数理逻辑基础

陈洪陶　朱绍文　编著

兰州大学出版社

数理逻辑基础

陈洪陶　朱绍文　编著

兰州大学出版社

1990·兰州

数理逻辑基础

陈洪陶　朱绍文　编著

数理逻辑基础

陈洪陶　朱绍文　编著

兰州大学出版社出版

（兰州大学校内）

中科院近物所科技印刷厂印刷　甘肃省新华书店发行

开本：787×1092毫米　1/32　印张：3

1990年10月第1版　1990年10月第1次印刷

字数：63千字　印数：1—2000册

ISBN7-311-00844 X/O·55　定价：1.05元

引　言

数学逻辑是用数学方法研究形式逻辑中推理的规律。形式逻辑是从形式方面来研究概念、判断、推理等思维形式的结构和规律；数学方法主要是指引进一套符号体系的方法。在数理逻辑讨论中，将引进一整套的符号体系，并采用这套符号体系来研究形式逻辑中的推理规律，因此数理逻辑又称为符号逻辑或者数学逻辑。

数理逻辑是计算机科学的理论基础。无论是数字电子计算机的雏型—图灵机，还是设计数字电子计算机的数学工具—布尔代数；无论是作为计算机科学的核心—算法，还是作为程序设计的工具—语言；无论是程序设计的方法学，还是计算复杂性的理论，都要涉及到数理逻辑。难怪人们把电子计算机看作是数理逻辑和电子学结合的产物。作为电子计算机科学系的学生，必须掌握数理逻辑这门重要的基础理论。

数理逻辑涉及的内容很广，主要包括逻辑推演、证明论、递推论、模型论和公理集合等，其中与计算机科学最密切的内容有逻辑演算和递推论。递推论是能行可计算性理论，它在理论上解决电子

计算机能计算哪些函数。逻辑演算是本课程所要介绍的重点内容，这是因为，它不仅在计算机科学各方面有着广泛的应用，而且在于它的一整套研究方法—公理化方法，对培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、严格的分析问题的能力都起着重要的作用。

证明论：主要指研究数学理论系统的相容性（不矛盾性、协调性）。

模型论：主要指对各种数学理论系统建立模型，并研究各模型之间的关系以及模型与系统之间的关系等。

公理集合论：是在消除已知集合论中悖论的情况下，用公理方法把有关集合理论充分发展下去。

目录

引　言

第一章　命题演算……………………………………（1）

§1·1　命题与命题联结词……………………………（1）

§1·2　命题公式………………………………………（8）

§1·3　命题公式的等价关系…………………………（12）

§1·4　置换律和对偶律………………………………（16）

§1·5　永真公式的蕴含………………………………（21）

§1·6　命题联结词的扩充及其功能充备集…………（26）

§1·7　范式……………………………………………（32）

§1·8　命题演算演绎推理……………………………（40）

第二章　谓词逻辑……………………………………（50）

§2·1　个体与谓词……………………………………（51）

§2·2　量词……………………………………………（53）

§2·3　自由变换和约束变元…………………………（56）

§2·4　谓词公式的等价关系和永蕴关系……………（59）

§2·5　谓词演算的演绎推理举例……………………（68）

习题……………………………………………………（69）

习题一……………………………………………………（69）

习题二……………………………………………………（81）

第一章 命题演算

本章主要讨论命题、命题联结词、命题公式、命题公式的等价关系、命题公式的永真蕴涵关系、范式以及命题演算的演绎理论等基本概念和基本理论。

§1·1 命题与命题联结词

命题和命题联结词是数理逻辑两个最基本的内容，也是命题逻辑中研究的主要内容，本课程就从这两个概念开始研究。

§·1·1·1 命题与命题符号

凡是可以分辨其真假的语句就叫做命题。显然任何一句具有真假意义的话都可认为是命题（Rroposition）。

如："兰州市是甘肃省的省会所在地"是命题，而且是"真"的；"煤球是白的"也是命题，但它却是"假"的。然而，象"去你的！"，"好极了！"，"你身体好吗？"这样一些纯粹的祈使句、感叹句和疑问句，是无法分辨它们是真还是假的，它们不是命题。一般说：只有陈述句才可能作为命题。

判断一个句子是不是命题，就应该弄清楚该句所表述的内容是否直接肯定什么或否定什么，如果确有这种肯定或否

定的语句，就是命题；如果没有这种肯定或否定，而是含糊不清的语句，就不算命题。在实际中，判断一个语句是真还是假，有时也不容易。常会与人的思想感情、语句所处环境、判断标准、认识程度等有关。如“这出戏好看”这一命题，其真假会因人的看法不同而不同。又如“1＋111＝1000”这一命题，当它表示二进制系统时为“真”，而当它表示十进制系统时，是“假”的。另外还有一种命题，目前是无法判断其真假的。如“其它星球有人”这一命题，目前就无法解决它的真假问题。一些言者信誓旦旦，听者恍恍惚惚，是真是假，，难以判断的传说，如“马可·波罗到过日本”① 这一命题，至今还未弄清它的真假。但是我们应该清楚，对一个陈述语句，不管是否“已知其真假”，不管对语句真假的判断如何，只要这语句本身的确存在真假的判断，这样的语句就应算是命题。

一个命题只能取“真”、“假”两种情况之一。如果命题为“真”，称之为真命题或者说命题的取值为“真”。如果命题是假的，称之为假命题，或者说命题的取值为“假”。命题的值就是指命题的真假性，简称“真值”。内容不同的命题，其真值可能相同。如“中国的首都是北京”，“兰州大学在兰州市”，这两个命题都是真的，但表达的内容却不同。

