

本书前身为  
邮电部优秀教材

# 电磁场与电磁波理论

(第二版)

徐立勤 曹伟 编著



科学出版社  
[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

# 电磁场与电磁波理论

(第二版)

徐立勤 曹 伟 编著

科学出版社

北 京

## 内 容 简 介

本书对电磁场与电磁波理论作了系统、全面、深入浅出的论述。全书共分为8章,内容包括矢量分析与场论、宏观电磁现象的基本定律、静电场及其边值问题的解法、恒定电场与恒定磁场、电磁波的辐射、均匀平面波的传播、均匀波导中的导行电磁波、均匀传输线中的导行电磁波。本书采用“演绎法”组织教材内容,使得电磁波部分的内容占了全书的一半以上。

本书可作为高等院校电子信息类专业的本科生教材,也可供其他专业学生或工程技术人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波理论/徐立勤,曹伟编著.—2版.—北京:科学出版社,2010.7

ISBN 978-7-03-028182-1

I. 电… II. ①徐…②曹… III. 电磁场-高等学校-教材 IV. ①0441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第124128号

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

骏主印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2006年1月第一版 开本:787×1092 1/16

2010年7月第二版 印张:21 3/4

2010年7月第六次印刷 字数:510 000

印数:10 501—14 000

定价:38.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

## 第二版前言

本书汲取了南京邮电大学电磁场类课程教学组长期从事本科教学的实践经验,在第一版的基础上修订而成,书中内容非常适合电子信息类专业的本科生,也可供其他专业学生或工程技术人员参考。

本书第一版一直作为南京邮电大学通信工程、电子信息工程以及电磁场与无线技术专业本科生的教材。根据几年来的教学经验,本次再版做了如下修订:在第1章中加强场的概念;对第2章的部分内容进行整编,增强其系统性;在第3章重点对分离变量法进行修改,使得学生学习起来更容易;在第6章对均匀平面波在理想介质中的传播内容进行全面的调整和更新,使其更实用。

由于编者水平有限,书中的错误乃至不当之处在所难免,敬请读者不吝指正。

编者  
2010年3月

## 第一版前言

电磁学是人类在利用自然、改造自然长期实践中逐步形成的一门自然科学分支,它与其他相关学科的相互渗透和相互促进中,不断地获得发展和完善,同时也极大地推动着通信、雷达、广播、导航、遥感等一系列电子科技的革新和进步。当今,电磁学已成为无线电电子学领域里的一门重要基础学科,电磁学方面的课程已成为各国理工科大学的必修基础课。

目前,国内外比较著名的电磁学类书籍已经不少。这些书籍的基本内容虽然大同小异,但在材料取舍、结构、侧重、阐述诸方面却各具特色。在本书的编写中,笔者汲取了南京邮电大学该课程教学群体长期从事本科教学的实践经验,注意参考和比较了国内外一些同类书籍的特色,并以此为基础,形成了本书的一些特点。这些特点主要表现为:

1. 在第1章“矢量分析”中,比较系统地介绍了矢量分析中的一些基本概念和基本定理,为全书提供了一个完整的数学预备知识。对于不具备这方面知识的读者,学好这一章将为后面章节的学习打下良好的基础。对于那些已经学过这一内容的读者而言,这一章则可作为他们自学和复习的资料。

2. 在第2章“宏观电磁现象的基本规律”中,将大学普通物理课程中的电磁学内容作了简要回顾,介绍了电磁学中的一些基本物理量和一些基本电磁定律,直至引出麦克斯韦方程组积分形式。接着,再以这些物理课程内容为基础,直接导出时变电磁场麦克斯韦方程组的微分形式和电磁场的边界条件,使读者很快地进入本课程核心内容。这种安排的好处至少有两个,一是可以与先导课程(物理课)有一定重叠,以利承上启下,平稳过渡,保持教学内容的连续性;二是可以避免与物理课程内容过多重复,节省教学课时。

