普通高等教育"十一五"规划教材
21世纪研究生数学主干教材

丛书主编 陈 化

曾祥金 张 亮 主编

矩阵分析简明教程

JU ZHEN FENXI JIAN MING JIAO CHENG

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”规划教材

21世纪研究生数学主干教材

丛书主编 **陈 化**

矩阵分析简明教程

曾祥金 张 亮 主编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是工科硕士研究生和工程硕士生的教材.全书共分7章,系统地介绍了线性空间和线性变换、内积空间的理论和应用、矩阵的Jordan标准形与若干分解形式、范数理论及其应用、矩阵函数及其应用、特征值的估计与广义逆.各章末配有习题,书末附有答案或提示.本书结合工科的特点,注意理论与应用的结合,引入大量国内外矩阵理论的研究成果,以达到由浅入深,学以致用的目的.

本书也可以供工科高年级本科生、相关教师及工程技术人员阅读或参考.

图书在版编目(CIP)数据

矩阵分析简明教程/曾祥金,张亮主编.—北京：科学出版社,2010.8
普通高等教育"十一五"规划教材.21世纪研究生数学主干教材
ISBN 978-7-03-028394-8

Ⅰ.①矩… Ⅱ.①曾…②张… Ⅲ.①矩阵分析-研究生-教材 Ⅳ.①O151.21

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第142474号

责任编辑：吉正霞 / 责任校对：董艳辉
责任印制：彭　超 / 封面设计：苏　波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2010年8月第 一 版　开本：B5(720×1000)
2010年8月第一次印刷　印张：14 1/2
印数：1—3 000　字数：279 000

定价：25.50元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《21世纪研究生数学主干教材》丛书编委会

《21 世纪研究生数学主干教材》
丛书序

《21 世纪研究生数学主干教材》为高等学校研究生数学主干课程系列教材，大致划分为公共数学类、专业数学类两大块，经组编委员会审定，列选科学出版社普通高等教育“十一五”规划教材.

一、组编机构

《21 世纪研究生数学主干教材》丛书由多所 985 和 211 大学联合组编：

丛 书 主 编　陈　化

常务副主编　刘禄勤

副　主　编　吴传生　何　穗　刘安平

丛 书 编 委(按姓氏笔画为序)

王卫华　王展青　严国政　杨瑞琰　李　星
肖海军　罗文强　赵东方　黄樟灿　梅全雄
彭　放　彭斯俊　曾祥金　谢民育

二、编写原则

质量. 质量是图书的生命，保持和发扬科学出版社“三高”、“三严”的传统特色，创造名牌大学和科学出版社双重品牌；适用性是教材的生命力所在，应明确读者对象，篇幅恰当.

系统. 研究生教材的系统性高于本科生教材，知识系统，体系完整，逻辑清晰，给学生留下选学和自学的内容和空间.

创新. 反映学科发展前沿、先进理念；在知识、内容等方面有所创新，有所贡献，体现教材的知识创新；紧跟和引领教学实践，在教学方法、教材结构、知识组织、详略把握、内容安排上有独到之处，体现教学实践创新.

三、指导思想

(1) 力求体系完整，结构严谨，内容精炼，循序渐进，推理简明，深入浅出，富有启发性，让学生打下坚实的理论基础.

(2) 恰当融入现代数学的新思想、新观点、新结果和新方法，使学生有较新的

学术视野.

(3) 为使学生巩固知识和提高应用能力,章末列出习题和思考题,并列出可进一步深入阅读的文献. 书末要给出索引.

(4) 在内容的取舍、叙述的方式、材料的组织安排等方面具有自己的特色.

(5) 公共数学教材注重强化学生的实验训练和实际动手能力,着力培养学生运用现代数学工具(软件)的能力;加强教学内容的应用性,注重案例分析,提高学生对数学知识、数学方法的应用能力及解决问题的能力.

四、主编职责

丛书组编委员会和出版社确定全套丛书的编写原则、指导思想和编写规范,在这一框架下,每本教材的主编对本书具有明确的责权利:

1. 拟定指导思想

按照丛书的编写原则和指导思想,拟出编写本书的指导思想和编写说明.

