Gaodeng Shuxue Xuexi Zhidao

高等数学学习指导

主　编　赵迁贵

副主编　张兴永　杨宏晨　王彩侠　逄世友　王萃琦

中国矿业大学出版社

China University of Mining and Technology Press

高等数学学习指导

主　编　赵迁贵
副主编　张兴永　杨宏晨　王彩侠
逄世友　王萃琦

中国矿业大学出版社

内容简介

本书是根据高等数学课程教学大纲基本要求编写的学习指导书，可作为高等数学习题课教学用书，由相应教材各章（上、下册共十二章）的基本要求、内容提要、疑难问题、典型例题、专题讨论和检测试题与参考答案所组成，对精选的疑难问题、典型例题、专题讨论都作了详尽的分析和解答。

本书是《高等数学》的辅助教材，是各大专院校学生学习高等数学的参考书，也可作为考研复习参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/赵迁贵主编. —徐州：中国矿业大学出版社，2009.9

ISBN 978-7-5646-0495-0

Ⅰ.高… Ⅱ.赵… Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 172777 号

书　　名 高等数学学习指导
主　　编 赵迁贵
责任编辑 潘俊成
责任校对 杜锦芝
出版发行 中国矿业大学出版社
（江苏省徐州市中国矿业大学内　邮编 221008）
营销热线 (0516) 83885307　83884995
网　　址 http://www.cumtp.com　**E-mail**：cumtpvip@cumtp.com
排　　版 中国矿业大学出版社排版中心
印　　刷 徐州中矿大印发科技有限公司
经　　销 新华书店
开　　本 787×960 1/16　**印张** 29.75　**字数** 566 千字
版次印次 2009 年 9 月第 1 版　2009 年 9 月第 1 次印刷
定　　价 32.00 元

前　言

高等数学是高等工科院校大学生必修的基础理论课程，是学习后继各专业课程的基础，也是研究生入学数学考试必考的主要基础课程之一，因此学习好这门课程非常重要。

为了提高高等数学的教学质量与水平，也为了有利于因材施教，促进学生个性发展，培养高素质人才，我们根据高等数学教学大纲的基本要求，对本课程的基本内容、基本理论、基本方法与技巧，并注意到学生在学习过程中存在的一些普遍疑难问题，尽最大努力搜集资料，精选编定成本书。其目的在于能及时解惑答疑，同步辅导，全面提高大学生的数学素养。对疑难问题、典型例题本书都给出了详细的分析与解答。对于每一个重点和难点问题都作了评注，以帮助读者加深对基本理论的理解、基本方法与技巧的掌握，并尽可能避免常见错误。在每一章末都有检测试题，可供学生同步练习，并对这些试题做了详尽解答。通过这些试题的演练，读者可以全面捕捉到高等数学的基本内容、重点和难点；我们相信这对于学生掌握基本内容、基本理论、基本方法与技巧一定会收到好的效果。

本书第一、八章由赵迁贵执笔编写，第二、九章由王彩侠执笔编写，第三、十章由张兴永执笔编写，第四、十二章由杨宏晨执笔编写，第五、十一章由逄世友执笔编写，第六、七章由王萃琦执笔编写。在编写过程中经过编者集体多次讨论修改，全书由赵迁贵统稿。

本书编写过程中，中国矿业大学理学院数学系的广大教师提出了许多宝贵意见，特别是得到了担任高等数学课程教学教师的积极支持，他们还提出了不少改进建议，在此我们表示衷心谢意。

限于编者水平所限，难免存在不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

2009 年 9 月

目　　录

第一章　函数与极限

一、基本要求

1．理解函数的概念，能准确地阐述函数的定义，熟练掌握函数值的计算，能列出简单实际问题中的函数关系；

2．了解函数的左、右极限及其函数极限的区别和关系；

3．掌握极限运算的四则运算法则，了解极限存在准则，会用两个重要极限求极限；

4．理解函数在一点连续的概念及闭区间上连续函数的性质，会判别函数的间断点及其类型．

二、内容提要

1．函数

y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$，$x\in D$，x 称为自变量，y 称为因变量，D 为定义域，f 为对应规律，相应 y 的取值范围称为函数的值域．