3. 在第3章“静电场及其边值问题的解法”及第4章“恒定电场与恒定磁场”中,分别讨论了静止电荷产生的电场和恒定电流产生的电场与磁场。这些场是时变电磁场在诸场量不随时间而变化条件下的特例。令诸场量随时间的变化率等于零,便可直接从麦克斯韦方程组及其边界条件导出静电场和恒定场的基本方程和边界条件,这种由“一般”到“特殊”的叙述方法称作“演绎法”,它与传统的从“特殊”到“一般”的“归纳法”叙述方式正好相反。“归纳法”叙述顺序是先介绍静电场,再讨论恒定电场与磁场,最后才研究时变电磁场。这种叙述顺序虽然与电磁学由“简”到“繁”历史发展过程相一致,比较容易被人们所接受,但却与物理课程内容产生了过多的和不必要的重复。我们选择“演绎法”,除了因为它可以避免“归纳法”的上述缺陷以外,还因为它将有利于读者较早地形成电磁场与电磁波的整体概念,并能较好地培养学生利用一般规律分析和解决具体问题的能力。

4. 在第3章对静电场的讨论中,重点放在静电场边值问题的求解方法上。这些方法的重要性不仅表现在求解静电问题本身,更主要的是表现在它可以推广和延伸到求解各类复杂电磁问题。边值问题的求解方法很多,我们只介绍其中一些最流行和最具代表性的方法,在解析方法方面,除了介绍直接积分法和镜像法以外,重点讨论三种常用正交坐

标系下的分离变量法。在数值方法方面,既介绍“场域型”数值方法,又介绍“边界型”数值方法。在这两类数值方法中,有限差分法被选择作为前者的代表,而矩量法被选择作为后者的代表。

5. 从第 5 章开始就转入对电磁波的讨论,直至本书第 8 章为止。在这一部分中,电磁波理论中的一些最基本内容均有涉及:既介绍了电磁波的辐射(第 5 章),又介绍了电磁波的传播(第 6、7、8 章);既介绍了电磁波在无界空间中的传播(第 6 章),又介绍了电磁波沿导波结构的传播(第 7、8 章);既介绍了电磁波在无反射情况下的传播(第 6 章的前两节),又介绍了电磁波在传播过程中遇到障碍物时的反射与折射(第 6 章的后两节);等等。总的说来,若把专门介绍数学预备知识的第 1 章除外,电磁波部分占了全书内容的一半以上。我们之所以这样安排,主要是考虑到电磁波内容与电磁工程实际联系比较紧密,需要加强。另外,采用“演绎法”组织教材内容,也使电磁场内容的减少成为可能。

本教材是为通信电子类专业本科生而写的,但也可以作为其他专业学生或工程技术人员的参考书。全书共分 8 章,每章结尾均配备了一定数量的习题,并在本书最后给出了部分习题的答案。习题数量要比教学中实际需要和学生有可能完成的数量要多一些,教师可根据具体情况自行选择。本教材的教学参考学时为 48~80 学时,可由授课教师按学时情况以及教学要求选用。

