华东师范大学函授教材

数学分析讲义

（第三册）

华东师范大学数学系
数学分析教研組
編

华东师范大学函授部

华东师范大学函授教材

数学分析讲义

（第三册）

华东师范大学数学系
数学分析教研組編

华东师范大学函授部
1959年

目　录

第七章　不定积分

第八章　定　积　分

第七章 不定积分

正如学会了加法或乘法之后，我們要学它的逆运算——减法或除法，同样，学会了微分法之后，我們也需要講求它的逆运算——积分法，就是給了一个函数 $f(x)$ 之后，如何求另一个函数，它的导函数剛好等于 $f(x)$，这不仅是为了数学理論本身上的需要，更主要的是因为自然科学和生产实际上的許多問題經常提出这样的相反的課題（直接地或間接地）。

最簡單的例子有如：知道了运动的速度 $v(t)$，如何求运动方程 $s=s(t)$？或知道了曲綫每点的斜率 $m(x)$，如何求曲綫方程 $y=y(x)$？因为，如所周知，速度就是路程 s 关于时間 t 的导数：$v(t)=s'(t)$，而斜率就是縱标 y 关于横标 x 的导数：$m(x)=y'(x)$，所以摆在我們面前的不是知道了函数求它的导函数的任务，而是已經知道了导函数，反过来求原来的函数的任务。

在这一章里，我們主要是利用微分法的規律和結果来研究微分运算的逆运算，我們除了提出若干常用的方法以外，还要系統地应用这些方法到成批的函数族上去，以求能得出最后的結果。

学习指示：

1. 积分运算和微分运算不同，需要高度的技巧，这只有通过辛勤的練习才能获得，因此在这章的学习中，对于計算实践应予以更多的重視。

2. 这一章的技术气味虽較理論气味濃厚得多，但是就在技术問題的处理中也随时牽涉到一些理論問題，讀者在这些地方也要好好注意。

3. 最后还要注意本章所講的在方法論上的特点，以备和下一章所講的进行比較。

§1. 原函数

1. 有了以上的准备之后，我們現在可以开始引入下面的基本概念——原函数。

定义　設$f(x)$和$F(x)$同是定义在某区間內的函数而在这区間內的每一点都有

$$F'(x)=f(x)$$

那么，我們就称函数$F(x)$为函数$f(x)$在該区間內的一个原函数

由这定义可看出“$F(x)$是$f(x)$的原函数”只是“$f(x)$是$F(x)$的导函数”的另一說法。正如“甲是乙的儿子”是“乙是甲的父亲”的另一种說法一样。

例 1. 在$(-\infty,\infty)$，$(x^3)'=3x^2$，故按定义，函数x^3是函数$3x^2$在$(-\infty,\infty)$的一个原函数。

又在$(-\infty,\infty)$　$(x^3+5)'=3x^2$，故按定义，函数x^3+5也是函数$3x^2$在$(-\infty,\infty)$的一个原函数。

例 2. 在$(-1,1)$　$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，故按定义，函数$\arcsin x$是函数$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$在$(-1.1)$的一个原函数。

又在$(-1,1)$　$(-\arccos)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，故按定义，函数$-\arccos x$也是函数$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$在$-(1.1)$的一个原函数。

2. 在原函数定义搞清楚以后，我們首先要注意，并不是每一个定义在区間內的函数$f(x)$都是有原函数的（也就是說：并不是每一个函数都是某一函数的导函数①。）可是，如果$f(x)$有原函数的話，那么，它究竟有好多个？其关系又是如何呢？关于此，下面的重要定理給我們以完滿的回答。

---

① 容易看出象$f(x)=\begin{cases}1 & x\leqslant 0\\ 0 & x>0\end{cases}$在任何包含原点的区間內便沒有原函数，事实上，假如$F(x)$是一个原函数，那么，$F'(0)$勢必存在而且要等于$f(0)$，但由中值定理$\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=F'(\xi)=f(\xi)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$由此知$F'_-(0)=0\neq 1=F'_+(0)$，可見$F'(0)$根本就不存在，更談不上$F'(0)=f(0)$了，同样可知，每一个有第一类間断点的函数都沒有原函数。