2. 明确特色和编写原则

教材的特色和闪光点;教改、课改动态,学科发展前沿、先进理念如何引入教材;知识和内容创新点及其编写方法;创新与继承的关系把握;教材系统性与教学实践性的关系处理和具体操作;严把教材质量关和适用性.

3. 掌握教材编写环节

(1) 把握教材编写人员水平,原则上要求博士、副教授以上,有多年课程教学经历,熟悉课程和学科领域的发展状况,有教材编写经验,有扎实的文字功底.

(2) 充分注意著作权问题,不侵犯他人著作权.

(3) 讨论、拟定教材提纲,并负责编写组的编写分工、协调与组织.

(4) 拟就内容简介、前言、目录、样章,统稿、定稿,确定交稿时间.

(5) 负责出版事宜,敦促编写组成员使用本教材,并优先选用本系列教材.

《21世纪研究生数学主干教材》组编委员会

2009年10月

前　言

矩阵理论自 19 世纪由凯莱(A. Cayley, 1821—1895)和西尔维斯特(J. J. Sylvester, 1841—1897)创立以来,已经成为一门现代大学的基本数学课程.矩阵理论的出现,对于现代科学技术的发展有着重要的贡献.历史已经证明,矩阵理论是表达量子力学观点的最恰当的语言.科学技术发展到现在,矩阵理论在各个学科领域,如控制理论、优化理论、力学、经济管理、金融等,都有着非常重要的应用.矩阵的方法已经成为现代科技领域不可或缺的研究工具.由于这一原因,我国工科院校已经把"矩阵分析"作为各专业硕士研究生的学位课.本书就是作者在多年为工科硕士研究生讲授该课程的基础上,参考国内外相关教材,结合工科课程的特点,经过多番锤炼编写而成的.

本书内容共分为 7 章,包括:线性空间与线性变换,内积空间,矩阵的标准形,矩阵分解,范数理论及其应用,矩阵分析及其应用,矩阵特征值的界和非负矩阵.本书前三章内容是线性代数课程的衔接与延伸,这是该课程略为抽象的部分;本书其余各章吸收了近年来国内外最新的具有重大影响的研究成果,譬如 Householder 分解、Moore-Penrose 广义逆、Geršgorin 定理、Courant-Fischer 定理等.

本书编写力求做到循序渐进,通俗易懂,简洁适用.在理论的论述上本书力求简洁,不苛求对于每一个定理予以证明,但求读者对于理论的精髓能快速的理解.基本方法的介绍力求兼顾应用背景和具体应用,并多用例题加以说明,便于读者迅速掌握.为此,本书根据目前工科硕士研究生的实际需要精心挑选与设计课程内容,每章都配备了一定数量的习题,便于读者进一步加深对课程内容的理解.

本书由曾祥金、张亮主编,吴华安、柳贵平任副主编.在编写的过程中,吴传生教授提出了宝贵的意见,在此表示衷心的感谢.

限于作者水平,书中难免有疏漏之处,敬请读者批评指正.

编　者
2010 年 5 月

目　录

第1章 线性空间与线性变换

线性空间的概念源自我们所熟悉的向量及其相关运算性质. 将类似的具有共同运算规律的数学对象进行一般的数学描述就得到抽象的线性空间的定义. 因此,线性空间的理论在自然科学、工程技术,特别是数学的其他领域都有着广泛的应用.

1.1 线性空间的基本概念

在线性代数中,为研究齐次线性方程组的解的结构,我们学习了实向量空间的基本理论. 在工程技术和科学计算以及数学领域的不同场合,有许多集合本身所伴随的运算具有与实向量空间中的运算相同的本质特征,因而我们有必要将实向量空间的理论进行推广.

我们首先约定,以后所称的数域 F,是指实数域或复数域. 在抽象代数中,数域是指至少包含 0 和 1 的数集,在该集中进行的数的和、差、积和商(除数不为 0)的运算是封闭的.