本书由徐立勤执笔,曹伟定稿。书稿完成后,南京邮电大学的吴志忠教授审阅了全书并提出了若干改进意见。

由于编者水平有限,时间也比较紧迫,疏漏乃至错误之处在所难免,敬希读者不吝指正。

编 者

2005 年 9 月于南京邮电大学

## 主要物理量的符号、单位和量纲

物理量		单位		量纲
名称	符号	名称	符号	
长度	$L, l$	米	m	L
质量	$m$	千克	kg	M
时间	$t$	秒	s	T
电流	$I, i$	安培	A	I
矢量磁位	$A$	韦伯每米	Wb/m	$MLI^{-1}T^{-2}$
磁感应强度	$B$	特斯拉	T	$MI^{-1}T^{-2}$
电纳	$B$	西门子	S	$I^2T^3M^{-1}L^{-2}$
电容	$C$	法拉	F	$I^2T^4M^{-1}L^{-2}$
真空中光速	$c$	米每秒	m/s	$LT^{-1}$
电位移	$D$	库仑每平方米	$C/m^2$	$ITL^{-2}$
方向性系数	$D$			
电场强度	$E$	伏特每米	V/m	$MLI^{-1}T^{-3}$
力	$F$	牛顿	N	$MLT^{-2}$
频率	$f$	赫兹	Hz	$T^{-1}$
电导	$G$	西门子	S	$I^2T^3M^{-1}L^{-2}$
磁场强度	$H$	安培每米	A/m	$IL^{-1}$
体电流密度	$J$	安培每平方米	$A/m^2$	$IL^{-2}$
体传导电流密度	$J_c$	安培每平方米	$A/m^2$	$IL^{-2}$
体位移电流密度	$J_d$	安培每平方米	$A/m^2$	$IL^{-2}$
体运流电流密度	$J_e$	安培每平方米	$A/m^2$	$IL^{-2}$
面电流密度	$J_s$	安培每米	A/m	$IL^{-1}$
行波系数	$K$			
波数	$k$	弧度每米	rad/m	$L^{-1}$
电感	$L$	亨利	H	$ML^2I^{-2}T^{-2}$
互感	$M$	亨利	H	$ML^2I^{-2}T^{-2}$
折射率	$n$			
电极化强度	$P_c$	库仑每平方米	$C/m^2$	$ITL^{-2}$
磁化强度	$P_m$	安培每米	A/m	$IL^{-1}$
功率	$P$	瓦特	W	$ML^2T^{-3}$
电荷[量]	$Q, q$	库仑	C	IT
电阻	$R$	欧姆	$\Omega$	$ML^2I^{-2}T^{-3}$
坡印亭矢量	$S$	瓦特每平方米	$W/m^2$	$MT^{-3}$

续表

物理量		单位		量纲
名称	符号	名称	符号	
平均坡印亭矢量	$S_{av}$	瓦特每平方米	$W/m^2$	$MT^{-3}$
驻波比	$S$			
周期	$T$	秒	$s$	$T$
折射系数, 透射系数	$T$			
电压	$U(V)$	伏特	$V$	$ML^2I^{-1}T^{-3}$
速度	$v$	米每秒	$m/s$	$LT^{-1}$
相速	$v_p$	米每秒	$m/s$	$LT^{-1}$
群速	$v_g$	米每秒	$m/s$	$LT^{-1}$
能量	$W$	焦耳	$J$	$ML^2T^{-2}$
能量密度	$w$	焦耳每立方米	$J/m^3$	$ML^{-1}T^{-2}$
电场能量密度	$w_e$	焦耳每立方米	$J/m^3$	$ML^{-1}T^{-2}$
磁场能量密度	$w_m$	焦耳每立方米	$J/m^3$	$ML^{-1}T^{-2}$
电抗	$X$	欧姆	$\Omega$	$ML^2I^{-2}T^{-3}$
导纳	$Y$	西门子	$S$	$I^2T^3M^{-1}L^{-2}$
特性导纳	$Y_c$	西门子	$S$	$I^2T^3M^{-1}L^{-2}$
阻抗	$Z$	欧姆	$\Omega$	$ML^2I^{-2}T^{-3}$
特性阻抗	$Z_c$	欧姆	$\Omega$	$ML^2I^{-2}T^{-3}$
波阻抗	$Z_w$	欧姆	$\Omega$	$ML^2I^{-2}T^{-3}$
衰减常数	$\alpha$	奈培每米	$Np/m$	$L^{-1}$
相位常数	$\beta$	弧度每米	$rad/m$	$L^{-1}$
反射系数	$\Gamma$			
传播常数	$\gamma$	每米	$m^{-1}$	$L^{-1}$
透入深度	$\delta$	米	$m$	$L$
介电常数	$\epsilon$	法拉每米	$F/m$	$I^2T^4M^{-1}L^{-3}$
真空介电常数	$\epsilon_0$	法拉每米	$F/m$	$I^2T^4M^{-1}L^{-3}$
相对介电常数	$\epsilon_r$			
真空波阻抗	$\eta$	欧姆	$\Omega$	$ML^2I^{-2}T^{-3}$
效率	$\eta$			
布儒斯特角	$\theta_B$	弧度	$rad$	
临界角	$\theta_c$	弧度	$rad$	
波长	$\lambda$	米	$m$	$L$
自由空间波长	$\lambda_0$	米	$m$	$L$
截止波长	$\lambda_c$	米	$m$	$L$
波导波长	$\lambda_g$	米	$m$	$L$