定理: 設 $f(x)$ 在某区間內有一个原函数 $F(x)$, 那么, 所有形如 $F(x)+C$ 的函数都是 $f(x)$ 在該区間內的原函数, 于此 C 为任一常数。另一方面, 除了这些原函数以外, $f(x)$ 再沒有其它的原函数了, 也就是説, $f(x)$ 的任何一个原函数必为 $F(x)+C$ 之形, 于此 C 为某一常数。

〔証〕 这定理无非前章 §2 定理 1, 系 2 的另一說法, 因为 $f(x)$ 的兩个原函数 (其一为 $F(x)$) 就是具有同一导函数 $f(x)$ 的兩个函数。由于定理的重要性, 不妨再直接証明一下。

I $F(x)$ 为 $f(x)$ 之原函数就是說

$$F'(x)=f(x) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

但

$$(F(x)+C)'=F'(x)+0=f(x)$$

故按定义 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数。

II 設 $\Phi(x)$ 为 $f(x)$ 在同一区間內的另一个原函数, 那么由 $\Phi'(x)=f(x)$ 及 (1) 得

$$(\Phi(x)-F(x))'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

由同定理系 1 立知 $\Phi(x)-F(x)=C$, 也就是 $\Phi(x)=F(x)+C$

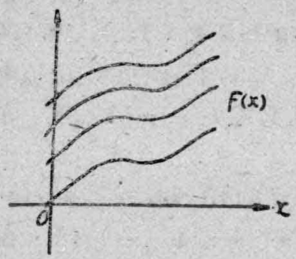
系 1 設 $f(x)$ 在某区間內有一个原函数, 那么, $f(x)$ 必然有无穷多个原函数, 所有这些原函数彼此之間仅仅相差一个常数, 故把它們当作等价的看待时, 也可說 $f(x)$ "基本上"只有一个原函数。

这定理使我們洞悉一个函数的全体原函数的結構, 它們構成一个函数族: $[F(x)+C]$

这里 $F(x)$ 为族中的任一成員①, 而 C 則遍取一切实数値。意識到这点之后, 我們要找某一函数的所有原函数, 只須随便找出其中一个就够了。由它分別加上各个不同的常数便得到全部的原函数。

从几何上来看, 上面定理的內容是非常直观的, 它告訴我們, 只須將 $f(x)$ 的一个原函数的图形順着 y 軸方向上下移动, 就可以

① 它可看做是所屬函数族的代表, 虽不妨随便选取, 但一經选定之后, 却要固定下来。



得到全体原函数的图形。所有这些曲綫自然都有这样一个共同的特点，就是凡在横标为 x 的点，其切綫斜率剛好都等于 $f(x)$ 在 x 的值——原函数之所以为原函数正在于此。

上面定理还有一个重要的推論，它告訴我們：在整个原函数族中，其个别成員可以通过怎样的条件来确定，从而选出我們所需要的特殊的原函数。

系 2 設 $f(x)$ 在区間內有原函数，x_0 为区間內任一点，y_0 为任一实数，那么，必然存在唯一的一个原函数 $\Phi(x)$，滿足条件(所謂初值条件)：

$$\Phi(x_0)=y_0$$

〔証〕 从任何一个原函数 $F(x)$ 出发，將它固定下来，根据定理，$\Phi(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，当而且仅当

$$\Phi(x)=F(x)+C \qquad C\text{ 为一常数。}$$

所以只須指出：存在唯一的 C，滿足

$$\Phi(x_0)=F(x_0)+C=y_0$$

好了。 但这是显然的，因为 $C=y_0-F(x_0)$，故知

$$\Phi(x)=F(x)-F(x_0)+y_0$$

即为所要求的原函数。

用几何的話来說，就是：平面上任何指定的一点 $(x_0\ y_0)$ (但 x_0 屬于 $f(x)$ 定义区間) 都剛好有一条表示 $f(x)$ 原函数的曲綫經过。