这里要注意：函数的定义域 D 和对应规律 f 是构成函数的两要素．

2．函数的几种特性

（1）函数的有界性；（2）函数的单调性；（3）函数的奇偶性；（4）函数的周期性．

3．反函数

4．复合函数

5．初等函数

由常数和基本初等函数（幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数）经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数．

6．非初等函数的例

分段函数，符号函数，取整函数等．

7. 数列的极限

定义(ε—N 语言)：

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a \Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N$，当 $n>N$ 时，$\Rightarrow |x_n-a|<\varepsilon$，称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为 $x_n\to a(n\to\infty)$. 如果数列没有极限，就说数列是发散的.

8. 数列子列的收敛性

若 $\{x_n\}$ 收敛于 a，则它的任一子列 $\{x_{n_k}\}$ 都收敛于 a.

9. 函数的极限(ε一语言)

表达式(记号)	任意给定	存在	当…时	恒有
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$\delta>0$	$\|x-x_0\|<\delta$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$
右极限 $f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$\delta>0$	$x_0<x<x_0+\delta$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$
左极限 $f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=B$	$\varepsilon>0$	$\delta>0$	$x_0-\delta<x<x_0$	$\|f(x)-B\|<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$X>0$	$\|x\|>X$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$
$f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$X>0$	$x>X$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$
$f(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=C$	$\varepsilon>0$	$X>0$	$x<-X$	$\|f(x)-C\|<\varepsilon$
(无穷大) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$	$M>0$	$\delta>0$	$\|x-x_0\|<\delta$	$\|f(x)\|>M$
(无穷小) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$	$\varepsilon>0$	$\delta>0$	$\|x-x_0\|<\delta$	$\|f(x)\|<\varepsilon$
显然 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow f(x_0^+)=f(x_0^-)$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Longleftrightarrow f(+\infty)=f(-\infty)=A$				

10. 函数极限的性质

函数极限的唯一性；

函数极限的局部有界性；

函数极限的局部保号性；

函数极限与数列极限的关系：

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在，任意数列 $x_n\neq x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，则

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

11. 无穷小与无穷大的关系

无穷小与无穷大互为倒数，即

若$\lim f(x)=0$，则$\lim\frac{1}{f(x)}=\infty(f(x)\neq 0)$；若$\lim g(x)=\infty$，则$\lim\frac{1}{g(x)}=0$.

12. 无穷小的性质及其结论(在同一变化过程中)

有限个无穷小的和仍是无穷小.

有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.

常数与无穷小的乘积是无穷小.

有限个无穷小的乘积也是无穷小.

函数，极限和无穷小三者的关系

$$\lim f(x)=A\Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$$

其中 $\lim \alpha(x)=0$.

13. 极限的运算法则

定理 1 (极限的四则运算法则)设$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

(2) $\lim f(x)\cdot g(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$；

(3) $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq 0)$.

推论 1 如果 $\lim f(x)$存在，而 c 为常数，则 $\lim[cf(x)]=c\lim f(x)$.

推论 2 如果 $\lim f(x)$存在，而 n 是正整数，则 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$.

推论 3 如果 $\lim f_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$存在，而 n 是正整数，则

$\lim[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]=\lim f_1(x)+\lim f_2(x)+\cdots+\lim f_n(x)$.

推论 4 设 $f(x)\geqslant g(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则 $A\geqslant B$.