续表

物理量		单位		量纲
名称	符号	名称	符号	
磁导率	$\mu$	亨利每米	H/m	$MLI^{-2}T^{-2}$
真空磁导率	$\mu_0$	亨利每米	H/m	$MLI^{-2}T^{-2}$
相对磁导率	$\mu_r$			
体电荷密度	$\rho$	库仑每立方米	C/m <sup>3</sup>	$ITL^{-3}$
面电荷密度	$\rho_s$	库仑每平方米	C/m <sup>2</sup>	$ITL^{-2}$
线电荷密度	$\rho_l$	库仑每米	C/m	$ITL^{-1}$
电导率	$\sigma$	西门子每米	S/m	$I^2T^3M^{-1}L^{-3}$
电通[量]	$\Psi_c$	库仑	C	IT
磁通[量]	$\Psi_m$	韦伯	Wb	$ML^2I^{-1}T^{-2}$
电位	$\Phi$	伏特	V	$ML^2I^{-1}T^{-3}$
标量磁位	$\Phi_m$	安培	A	I
角频率	$\omega$	弧度每秒	rad/s	$T^{-1}$
电极化率	$\chi_c$			
磁化率	$\chi_m$			

# 目 录

第二版前言

第一版前言

主要物理量的符号、单位和量纲

<b>第 1 章 矢量分析与场论</b> .....	1
1.1 矢量的代数运算 .....	1
1.1.1 矢量及其表示法 .....	1
1.1.2 矢量的代数运算 .....	3
1.2 场的微分运算 .....	7
1.2.1 场的基本概念 .....	7
1.2.2 标量场的方向导数和梯度 .....	8
1.2.3 矢量场的通量和散度 .....	11
1.2.4 矢量场的环量和旋度 .....	14
1.2.5 梯度、散度、旋度的比较 .....	18
1.3 矢量的恒等式和基本定理.....	19
1.3.1 三个重要的恒等式 .....	19
1.3.2 矢量场的基本定理 .....	20
1.4 常用正交曲线坐标系.....	24
1.4.1 三种常用的正交曲线坐标系 .....	25
1.4.2 三种常用坐标系的转换 .....	27
1.4.3 三种坐标系中的梯度、散度、旋度和拉普拉斯展开式 .....	28
习题 .....	30
<b>第 2 章 宏观电磁现象的基本定律</b> .....	32
2.1 基本电磁物理量.....	32
2.1.1 电荷密度 .....	32
2.1.2 电场强度 .....	34
2.1.3 电极化强度 .....	35
2.1.4 电位移 .....	37
2.1.5 电流密度 .....	37
2.1.6 磁感应强度 .....	40
2.1.7 磁化强度 .....	41
2.1.8 磁场强度 .....	42
2.2 电磁场基本定律.....	43
2.2.1 库仑定律 .....	43

2.2.2	环量定律和高斯定律	45
2.2.3	安培定律与毕奥-萨伐尔定律	47
2.2.4	磁通连续性定律和安培环路定律	48
2.2.5	法拉第电磁感应定律	51
2.2.6	电荷守恒定律	52
2.3	麦克斯韦方程组	53
2.3.1	麦克斯韦的两个假设	53
2.3.2	麦克斯韦方程组的积分形式	56
2.3.3	麦克斯韦方程组的微分形式	57
2.4	时变电磁场的边界条件	59
2.4.1	边界条件的一般形式	59
2.4.2	边界条件的三种常用形式	61
	习题	63
<b>第3章</b>	<b>静电场及其边值问题的解法</b>	<b>68</b>
3.1	静电场的基本方程与边界条件	68
3.1.1	静电场的基本方程	68
3.1.2	静电场的边界条件	69
3.2	电位及其电位方程	70
3.2.1	电位和电位梯度	70
3.2.2	电位的微分方程和边界条件	75
3.3	静电场的能量和导体的电容	77
3.3.1	静电场的能量和能量密度	77
3.3.2	导体系统的电容	79
3.4	静电场边值问题的分类以及唯一性定理	82
3.4.1	静电场边值问题的分类	82
3.4.2	静电场唯一性定理	82
3.5	直接积分法	84
3.6	分离变量法	87
3.6.1	直角坐标系中的分离变量法	87
3.6.2	圆柱坐标系中的分离变量法	94
3.6.3	球面坐标系中的分离变量法	98
3.7	镜像法	101
3.7.1	点电荷关于无限大导体平面的镜像法	101
3.7.2	点电荷关于导体球面的镜像法	104
3.7.3	点电荷关于无限大介质平面的镜像法	107
3.7.4	线电荷关于无限长圆柱导体面的镜像法	108
3.8	静电场的数值解法	111
3.8.1	有限差分法	112

