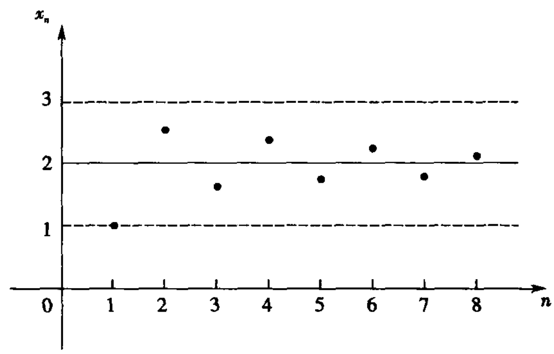


图1.11

从图中可以看到:当 n 无限增大时,动点 (n,x_n) 在直线 $x_n=2$ 上、下跳动,且逐渐与直线 $x_n=2$ 接近,即当 n 无限增大时,x_n 无限接近于2,所以

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+(-1)^n}{n}=2.$$

例2 观察下列数列的极限:

(1) $x_n=\dfrac{n}{1+n}$; (2) $x_n=3^n$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{1+n}=1$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} 3^n=\infty$.

课堂练习

观察后写出下列数列的极限:

(1) $x_n=(-1)^n\cdot 2$ ____________________;

(2) $x_n=4-\dfrac{1}{n}$ ____________________.

1.2.2 函数的极限

对于给定的函数 $y=f(x)$,因变量 y 随着自变量 x 的变化而变化,当自变量 x 无限接近于某个“目标”时,研究 y 的变化趋势,即函数的极限问题.对于自变量 x 的变化“目标”,有如下

几种情况:

当 x 从 x_0 的左右两侧无限趋于 x_0 时,记为 $x \to x_0$;

当 x 仅从 x_0 的左侧无限趋于 x_0 时,记为 $x \to x_0^-$;

当 x 仅从 x_0 的右侧无限趋于 x_0 时,记为 $x \to x_0^+$;

当 x 沿 x 轴正向远离原点时,记为 $x \to +\infty$;

当 x 沿 x 轴负向远离原点时,记为 $x \to -\infty$;

当 $|x|$ 无限增大时,记为 $x \to \infty$.

根据自变量 x 无限接近于"目标"的不同,分别介绍函数的变化趋势.

1. $x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

考察当 $x \to \infty$ 时,函数 $y = \frac{1}{x}$ 的变化趋势.

如图 1.12,当 $x \to \infty$ 时(包括 $x \to +\infty$, $x \to -\infty$),函数趋向一个确定的常数 0,如图 1.12 所示.

定义 1.6 设函数 $f(x)$,当 $|x|$ 大于某一正数时有意义,如果 $|x|$ 无限增大时,函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A,则称 A 为 $x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限,记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(x \to \infty).$$

图 1.12 所示函数极限为

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

2. $x \to +\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

考察 $x \to +\infty$ 时,函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的变化趋势,如图 1.13 所示.

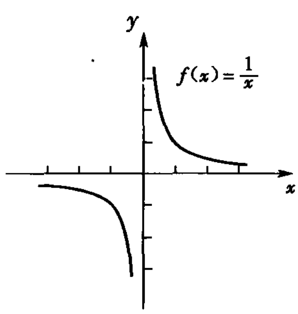


图 1.12

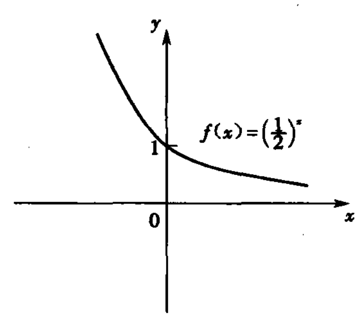


图 1.13

定义 1.7 设函数 $f(x)$,当 x 大于某一正数时有意义,如果 x 无限增大时,函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A,则称 A 为 $x \to +\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限,记为

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(x \to +\infty).$$

图 1.13 所示函数极限为

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.$$