3. 当我們并不計較是 $f(x)$ 的那一个原函数时我們不妨对于 $f(x)$ 的各原函数 (已知它們頂多相差一常数) 都不加区别地用

$$\int f(x)dx$$

記号来表示。这样写时，也称为 $f(x)$ 的**不定积分**，(記号和名称来

源，以后講定积分时便知），而 $f(x)$ 称为它的被积函数，$f(x)dx$ 称为被积表达式，x 称为积分变数。

有了这記法之后，“$F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数”这一事实就可表达为

$$F(x)=\int f(x)dx \text{ 或 } \int f(x)dx=F(x) \qquad (1)$$

当然，当 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数时，对任何常数 C，$F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，因此同样也可写

$$\int f(x)dx=F(x)+C \qquad (2)$$

尽管(1)或(2)（c 为任何常数）的写法都可以①，可是当我們要表明 $f(x)$ 的原函数是什么的时候，习惯上总是写成（2）的一般形式，这里 C 已不是任何常数而是表示任何常数的字母，称为积分常数。

例
$$\int x^3dx=\frac{x^4}{4}+C$$
$$\int \cos\ x\ dx=\sin x+C$$

凡是这些式子的意思都应这样来理解：拿第一个来說就是意味着“$\frac{x^4}{4}$ 加上任一常数都等于 x^3 的某一原函数(从右到左)，同时，x^3 的任一原函数都等于 $\frac{x^4}{4}$ 加上某一常数（从左到右）”故总的說来无非是指“x^3 的全体原函数为函数族 $\left[\frac{x^4}{4}+C\right]$ 的意思。

4. 其次，讓我們来談一下求原函数的运算，也就是由（被积函数）$f(x)$ 求不定积分 $\int f(x)dx$ 的运算 $\int \square dx$. 这运算称为积分运算，因为按定义 $f(x)$ 的任一个原函数（当它存在时）就是“其导函数剛好是 $f(x)$ 的函数”，所以直接得

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x) \qquad (3)$$

---

① 这記法的籠統性会不会引起混乱呢？那要看我們怎样用它了。通常总是当我們对于“究竟是那一个原函数”不感兴趣时才用这記法的，只要在同一問題中，符号 $\int f(x)dx$ 始終代表同一个原函数，那么，其它的混乱也不致产生。

即从一个函数出发，經过积分之后，再求导函数，必然还原。另一方面，因为每一个（可导）函数总是它自己的导函数$\frac{d}{dx}F(x)$的原函数，故由（2）得

$$\int \frac{d}{dx}F(x)dx = F(x)+C \tag{4}$$

即从一个函数出发，經过求导之后，再积分，除了可差一常数外必然还原。綜合起来，恰好是說明求导运算$\frac{d}{dx}\square$和积分运算$\int\square dx$互为逆运算的意思。

积分运算还可从另一角度来观察。由于$F'(x)=f(x)$与$dF(x)=f(x)dx$意味着同一回事，故原函数$F(x)$也可說是这样一个函数，它的微分刚好等于$f(x)dx$。这样，从（被积函数）$f(x)$求不定积分$\int f(x)dx$的运算实質上也就等价于从（被积表达式）$f(x)dx$求$\int f(x)dx$的运算——仍称为积分运算①，而“$\int$”就可理解为表示这运算的記号。由（3）（4）及微分定义得

$$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

$$\int dF(x) = F(x)+C$$

这一对关系說明了微分运算$d\square$和积分运算$\int\square$的互逆性——它特別簡單地体現在：“凡“d”与“$\int$”連在一起出現时可以互相抵消”这一規律上。

积分法（即关于积分运算的学問）的根本問題是：

I、那些函数有原函数？

II、如果一个函数有原函数的話，怎样去求它？

例 1. 設一曲綫$y=f(x)$，它在(x,y)点的斜率为$2x$，且通过点$(2,5)$，求这曲綫的方程。

解： 由于$y'=f'(x)=2x$故知

① 前面所講的积分运算是由函数得函数，有对称性，这里所講的积分运算是由微分式得函数，丧失了对称性。

$$y=\int f'(x)\,dx=\int 2xdx=x^2+C$$

因为不难驗証，右端的导数剛好等于 $2x$

令 $x=2$ 得 $5=2^2+C$， $C=1$ 于是曲綫方程为

$$y=x^2+1$$

例 2. 已知落体运动 $s=s(t)$ 之速度为

$v=gt+v_0$ （ g 为重力系数，v_0为初速，都是常数）

且当 $t=0$ 时 $s=0$ 求运动方程

解: 由于 $v=\frac{ds}{dt}$，故知

$$s=\int vdt=\int(gt+v_0)dt=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+C$$