3.8.2 矩量法 .....	117
习题 .....	120
<b>第 4 章 恒定电场与恒定磁场</b> .....	125
4.1 恒定电场的基本方程与边界条件 .....	125
4.1.1 恒定电场的基本方程 .....	125
4.1.2 恒定电场的边界条件 .....	126
4.2 恒定电场的电位与静电比拟法 .....	126
4.2.1 恒定电场的电位 .....	126
4.2.2 恒定电场的功率损耗与电容器的漏电导 .....	127
4.2.3 静电比拟法 .....	128
4.3 恒定磁场的基本方程与边界条件 .....	130
4.3.1 恒定磁场的基本方程 .....	130
4.3.2 恒定磁场的边界条件 .....	130
4.4 矢量磁位和标量磁位 .....	132
4.4.1 恒定磁场的矢量磁位 .....	133
4.4.2 恒定磁场的标量磁位 .....	137
4.5 恒定磁场的能量和载流回路的电感 .....	140
4.5.1 恒定磁场的能量和能量密度 .....	140
4.5.2 载流回路的电感 .....	140
习题 .....	143
<b>第 5 章 电磁波的辐射</b> .....	146
5.1 时谐电磁场 .....	146
5.1.1 基本场量的复数表示式 .....	146
5.1.2 电磁场基本方程的复数形式 .....	147
5.1.3 电磁场边界条件的复数形式 .....	149
5.1.4 复介电常数和复磁导率 .....	150
5.2 矢量磁位和标量电位 .....	151
5.2.1 矢量磁位和标量电位的定义 .....	152
5.2.2 矢量磁位和标量电位的达朗贝尔方程 .....	152
5.2.3 矢量磁位和标量电位的积分表示式 .....	154
5.2.4 时谐电磁场的矢量磁位和标量电位 .....	157
5.3 坡印亭定理与坡印亭矢量 .....	158
5.3.1 时变电磁场的坡印亭定理与坡印亭矢量 .....	158
5.3.2 时谐电磁场的坡印亭定理与复坡印亭矢量 .....	159
5.4 电基本振子和磁基本振子 .....	162
5.4.1 电基本振子的辐射场 .....	162
5.4.2 磁基本振子的辐射场 .....	168
5.5 对称天线 .....	173

5.5.1	对称天线的辐射场	173
5.5.2	对称半波天线	174
5.6	均匀直线式天线阵的辐射	176
5.6.1	均匀直线式天线阵的辐射场	176
5.6.2	均匀直线式边射阵和端射阵	177
5.7	惠更斯元的辐射	178
5.7.1	闭合面积场源的远区场	178
5.7.2	矩形惠更斯元	180
5.7.3	圆形惠更斯元	182
	习题	183
<b>第6章</b>	<b>均匀平面波的传播</b>	187
6.1	均匀平面波在理想介质中的传播	187
6.1.1	沿着 $z$ 轴方向传播的均匀平面波	187
6.1.2	沿任意方向传播的均匀平面波	195
6.2	均匀平面波在导电媒质中的传播	199
6.2.1	导电媒质中均匀平面波的电磁场	199
6.2.2	均匀平面波在弱导电媒质中的传播	202
6.2.3	均匀平面波在良导电媒质中的传播	203
6.3	均匀平面波对不同媒质分界面的垂直入射	206
6.3.1	均匀平面波对介质平面的垂直入射	206
6.3.2	均匀平面波对导体平面的垂直入射	210
6.3.3	均匀平面波对多层媒质分界面的垂直入射	213
6.4	均匀平面波对不同媒质分界面的斜入射	216
6.4.1	均匀平面波对介质平面的斜入射	216
6.4.2	均匀平面波对导体平面的斜入射	223
	习题	227
<b>第7章</b>	<b>均匀波导中的导行电磁波</b>	230
7.1	导行电磁波的一般分析方法	230
7.1.1	横向场和纵向场的亥姆霍兹方程	231
7.1.2	用纵向场表示的横向场	232
7.1.3	传播模式及其传播特性	233
7.2	矩形波导中的导行电磁波	237
7.2.1	直角坐标系中标量亥姆霍兹方程的通解	237
7.2.2	矩形波导中导行电磁波的传播模式	239
7.2.3	矩形波导中导行电磁波的传播特性	241
7.2.4	矩形波导中若干常用传播模式的场结构	244
7.3	圆形波导中的导行电磁波	248
7.3.1	圆柱坐标系中标量亥姆霍兹方程的通解	248