定理 2 (复合函数的极限法则)设 $y=f[\varphi(x)]$是由函数 $y=f(u)$与函数 $u=\varphi(x)$复合而成，$f[\varphi(x)]$在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，且存在 $\delta_1>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_1)$时，有 $\varphi(x)\neq a$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a}f(u)=A$$

14. 极限存在准则

准则Ⅰ(夹逼准则) 如果数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$满足下列条件：

(1) $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$；

那么数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

准则Ⅰ′ 设 $g(x)$，$f(x)$，$h(x)$满足条件

(1) $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$；

(2) $\lim g(x)=a$，$\lim h(x)=a$，

则$\lim f(x)$存在，且$\lim f(x)=a$.

准则Ⅱ（单调有界极限存在准则） 单调有界数列必有极限.

15. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；$\lim\limits_{u(x)\to 0}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{u(x)\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=\mathrm{e}$.

16. 无穷小的比较

定义：设 α，β 是同一过程中的两个无穷小，且 $\alpha\neq 0$.

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\begin{cases}0 & \text{就说 }\beta\text{ 是比 }\alpha\text{ 高阶的无穷小，记作 }\beta=o(\alpha)\text{；}\\ \infty & \text{就说 }\beta\text{ 是比 }\alpha\text{ 低阶的无穷小；}\\ C(C\neq 0) & \text{就说 }\beta\text{ 与 }\alpha\text{ 是同阶的无穷小；}\\ 1 & \text{就称 }\beta\text{ 与 }\alpha\text{ 是等价的无穷小，记作 }\beta\sim\alpha.\end{cases}$$

定理（等价无穷小的替代定理）

设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且$\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在，则$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

常用等价无穷小（当 $x\to 0$ 时）：

$$\begin{array}{ll}\sin x\sim x, & \arcsin x\sim x,\\ \tan x\sim x, & \arctan x\sim x,\\ \ln(1+x)\sim x, & \mathrm{e}^x-1\sim x,\\ a^x-1\sim x\ln a, & 1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2},\\ (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x, & \sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{x}{2}.\end{array}$$

利用等价无穷小的替代定理是求极限的重要方法，因此不但要记住以上 10 组等价无穷小，而且要记住它们的一般形式.

如

$$\ln(1+f(x))\sim f(x)\quad(f(x)\to 0).$$

这里要注意，在用无穷小等价代替中，一般情况下，整个分子，整个分母，或分子、分母的乘积的因子可以用等价无穷小代替，不要对加、减中的某一项用等价代替.

17. 函数的连续性等价定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续. 如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0,\exists \delta>0,\text{当}|x-x_0|<\delta\text{时，就有}|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0)=f(x_0^+)\text{（左、右连续）}$$

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续.

18. 连续函数的运算及其初等函数的连续性

定理 1（连续函数的四则运算）　若函数 $f(x)$、$g(x)$ 在点 x_0 处连续，则

$$f(x)\pm g(x),f(x)\cdot g(x),\frac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$$

在点 x_0 处也连续.

定理 2　严格单调的连续函数必有严格单调的连续的反函数.

定理 3（连续函数的复合极限运算）　若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，函数 $f(u)$ 在点 a 连续，则有

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f(a)=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)].$$

定理 4（连续函数的复合函数仍然连续）

设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 也连续.

定理 5　基本初等函数在定义域内是连续的.

定理 6　一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

19. 函数的间断点及其分类

$$\text{间断点}\begin{cases}\text{第一类间断点（可去间断点和跳跃间断点）}\\\text{第二类间断点（无穷间断点和振荡间断点）}\end{cases}$$

20. 闭区间上连续函数的性质

最大值和最小值定理　在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

有界性定理　在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

零点定理　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号（即 $f(a)\cdot f(b)<0$），那么在开区间 (a,b) 内至少有函数 $f(x)$ 的一个零点，即至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使 $f(\xi)=0$，即方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少存在一个实根.

介值定理　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同

的函数值

$$f(a)=A\text{ 及 }f(b)=B$$

那么，对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C(a<\xi<b)$.

推论 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么介于 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上最大值 M 和最小值 m 之间的任意数 c，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=c$.