定义 1.1.1 设 V 是一个非空集合,其中的元素称为向量,F 是数域,其中的数称为纯量. 在 V 中有向量的加法,使得对任意的向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, 有和向量 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in V$. 对每个纯量 $x \in F$ 及向量 $\boldsymbol{\alpha} \in V$,有纯量积 $x\boldsymbol{\alpha} \in V$.

如果关于向量加法有运算律:

(i) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(ii) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

(iii) 存在零向量 $\mathbf{0} \in V$,使得对每个 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$;

(iv) 对每个 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 存在负向量 $-\boldsymbol{\alpha}$,使得 $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$.

关于纯量积有运算律: $x, y \in F$, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$.

(v) $x(y\boldsymbol{\alpha})=(xy)\boldsymbol{\alpha}$;

(vi) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(vii) $x(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=x\boldsymbol{\alpha}+x\boldsymbol{\beta}$;

(viii) $(x+y)\boldsymbol{\alpha}=x\boldsymbol{\alpha}+y\boldsymbol{\alpha}$,

则称 V 是 F 上的一个线性空间(或向量空间).

例 1.1.1 在线性代数中,定义的实向量空间 $\mathbf{R}^n$ 关于通常的实向量的加法运算和实数乘向量的数乘运算构成 $\mathbf{R}$ 上的一个线性空间.

例 1.1.2 设 $\mathbf{R}[x]_n$ 表示次数小于 n 的多项式的全体(且包含零多项式)对于多项式的加法和数与多项式的乘法构成 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

例 1.1.3 设全体 $m\times n$ 复矩阵所成之集为 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 按照矩阵的加法和数乘矩阵的运算构成 $\mathbf{C}$ 上的线性空间.

例 1.1.4 二阶齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的解全体按通常函数的加法与数乘构成线性空间.

例 1.1.5 在正实数集 $\mathbf{R}^+$ 中定义加法 $\oplus$ 和数乘 $\circ$ 如下:

$$a\oplus b=ab$$
$$k\circ a=a^k$$
$$\forall a,\ b\in\mathbf{R}^+,\ k\in\mathbf{R}$$

则 $\mathbf{R}^+$ 是数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

线性空间的例子还可以举很多,不过需要指出的是,当一个给定的非空集合在规定的运算下构成线性空间时,可能在另外规定的运算下不能成为线性空间. 例如在 $\mathbf{R}^2$ 中定义

$$(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1-1,\ a_2+b_2)$$
$$\lambda(a_1,\ a_2)=(\lambda a_1,\ \lambda a_2)$$

则当 $\lambda\neq 1$ 时,

$$\begin{aligned}\lambda[(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)]&=\lambda(a_1+b_1-1,\ a_2+b_2)\\&=(\lambda a_1+\lambda b_1-\lambda,\ \lambda a_2+\lambda b_2)\end{aligned}$$
$$\lambda(a_1,\ a_2)+\lambda(b_1,\ b_2)=(\lambda a_1+\lambda b_1-1,\ \lambda a_2+\lambda b_2)$$

以上两式不相等,说明线性空间定义中的运算公理(vii)不满足. 所以 $\mathbf{R}^2$ 关于以上的运算不是线性空间.

由线性空间的定义可以证明: 线性空间 V 中的零向量是唯一的,V 中每个元素的负向量也是唯一的. 并且有以下一些基本性质:

性质 1.1.1 $0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$, $x\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

性质 1.1.2 当 $x\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时,则 $x=0$ 或 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

性质 1.1.3 $x(-\boldsymbol{\alpha})=-x\boldsymbol{\alpha}=(-x)\boldsymbol{\alpha}$.

性质 1.1.4 $(x-y)\boldsymbol{\alpha}=x\boldsymbol{\alpha}-y\boldsymbol{\alpha}$.

性质 1.1.5 $x(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=x\boldsymbol{\alpha}-x\boldsymbol{\beta}$.

证　我们只证明性质 1.1.3 和性质 1.1.4,其余的留作习题.