因为不难驗証，右端的导数剛好等于 $gt+v_0$

令 $t=0$ 得 $c=0$，于是所求运动方程为

$$s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t.$$

§2 基本积分表

前节末提出了积分法的兩个根本問題，現在且看我們將怎样来进行解决。首先我們很快会发現这里所面临的情况和在微分法中的截然不同。在那里导数是作为一种极限: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 而定义的。这定义本身就直接告訴我們怎样具体地由 $f(x)$ 来求 $f'(x)$ 的方法（假定求极限作为已知运算）。所以象导数这样的定义被称为是帶有構造性的，可是在以求原函数为中心任务的积分法就不具备这一有利条件。因为原函数的定义只是說，它是一个函数，其导函数剛好等于 $f(x)$，这定义本身絲毫沒有暗示怎样由 $f(x)$ 来求它的原函数的方法。那么，我們將怎样办呢?

这里的情况和整数除法有其类似之处。大家知道，乘法的定义本身实际上已規定了实施的具体方法。可是作为它的逆运算的除法就不具备这一有利条件。尽管如此，利用乘法的結果，除法还是大

有可为。因此，我們对于积分运算至少可采取同样态度来处理，就是尽量利用微分法的已知結果。不过这样做法就不可避免地將帶有一定的試探性（比除法更甚），因而和微分法比起来就必然要显得繁难得多了。

構成积分法的原始材料的是关于某些簡單初等函数的不定积分公式，它們的极大部分是和基本初等函数的导数公式相当的，不过是換一个写法罢了。

1. $\dfrac{dx^{\alpha}}{dx}=\alpha x^{\alpha-1}$;　　$\displaystyle\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C(\alpha\neq-1)$

2. $\dfrac{d\ln x}{dx}=\dfrac{1}{x}$;　　$\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$①

3. $\dfrac{de^{x}}{dx}=e^{x}$;　　$\displaystyle\int e^{x}dx=e^{x}+C$

4. $\dfrac{da^{x}}{dx}=a^{x}\ln a$;　　$\displaystyle\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C$

5. $\dfrac{d\sin x}{dx}=\cos x$;　　$\displaystyle\int\cos x\,dx=\sin x+C$

6. $\dfrac{d\cos x}{dx}=-\sin x$;　　$\displaystyle\int\sin x\,dx=-\cos x+C$

7. $\dfrac{d\,tgx}{dx}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$;　　$\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2 x}=+tgx+C$

8. $\dfrac{d\,ctgx}{dx}=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$;　　$\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C$

9. $$\left.\begin{aligned}\frac{d\arcsin x}{dx}&=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ \frac{d\arccos x}{dx}&=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}\right\}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$$

$$=-\arccos x+C,\ |x|<1$$

---

① 当 $x>0$ 时，这公式显然是正確的，当 $x<0$ 时，$ln(-x)$ 有意义而 $\dfrac{d}{dx}ln(-x)=\dfrac{-1}{-x}=\dfrac{1}{x}$ 可見这时 $ln(-x)$ 也就是 $\ln|x|$ 为 $\dfrac{1}{x}$ 的一个原函数。

10. $$\left.\begin{aligned}\frac{d\,\mathrm{arc\,tg}\,x}{dx}&=\frac{1}{1+x^2}\\ \frac{d\,\mathrm{arc\,ctg}x}{dx}&=-\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}\right\}\int\frac{dx}{1+x^2}=\mathrm{arc\,tg}\,x+c$$

$$=-\mathrm{arcctg}x+C$$

上面的某些不定积分公式虽然不完全和它左边的导数公式相当（例如1.便是这样。和$\frac{dx^\alpha}{dx}=\alpha x^{\alpha-1}$完全相当的应該是$\int\alpha x^{\alpha-1}dx=x^\alpha+C$)，可是只須微分一下便知它們的眞确（例如微分$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$便得$x^\alpha$）又在此表中我們还得补充几个有关双曲綫函数的公式。什么叫双曲綫函数以及这些公式的来源在下面一节將有說明。它們并非什么新型的函数，在微分法中尽可不用，但在积分法中有了它們却方便得多，所以將有关公式一并汇录于此①。