三、疑难问题

【问题 1.1】 单调函数必有单值反函数，而不单调的函数一定没有单值反函数吗？

答 不一定.

例如，$f(x)=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x+1, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$ 在 $[-1,1]$ 上不单调，但它存在单值反函数：

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

一个函数是否有单值反函数，取决于函数的对应法则 f 在定义域 D 与值域 W 之间是否构成一一对应的关系. 如果是一一对应，那么必有单值反函数；否则就没有单值反函数.

函数在定义区间上单调性只是一种特殊的一一对应关系，因此单调性只是存在单值反函数的充分条件，而不是必要条件.

【问题 1.2】 数列与函数之间有何联系，有何区别？

答 当函数 $y=f(x)$ 的自变量 $x\in(0,+\infty)$ 时，取 x 为 $n(n\in N^{+})$，则 $f(n)$ 成为一数列，记为 $y_n=f(n)$，因此数列是函数的特殊情况，定义域为 N^{+} 的函数即为数列.

有的数列可与定义在 $(0,+\infty)$ 内的函数直接联系，如 $a_n=\dfrac{1}{n}$ 与 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 直接联系.

有的数列不可能与定义在 $(0,+\infty)$ 内的函数联系，如

$$b_n=(-1)^n,c_n=n!$$

【问题 1.3】 下面关于极限的论述是否正确？

(1) 当 n 充分大以后，数列 $\{x_n\}$ 越来越接近于 a，则 $n\to\infty$ 时，数列 $\{x_n\}$ 以 a

为极限.

(2) 如果$\forall \varepsilon>0$,存在正整数N,当$n>N$时,总有无穷多个x_n满足$|x_n-a|<\varepsilon$,则有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

(3) 若对于任意给定的正整数k,总存在正数N,当$n>N$时,所有的x_n均满足$|x_n-a|<10^{-k}$,则有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

答 (1) 不正确.当n充分大以后,数列$\{x_n\}$越来越接近于a,仅表示x_n与a之间的距离逐渐减少,即$|x_n-a|$越来越小,而并非意味着$|x_n-a|$趋于0.例如,$x_n=1+\dfrac{100}{n}$与数0或1之间的距离都可以说逐渐减少,也可以说$x_n=1+\dfrac{100}{n}$越来越接近于0或1,显然0不是$x_n=1+\dfrac{100}{n}$的极限.应当说:当$n\to\infty$时,x_n与a无限接近,要多么接近就有多么接近,则数列$\{x_n\}$以a为极限.因此"越来越接近"与"无限接近"是不同的.

(2) 不正确.$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$的几何意义表示必须满足以下两点:

① $\forall \varepsilon>0$,在$U(a,\varepsilon)$内都有数列$\{x_n\}$的无限多个点;

② $\forall \varepsilon>0$,在$U(a,\varepsilon)$以外最多只有数列$\{x_n\}$的有限多个点.

而题设的条件仅满足①而不满足②,故不能说数列$\{x_n\}$以a为极限.

例如,取$x_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时},\\ n, & \text{当 } n \text{ 为偶数时}.\end{cases}$ $\forall \varepsilon>0$,在$U(0,\varepsilon)$内都有数列$\{x_n\}$的无限多个点,而$\forall \varepsilon>0$,在$U(0,\varepsilon)$以外也有数列$\{x_n\}$的无限多个点.所以0不是数列的极限值.其实$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不存在.

(3) 正确.因为$\forall \varepsilon>0$,总可以取适当的正整数k使$10^{-k}<\varepsilon$,对于上述的k,存在正整数N,当$n>N$时,就有$|x_n-a|<\varepsilon$成立,所以$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

【问题 1.4】 数列极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$定义中的$N=N(\varepsilon)$是不是$\varepsilon$的函数?