7.3.2	圆柱形波导中导行电磁波的传播模式	250
7.3.3	圆形波导中导行电磁波的传播特性	252
7.3.4	圆形波导中若干常用传播模式的场结构	254
7.4	传输功率与传输损耗	257
7.4.1	传输功率	258
7.4.2	管壁电流	260
7.4.3	传输损耗	263
7.5	同轴线中的导行电磁波	266
7.5.1	同轴线中的主模	266
7.5.2	同轴线中的高次模	267
7.6	光导纤维中的导行电磁波	269
7.6.1	光导纤维中导行波的特征方程	269
7.6.2	光导纤维中的传播模式及其截止条件	271
	习题	274
<b>第 8 章</b>	<b>均匀传输线中的导行电磁波</b>	<b>277</b>
8.1	均匀传输线中导行电磁波的传播模式	277
8.1.1	均匀传输线中的主模	277
8.1.2	均匀传输线中的高次模	280
8.2	均匀传输线的基本方程及其稳态解	284
8.2.1	均匀传输线的分布参数及其等效电路	284
8.2.2	均匀传输线的基本方程	286
8.2.3	均匀传输线基本方程的稳态解	287
8.2.4	均匀传输线基本方程稳态解的不同表示形式	288
8.3	均匀传输线的特征参数	290
8.3.1	特性阻抗	290
8.3.2	传播常数	292
8.4	均匀传输线的等效阻抗和反射系数	294
8.4.1	等效阻抗	294
8.4.2	反射系数	295
8.4.3	等效阻抗与反射系数的关系	296
8.5	无耗均匀传输线	297
8.5.1	终端接任意负载时的无耗均匀传输线	298
8.5.2	无耗均匀传输线上的行波	301
8.5.3	无耗均匀传输线上的驻波	303
8.6	史密斯圆图	307
8.6.1	复平面上的反射系数圆	307
8.6.2	阻抗圆图	309
8.6.3	导纳圆图	313

---

习题	316
参考文献	320
附录	321
常用的矢量公式	321
常用导体材料的参数	323
常用介质材料的参数	323
常用的物理常数	323
部分习题答案	324

# 第 1 章 矢量分析与场论

电磁理论的一个重要概念就是关于场的概念,例如两个电荷之间的作用力是由于一个电荷与另一个电荷的场相互作用的结果。同时,电磁理论中出现的一些基本物理量有很多都是矢量,例如电场强度  $E$ 、磁场强度  $H$ 、电流密度  $J$  等。并且一些用来描述电磁现象基本规律的方程也都是矢量函数的微分方程或积分方程,例如麦克斯韦方程组。因此,矢量分析和场论是电磁理论的重要数学基础。本章仅讨论在电磁理论中所需要的矢量分析与场论中的基本内容,包括矢量的基本代数运算,场量的梯度、散度、旋度,拉普拉斯运算以及矢量场的恒等式和基本定理。最后,还给出了三种常用坐标系及其梯度、散度、旋度等算子在这三种坐标系中的表示式。

## 1.1 矢量的代数运算

自然科学中的物理量,按其是否具有方向属性来区分,可分为标量和矢量两大类。标量是指只有大小而无方向的物理量,例如长度、质量、时间、电荷、电阻等都是标量。矢量是指既有大小又有方向的物理量,例如力、速度、加速度、电场强度、磁场强度等都是矢量。矢量的代数运算与一般的代数运算有着很大的不同。