11. $\frac{d\mathrm{sh}x}{dx}=\mathrm{ch}x$; $\qquad\int\mathrm{ch}x\,dx=\mathrm{sh}x+C$

12. $\frac{d\mathrm{ch}x}{dx}=\mathrm{sh}x$; $\qquad\int\mathrm{sh}x\,dx=\mathrm{ch}x+C$

13. $\frac{d\mathrm{th}x}{dx}=\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}$; $\qquad\int\frac{dx}{\mathrm{ch}^2x}=\mathrm{th}x+C$

14. $\frac{d\mathrm{cth}x}{dx}=-\frac{dx}{\mathrm{sh}^2x}$; $\int\frac{dx}{\mathrm{sh}^2x}=-\mathrm{cth}x+C$

15. $\frac{d\mathrm{sh}^{-1}x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$;

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\mathrm{sh}^{-1}x+C=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$$

16. $\frac{d\mathrm{ch}^{-1}x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\begin{cases}\mathrm{ch}^{-1}x+C=\ln(x+\sqrt{x^2-1})+C, & x>1\\ -\mathrm{ch}^{-1}|x|+C=\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C, & x<-1\end{cases}$$

---

① 这些公式主要是在§7才用到，初讀时可以跳过

17. $$\left.\begin{aligned}\frac{d\operatorname{th}^{-1}x}{dx}&=\frac{1}{1-x^2}\\ \frac{d\operatorname{cth}^{-1}x}{dx}&=\frac{1}{1-x^2}\end{aligned}\right\}$$

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\operatorname{th}^{-1}x+C=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C,\ |x|<1$$

$$=c\operatorname{th}^{-1}x+C=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}+C,\ |x|>1$$

以上排在右边的十七个公式組成通常所謂基本积分表。这表在积分法中的地位和作用正和九九表在除法中的地位和作用一样，所以需要熟記。

§3　关于双曲綫函数①

在分析中常出現指数函数的某种有理結合，値得特别給它們一个名称，那就是

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x},\qquad \operatorname{cth}x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}\ (x\neq 0)$$

并分别称为双曲正弦、双曲余弦、双曲正切、双曲余切各函数，容易驗証，它們滿足类似于三角函数之間的关系，如象：

$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1.\text{②}\ \operatorname{sh}(-x)=-\operatorname{sh}x,\quad \operatorname{ch}(-x)=ch x$$

$$\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y+\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y$$

$$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y$$

等等。这些函数不只是在其定义域連續，而且还是可导的：

$$(\operatorname{sh}x)'=\operatorname{ch}x,(\operatorname{ch}x)'=\operatorname{sh}x,\ (th x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x},\ (\operatorname{cth}x)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}.$$

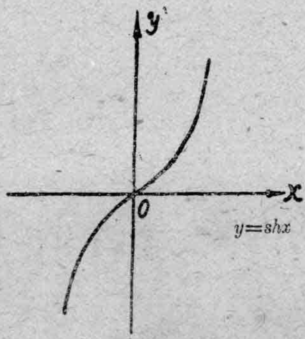
所有这一切都表明了双曲綫函数和三角函数的强烈的类似，但兩者之間有一巨大的区别，不可不注意，那就是：三角函数是周期函数，

① 本节初讀时可以跳过，直到讀§7时再回头来看。

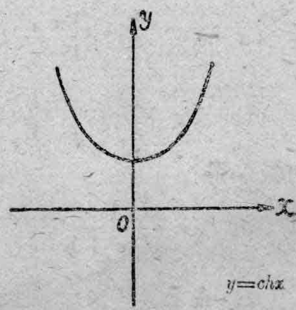
② 由于这关系，双曲綫 $x^2-y^2=1$ 可用参数方程 $x=\operatorname{ch}t$，$y=\operatorname{sh}t$ 来表示（和园 $x^2+y^2=1$ 可用 $x=\cos t$，$y=\sin t$ 来表示一样），双曲綫函数之名称便由此得来。至于参数 t 在此的几何意义是什么，稍迟便会明白。