答 这里$N=N(\varepsilon)$仅表示N与ε有关,并不表示N是ε的函数.因为对于给定的ε,如果存在一个满足条件的N,就必然有无数多个满足条件的N,不存在N与ε之间的对应规律,$N=N(\varepsilon)$不是ε的函数.

【问题 1.5】 如果$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$对吗?

答 不一定.如果$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$,则有$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=a$.

当$a\neq 0$时,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}=\dfrac{a}{a}=1$,结论成立;

当 $a=0$ 时,结论 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$ 不成立.

例如,数列 $x_n=\frac{2+(-1)^n}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n[2+(-1)^{n+1}]}{(n+1)[2+(-1)^n]}$$

不存在;

又如,数列 $x_n=\frac{1}{a^n}(a>1)$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\neq 1.$$

注 以上各例表明,当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 不一定存在;即使存在,也未必都等于 1.

【问题 1.6】 设 $x_1=1$, $x_{n+1}=1+2x_n(n=1,2,\cdots)$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 有人求解如下:设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,对等式 $x_{n+1}=1+2x_n$ 两边求极限,得 $a=1+2a$,于是 $a=-1$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$,对吗?

答 不对.

因为 $x_1=1, x_2=1+2\times1=3, x_3=1+2\times3=7, x_4=1+2\times7=15,\cdots$,易知数列 $\{x_n\}$ 单调增加,且 $x_{n+1}>x_n>1$,显然不可能有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$.

发生错误的原因是:设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的实质涵义有两点:

① 数列 $\{x_n\}$ 收敛;

② 数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限.

事实上:
$$\begin{aligned}x_n&=1+2x_{n-1}=1+2(1+2x_{n-2})=1+2+2^2x_{n-2}\\&=1+2+2^2(1+2x_{n-3})\\&=1+2+2^2+2^3x_{n-3}\\&=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}\end{aligned}$$

易知 $\{x_n\}$ 无界,故 $\{x_n\}$ 发散, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$,把发散数列当作收敛数列,结果自然会发生错误.

【问题 1.7】 数列 $\{x_n\}$ 与数列 $\{|x_n|\}$ 的收敛性是否相同?

答 不一定.

当数列 $\{x_n\}$ 收敛时,则数列 $\{|x_n|\}$ 收敛,而且当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 时,有 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$;

事实上: $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时, 有 $|x_n-a|<\varepsilon$, 必然

有 $||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|<\varepsilon$.

而数列$\{|x_n|\}$收敛时，数列$\{x_n\}$可能收敛，也可能发散.

例如，$x_n=(-1)^n$，数列$\{|x_n|\}$收敛，而数列$\{x_n\}$发散.

【问题 1.8】 数列$\{x_n\}$与其子数列$\{x_{2n}\}$有何关系?

答 一般的，在数列 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{n_1},x_{n_2},\cdots,x_n,\cdots$ 中，称其任意一个部分数列 $x_{n_1},x_{n_2},x_{n_3},\cdots,x_{n_k},\cdots$(其中 $n_1<n_2<n_3\cdots<n_k<\cdots$)为数列$\{x_n\}$的子数列，简称为子列. 显然 $n_k\geqslant k$，且

$$\lim_{k\to\infty} n_k=\infty.$$

$\{x_{2n}\}$是数列$\{x_n\}$的子数列，例如$\{x_{2n-1}\}$，$\{x_{3n-1}\}$，$\{x_{n^2}\}$等都是数列$\{x_n\}$的子数列，数列$\{x_n\}$本身也是数列$\{x_n\}$的子数列.

数列的子数列的极限有下述定理：

定理(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ 的充分必要条件是数列$\{x_n\}$的任何子数列都以 a 为极限.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$的充分必要条件是数列$\{x_n\}$的任何子数列都有$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=\infty$.

证明 充分性是显然的，因为数列$\{x_n\}$本身也是数列$\{x_n\}$的子数列. 下面证明必要性.