根据性质 1.1.1,我们有

$$x\boldsymbol{\alpha}+x(-\boldsymbol{\alpha})=x[\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})]=x\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

这说明 $x(-\boldsymbol{\alpha})$ 是 $x\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量,故 $x(-\boldsymbol{\alpha})=-x\boldsymbol{\alpha}$. 同理可证 $(-x)\boldsymbol{\alpha}=-x\boldsymbol{\alpha}$. 这就证明了性质 1.1.3.

为证性质 1.1.4,首先可以定义向量的减法. 对给定的两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$,若存在向量 $\boldsymbol{\gamma}$,使得 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$, 则称向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的差,记为 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$. 由于 $\boldsymbol{\beta}+[\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})]=\boldsymbol{\alpha}+[\boldsymbol{\beta}+(-\boldsymbol{\beta})]=\boldsymbol{\alpha}$, 所以有

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})$$

由性质 1.1.3,在 $(-y)\boldsymbol{\alpha}=-y\boldsymbol{\alpha}$ 两边同加 $x\boldsymbol{\alpha}$,得

$$x\boldsymbol{\alpha}-y\boldsymbol{\alpha}=x\boldsymbol{\alpha}+(-y\boldsymbol{\alpha})=x\boldsymbol{\alpha}+(-y)\boldsymbol{\alpha}=(x-y)\boldsymbol{\alpha}$$

所以性质 1.1.4 成立. □

在线性代数中,我们有关于向量的线性组合、线性相关与线性无关的定义与相关结论,这些定义都可以推广到一般线性空间,而对应的结论也可以证明在线性空间都是成立的.

定义 1.1.2　设 V 是数域 F 的线性空间,如果 V 中存在一个有限元素集$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$满足:

(i) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关;

(ii) V 中任一向量都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示,

则$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$称为 V 的一组基,并称 V 为 n 维线性空间,记为 $n=\dim V$.

当$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$是 V 的基时,对任一 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 必有 $x_1, x_2, \cdots, x_n\in F$, 使得

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

此时,我们称 n 元有序数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$下的坐标.

以下定理表明,向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在给定基下的坐标是唯一确定的.

定理 1.1.1　设$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$是线性空间 V 的基,则 V 的任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以由基元素唯一表示.

证　若

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=y_1\boldsymbol{\alpha}_1+y_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+y_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

则

$$(x_1-y_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_2-y_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(x_n-y_n)\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性无关性可知 $x_i=y_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$ □

线性空间的零子空间的维数规定为 0. 如果一个线性空间中有任意多个线性无关的元素，则称该线性空间为无限维线性空间. 本书只讨论有限维线性空间.

例如，$\mathbf{R}^n$ 是 n 维线性空间，

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

就是 $\mathbf{R}^n$ 的一组基.

在线性空间 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 中，取 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 为第 i 行，第 j 列元素为 1，其余元素为 0 的 $m\times n$ 矩阵，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，则 $\{\boldsymbol{E}_{ij}\}$ 就是 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 的一组基.

容易证明，n 维线性空间 V 中的任意 n 个线性无关的向量所成之集必为 V 的一组基. 任意两组基是等价的向量组.

以下定理告诉我们，如何找到有限维线性空间的基.

定理 1.1.2 （基的扩张定理）设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_r(1\leqslant r\leqslant n)$ 是 n 维线性空间 V 中的 r 个线性无关的向量，则必有 V 中的 $n-r$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\ \boldsymbol{\alpha}_{r+2},\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n$ 存在，使得 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 成为 V 的基.

证 若 $r=n$，则 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 已是 V 的基. 下设 $r<n$，令

$$\begin{aligned}W&=\mathrm{Span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_r\}\\&=\{\boldsymbol{\alpha}\in V\mid \boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r,\ x_i\in F,\ 1\leqslant i\leqslant r\}\end{aligned}$$

故必有 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1}\in V$ 且 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1}\overline{\in}W$，使得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_r,\ \boldsymbol{\alpha}_{r+1}$ 线性无关. 如若不然，即对每个 $\boldsymbol{\beta}\in V-W,\ \boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_r,\ \boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则根据 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_r$ 是线性无关可知 $\boldsymbol{\beta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，此时就必有 $\boldsymbol{\beta}\in W$. 这与 $\boldsymbol{\beta}$ 的取法矛盾.