而双曲綫函数却不是周期函数。

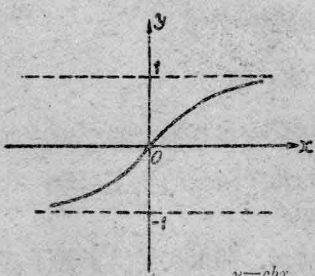
試观察一下，它們的变化狀态。由于$(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{ch}x>0$可知$\mathrm{sh}x$在$(-\infty,\infty)$递增（从$-\infty$到$+\infty$）。又由于$(\mathrm{ch}x)'=\mathrm{sh}x$而$\mathrm{sh}x\gtreqless 0$当$x\gtreqless 0$，可知$\mathrm{ch}x$在$(-\infty,0\rangle$递减（从$+\infty$到1），而在$\langle 0,\infty)$递增（从1到$+\infty$）。同理可知$\mathrm{th}\,x$在$(-\infty,\infty)$递增（从$-1$到1），$\mathrm{cth}\,x$在$(-\infty,0)$递减（从$-1$到$-\infty$），在$(0,\infty)$仍递减（从$+\infty$到1）。它們的图形大致如下：



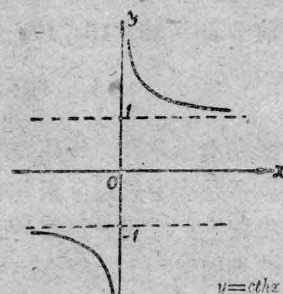
$y=shx$



$y=chx$



$y=chx$



$y=cthx$

在这些函数的單調区間內存在着逆函数（反双曲綫函数），故$\mathrm{sh}x$，$\mathrm{th}x$，$c\mathrm{th}x$在其整个定义域都有逆函数，分別記为$\mathrm{sh}^{-1}x$（$-\infty<x<\infty$），$\mathrm{th}^{-1}x(|x|<1)$，$\mathrm{cth}^{-1}x(|x|>1)$至于$\mathrm{ch}x$則在（$-\infty$ $0\rangle$及$\langle 0,\infty$）各有一枝逆函数（相差一个符号），特別是在$\langle 0,\infty$）的一枝記为$\mathrm{ch}^{-1}x$（$x\geqslant 1$）。所有这些逆函数都可以通过对数函数表达出来。

例如由 $\operatorname{sh}x=y=\dfrac{e^{v}-e^{-v}}{2}=\dfrac{u-u^{-1}}{2}$，$(u=e^{v})$ 得

$u^2-2xu-1=0$ 或 $u=x+\sqrt{x^2+1}$（只能取正根，因$u>0$）

也就是 $y=\ln u=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 或

$$\operatorname{sh}^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

同样可得

$$\operatorname{ch}^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

$$\operatorname{th}^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

$$\operatorname{cth}^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$$

將它們微分得

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sh}^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\qquad \frac{d}{dx}\operatorname{ch}^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ (|x|>1)$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{th}^{-1}x=\frac{d}{dx}\operatorname{cth}^{-1}x=\frac{1}{1-x^2}$$

这就是前节表中 15、16、17、左边的微分公式。

§4. 积分法則

根据基本积分表，凡是表內有的不定积分都可將它的結果立刻写出来。可是表中只包含极其有限的几个函数的不定积分，我們怎样才能根据它們来积分更多的函数呢？

讓我們回忆一下在微分法中的情形。那里在导出了若干基本初等函数的导数之后，我們引入了微分法則，凭着它們，便可微分全体的初等函数。

既然积分运算是微分运算之逆，而每一个微分結果都对应有一个积分結果，那么每一个微分法則也应該对应有一个积分法則。事实上确是如此。这些积分法則都能使我們从已知的不定积分得出新的不定积分，尽管这些积分法則的价值远不如微分法則那样大，它們究竟能够在許多情况下帮助我們化繁为簡，从而积分出大量的初