(1) 因为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有$|x_n-a|<\varepsilon$，又因$\{x_{n_k}\}$是数列$\{x_n\}$的一子数列，于是当 $k>N$ 时，有 $n_k\geqslant k>N$，$|x_{n_k}-a|<\varepsilon$ 成立，即$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=a$.

(2) 类似可证$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$，必有$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=\infty$.

注 此定理的必要条件是判别数列$\{x_n\}$发散(或不是∞)的一种有效方法.

例如，数列 $x_n=(-1)^n$ 发散，是因为子列$\{x_{2n}\}$收敛于 1，而子列$\{x_{2n-1}\}$收敛于-1.

【问题 1.9】 如果数列$\{x_n\}$的子列$\{x_{2n}\}$与$\{x_{2n-1}\}$有相同的极限 a，即$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=a$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}=a$，那么是否必有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

答 结论正确. 我们还可以有一般性的结论：

设$\{x_{p_k}\}$，$\{x_{q_k}\}$都是$\{x_n\}$的子列，且$\{p_k\}\cup\{q_k\}=N^+$，

若$\lim\limits_{k\to\infty} x_{p_k}=a$，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{q_k}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

证 $\forall\varepsilon>0$，$\exists K_1\in N^+$，当 $k>K_1$ 时(必有 $p_k>k>K_1$)，有

$$|x_{p_k}-a|<\varepsilon$$

$\exists K_2\in N^+$，当 $k>K_2$ 时(必有 $q_k>k>K_2$)，有

$$|x_{q_k}-a|<\varepsilon$$

取 $N=\max\{K_1,K_2\}$，当 $n>N$ 时，$|x_{p_k}-a|<\varepsilon$ 与 $|x_{q_k}-a|<\varepsilon$ 同时成立，即有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

【问题 1.10】 怎样证明数列发散？

答 证明数列发散的常用方法有两种：

(1) 找出数列 $\{x_n\}$ 的一个发散的子列；

(2) 找出数列 $\{x_n\}$ 的两个具有不同极限的子列，即

$$\lim_{k\to\infty} x_{p_k}=a, \lim_{k\to\infty} x_{q_k}=b, \text{且 } a\neq b.$$

例如，讨论数列 $x_n=\sin\frac{n\pi}{4}$ 的收敛性.

解 因为 $x_{4k}=\sin\frac{4k\pi}{4}=0$，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{4k}=0$，而

$$x_{8k+2}=\sin\frac{(8k+2)\pi}{4}=1, \lim_{k\to\infty} x_{8k+2}=1,$$

且有 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{4k}\neq\lim\limits_{k\to\infty} x_{8k+2}$，所以数列 $x_n=\sin\frac{n\pi}{4}$ 发散.

又如，讨论数列

$$x_n=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{n}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时}\\ n, & \text{当 } n \text{ 为偶数时}\end{cases}$$

的收敛性.

因为 $x_{2k}=2k\to\infty\ (k\to\infty)$，所以数列发散.

【问题 1.11】 怎样证明数列无界？

答 找出数列 $\{x_n\}$ 的一个无界的子列即可.

例如，讨论数列 $x_n=n^{(-1)^n}$ 的无界性.

解 因为 $x_{2k}=2k\to\infty\ (k\to\infty)$，所以给定数列是无界的.

又如，讨论数列

$$x_n=\begin{cases}\sin n, & \text{当 } n \text{ 为奇数时}\\ n, & \text{当 } n \text{ 为偶数时}\end{cases}$$

的无界性.

解 因为 $x_{2k}=2k\to\infty\ (k\to\infty)$，所以给定数列是无界的.

【问题 1.12】 怎样证明数列不是无穷大？

答 证明数列不是无穷大的常用方法有两种：

(1) 找出数列 $\{x_n\}$ 的一个收敛的子列；

(2) 找出数列 $\{x_n\}$ 的一个有界的子列.

例如，证明数列 $x_n=2^{(-1)^n\cdot n}$ 不是无穷大.