如果 $r+1=n$，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_r,\ \boldsymbol{\alpha}_{r+1}=\boldsymbol{\alpha}_n$ 就是 V 的基，证明到此结束. 如果 $r+1<n$，我们继续上面的做法，直到找到 V 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关. 由于 V 是 n 维线性空间，所以 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 就必为 V 的基. □

现在我们转而讨论向量在不同基下的坐标之间的关系.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n$ 及 $\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_n$ 是线性空间 V 的两个基，$\boldsymbol{\alpha}\in V$，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}&=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n\\&=y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+y_n\boldsymbol{\beta}_n\end{aligned}$$

用矩阵形式写成

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

再设

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n\\\boldsymbol{\beta}_2=a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n\\\cdots\cdots\\\boldsymbol{\beta}_n=a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n\end{cases}$$

写成矩阵形式

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

我们称方阵 $\boldsymbol{A}$ 为由基$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$到基$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$的过渡矩阵. 于是有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}&=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

由于向量在给定基$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$下的坐标是唯一的，所以

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

又因过渡矩阵是可逆的,故由上式得到

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

总结以上的结果,向量在不同基下的坐标之间的关系可以由下述定理给出.

定理 1.1.3 设线性空间 V 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 下的坐标是 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$,在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\}$ 下的坐标是 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$,从基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 到基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\}$ 的过渡矩阵是 $\boldsymbol{A}$,则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

且 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的.

例 1.1.6 在矩阵空间 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中

$$\boldsymbol{E}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{E}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{E}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

为 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的一组基. 对于 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的元

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

在这个基下的坐标为 $(1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}$. 可以另取 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的一组基

$$\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

在这个基下 $\boldsymbol{A}$ 的坐标为 $(1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$.

例 1.1.7 设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是线性空间 V 的基,向量组

$$\boldsymbol{\beta}_i = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\boldsymbol{\alpha}_j, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

作矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_m)$$

则 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关的充要条件是 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_m$ 线性相关.

证　设 $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{\beta}_i = \boldsymbol{0}$, $\lambda_i \in F(i = 1, 2, \cdots, n)$，则

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{\beta}_i &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\boldsymbol{\alpha}_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ji} \right) \boldsymbol{\alpha}_j = \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性无关的，上式表明

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ji} = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

用矩阵表示就是

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

则

$$\lambda_1 \boldsymbol{\gamma}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\gamma}_2 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{\gamma}_m = \boldsymbol{0}$$

反之由上式又可以推导出

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{\beta}_i = \boldsymbol{0}$$

这说明 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关的充要条件就是 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_m$ 线性相关.

例 1.1.8 在 $\mathbf{R}[x]_4$ 中，$\boldsymbol{\alpha}_1 = 1$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = x$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = x^2$，$\boldsymbol{\alpha}_4 = x^3$ 为一组基. 设

$$\boldsymbol{\beta}_1 = 1 + x + x^2 + x^3, \qquad \boldsymbol{\beta}_2 = 1 + x - x^2 - x^3$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = 1 - x + x^2 - x^3, \qquad \boldsymbol{\beta}_4 = 1 - x - x^2 + x^3$$

(1) 证明：$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4$ 为 $\mathbf{R}[x]_4$ 的一组基；

(2) 求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4$ 的过渡矩阵；

(3) 求向量 $\boldsymbol{f} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4$ 下的坐标.

解 (1) 向量 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的坐标分别为

$$\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

由于 $|\boldsymbol{A}| = -16$，所以 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 4$，于是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关. 根据例 1.1.7 的结论知，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关，从而是 $\mathbf{R}[x]_4$ 的一组基.

(2) 由(1)知

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{A}$$

则求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$.

(3)

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

由

$$\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4)\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$