等函数。因此我們要很好地学会运用它們。

I. 綫 性 法 則

定理 1. 設 $f_i(x)$，$i=1,2,\cdots,n$，为定义在共同区間 I 的几个函数，且各 $f_i(x)$ 在 I 都有不定积分，那么，它們的綫性結合：$f(x)=\Sigma a_i f_i(x)$，（$a_i, i=1,2\cdots, n$，为 n 个常数）在 I 也有不定积分，且

$$\int f(x)dx=\sum_{i=1}^{n} a_i\int f_i(x)dx \qquad (1)$$

（1）的意思是說：对于 $f_i(x)$ 的任何一个原函数 $\int f_i(x)\,dx$，$i=1,2\cdots\cdots u$，$\sum_{i=1}^{n} a_i\int f_i(x)dx$，总是 $f(x)$ 的一个原函数，簡括地說：綫性結合的不定积分等于不定积分的綫性結合。显然，这定理是和第五章，§4.定理 1 的微分法則相对应的。

［証］ 由定义，各 $\int f_i(x)dx$ 在 I 可导且 $\frac{d}{dx}\int f_i(x)\,dx=f_i(x)$，故由上述微分法的定理，$\sum_{i=1}^{n} a_i\int f_i(x)dx$ 也在 I 可导且导函数为 $\frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{n} a_i\int f_i(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n} a_i\frac{d}{dx}\int f_i(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x)$

这就是說 $\sum_{i=1}^{n} a_i\int f_i(x)dx$ 确为 $f(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x)$ 的一个原函数。

系 1. $\int af(x)\,dx=a\int f(x)dx$ 如果右边的不定积分存在。（常数因子可从积分号內提出）。

系 2. $\int[f_1(x)\pm f_2(x)]dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx$ 如果右边的不定积分存在。

例 1. 多項式 $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n$ 的不定积分为

$$\int P(x)dx=C+a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

（C 为任意常数）

这不过是应用定理于 $f_i(x)=x^i$ $i=1,2\cdots,n$. 然后再应用基本积分表公式1的結果。由是知多項式的不定积分仍旧是多項式。

关于綫性法則的应用，在下面还要一再碰到。

II. 代換积分法則

定理 2. 設 $u=\varphi(x)$ 在区間 I_x 可导，$f(u)$ 在区間 I_u 的不定积分 $\int f(u)du$ 存在，而当 $x\in I_x$ 时 $\varphi(x)\in I_u$，那么，不定积分 $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ 在 I_x 也存在，且

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx=\left[\int f(u)\,du\right]_{u=\varphi(x)} \qquad (2)$$

(2)的意思是說：对于 $f(u)$ 的任何一个原函数 $\int f(u)du=F(u)$，用 $u=\varphi(x)$ 代入（由假設这是可能的）之后，$F(\varphi(x))$ 总是 $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ 的一个原函数。將(2)和复合函数求导公式一比較便可发現它們是相对应的。如果利用微分記法將(2)的左边写成 $\int f(\varphi(x))d\varphi(x)$，那么(2)就成为

$$\int f(\varphi(x))d\varphi(x)=\left[\int f(u)\,du\right]_{u=\varphi(x)}$$

簡括地說就是：將一个可导函数（这里是 $\varphi(x)$）先代入积分变数（这里是 u）后再积分，等于先积分后再代入。显然这又是和微分的不变性——“代入后再微分等于微分后再代入”相对应的。

[証] 設 $\int f(u)du=F(u)$，那么，由定义 $F(u)$ 可导，且 $F'(u)=f(u)$。根据复合函数求导定理立刻得到

$$\frac{d}{dx}F(\varphi(x))=F'(\varphi(x))\varphi'(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

这就是 $F(\varphi(x))$ 确为 $f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$ 的一个原函数。

这定理告訴我們：如果被积函数 $\Phi(x)$ 可表达为 $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ 之形（$\varphi(x)$ 的复合函数和 $\varphi(x)$ 的导函数之积），或者說，被积表达式 $\Phi(x)dx$ 可表达为 $f(\varphi(x))d\varphi(x)$ 之形，而 $\int f(u)du$（u为自