### 1.1.1 矢量及其表示法

为便于区别矢量与标量,在本书中矢量均用黑斜体字母表示,例如  $A$ 、 $B$ 、 $E$  等,而标量则用斜体字母表示,例如  $f$ 、 $\Phi$ 、 $U$  等。

#### 1. 矢量与单位矢量

在三维空间中,任意一个矢量  $A$  均可表示为一根有方向的线段。该线段的长度代表矢量  $A$  的大小或模,而该线段的方向代表矢量  $A$  的方向。

如果一个矢量的模等于 1,则该矢量被称为单位矢量。单位矢量既可以用来表示某一个指定方向,例如波的传播方向、各种坐标系中坐标轴的方向等,也可以用来表示某一个矢量的方向。

用来代表矢量  $A$  的方向的单位矢量被写作  $e_A$ 。任意一个矢量  $A$  均可借助代表其大小的模  $A$  和代表其方向的单位矢量  $e_A$  表示成

$$A = e_A A \quad (1.1.1)$$

于是有

$$e_A = \frac{A}{A} \quad (1.1.2)$$

由此可见,矢量  $A$  的单位矢量  $e_A$  是一个方向与该矢量相同而模等于 1 的矢量。



## 2. 矢量表示法

在三维空间,可以利用坐标系将任意一个矢量通过该矢量在三个坐标轴上的投影,即三个分量来表示。

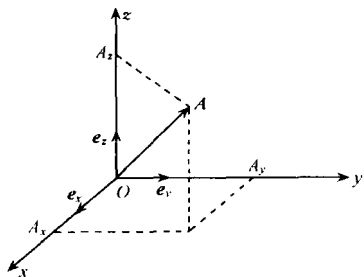


图 1.1.1 矢量及其表示法

以直角坐标系为例,如图 1.1.1 所示,矢量  $\mathbf{A}$  可以表示成一根由坐标原点出发的有方向的线段。设直角坐标系中沿三个坐标轴正方向上的单位矢量分别为  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ , 若矢量  $\mathbf{A}$  在这三个单位矢量方向上的投影,即三个分量分别为  $A_x, A_y, A_z$ , 则矢量  $\mathbf{A}$  可唯一地表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z \quad (1.1.3)$$

矢量  $\mathbf{A}$  的模或大小  $A$  可通过  $\mathbf{A}$  的三个坐标分量

$A_x, A_y, A_z$  表示为

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1.1.4)$$

矢量  $\mathbf{A}$  的单位矢量  $\mathbf{e}_A$  则应为

$$\mathbf{e}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} = \mathbf{e}_x \cos\alpha + \mathbf{e}_y \cos\beta + \mathbf{e}_z \cos\gamma \quad (1.1.5)$$

式中,  $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$  分别为

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} = \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \quad (1.1.6)$$

$$\cos\beta = \frac{A_y}{A} = \frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \quad (1.1.7)$$

$$\cos\gamma = \frac{A_z}{A} = \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \quad (1.1.8)$$

可以看到,  $\alpha, \beta, \gamma$  分别表示矢量  $\mathbf{A}$  与  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴的夹角。事实上,  $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$  正是单位矢量  $\mathbf{e}_A$  在直角坐标系中的三个分量,决定着矢量  $\mathbf{A}$  的方向,故它们被称为矢量  $\mathbf{A}$  的方向余弦,且

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

由此可得

$$|\mathbf{e}_A| = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = 1$$

即单位矢量  $\mathbf{e}_A$  的模等于 1。

在其他的坐标系中,矢量的表示形式和直角坐标系具有类似结果。

## 3. 位置矢量与距离矢量

在三维空间,由坐标原点  $O$  出发引向空间任一点  $P(x, y, z)$  的有方向线段,称为点  $P$  的位置矢量或矢径,用矢量  $\mathbf{r}$  表示。在直角坐标系中,如图 1.1.2 所示,因为位置矢量  $\mathbf{r}$  的三个坐标分量分别为  $x, y, z$ , 故它可以表示为