关于命题的符号，至今没有统一的规定，本课程以小写的希腊字母α、β、γ、δ等表示命题，而命题的真假值分别用“T”和“F”表示。

---

①《日本五大荒诞传说》，《参考消息》1987年8月29日第三版。

§1·1·2· 命题联结词

命题演算中，涉及两类命题，一类是原子命题(Atomic Statement/原始命题)①，另一类是复合命题(Compound Proposition/分子命题/Molecular)。不含联结词的最简单命题称为原子命题，按一定规则将原子命题用联结词联结后，就构成了复合命题。下面我们先介绍五个重要的命题联结词。

1.否定词(Negation/否定运算/否定算子)

利用此联结词可将命题α组成复合命题"非α"，记作："$\neg\alpha$"("$\bar{\alpha}$"/$\sim\alpha$)，称为命题α的否定，"$\neg$"("$-$"/"$\sim$")称为否定词。其$\neg\alpha$与α的真假关系定义为：

$\neg\alpha$真当且仅当α假。

也可以用表1.1.1来表示。

表1.1.1 否定词定义

α	$\neg\alpha$
T	F
F	T

2.合取词(Conjunction/合取运算/积运算/合取算子)

利用此联结词可以将命题α、β组成一个复合命题"α且β"，记作"$\alpha\wedge\beta$"(k$\alpha\beta$"/"$\alpha\cdot\beta$"/"$\alpha\&\beta$")，称为α与β的合取式，α、β均称为合取式$\alpha\wedge\beta$的合取项，"$\wedge$"称为合取词。其"$\alpha\wedge\beta$"与α、β之间的真假关系定义为：

$\alpha\wedge\beta$真　　当且仅当　　α、β均真

也可以用表1.1.2来定义。

---

①斜线"/"代表或者，本课程中常用。

3.析取词（Disjunction/析取运算/和算子/析取算子）

利用此命题联结词可将两命题α、β组成一个复合命题"α或β"，记作："α∨β"（α+β），称为α与β的析取式，α、β均称为α∨β的析取项，"∨"称为析取词，其α∨β与α、β的真假之间的关系定义为：

α∨β假　当且仅当　α、β均假

也可用表1.1.3来定义。

表1.1.2　合取词定义表

α	β	α∧β
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

表1.1.3　合取词定义表

α	β	α∨β
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

4.条件词（Conditional/条件式/蕴含词）

利用此联结词可将α、β两个命题组成一个"如果α，则β"的复合命题。记作"α→β"（"c∝β"/"α⊃β"），称α蕴含β的蕴含式，其中α称"α→β"蕴含式的前件，β称"α→β"蕴含式的后件。在逻辑上说前件是后件的充分条件，后件是前件的必要条件。符号"→"称为蕴含词，某α→β与α、β之间的真假关系定义为：

α→β假　当且仅当　α真且β假

也可以用表1.1.4来定义。

5.双条件词（Biconditional/等价词）

利用此联结词可将命题α、β组成“α当且仅当β”的一个复合命题，记作：“$\alpha\longleftrightarrow\beta$”（“$\alpha\equiv\beta$”），称为α与β的等价式，α、β称为等价式$\alpha\longleftrightarrow\beta$的两端，符号“$\longleftrightarrow$”一般称为等价词。其“$\alpha\longleftrightarrow\beta$”的真假与α、β的真假之间的关系定义为：

$\alpha\longleftrightarrow\beta$为真　当且仅当　α与β同真假

也可用表1.1.5来定义。

表1.1.4　蕴含词定义表

α	β	$\alpha\rightarrow\beta$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

表1.1.5　等价词定义表

α	β	$\alpha\longleftrightarrow\beta$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

上述所介绍的五个命题联结词，一般我们可以看作是自然语言的一种抽象、一种模型。但是它与自然语言还是有差别的，为了说明这一点，先让我们看几个例子。

例1·1·1　设原子命题为：

α：今天下雨。

β：今天下雪。

γ：明天我们有空闲时间。

δ：明天我去看你。

于是，有如下复合命题：

$\neg\alpha$：今天不下雨。　　　　　　　　（1·1·1）式

$\alpha \wedge \beta$：今天雨雪交加。 （1·1·2）式

$\alpha \vee \beta$：今天下雨或下雪。 （1·1·3）式

$\gamma \rightarrow \delta$：如果明天我有空，那么我明天一定去看你。

$\gamma \longleftrightarrow \beta$：只有当明天我有空时，我才能去看你。

例1·1·2 设原子命题为：

α：三角形ABC是等腰三角形。

β：三角形ABC有两个相等的角。

γ：$\angle A=90^\circ$。

δ：$\angle B+\angle C=90^\circ$。

于是，有如下复合命题：

$\alpha \rightarrow \beta$：如果三角形ABC是等腰三角形，则三角形ABC必有两个相等的角。 （1·1·4）式

$\alpha \longleftrightarrow \beta$：三角形ABC是等腰三角形，当且仅当三角形ABC有相等的两个角。 （1·1·5）式

$\gamma \rightarrow \delta$：如果$\angle A=90^\circ$，则$\angle B+\angle C=90^\circ$ （1·1·6）式

例1·1·3 设原子命题为：

α：今天刮风。

β：我会骑马。

γ：鲁迅是人民的孺子牛。

δ：$2+3=5$

于是，$\alpha \wedge \delta$：今天刮风且$2+3=5$ （1·1·7）式

$\alpha \rightarrow \beta$：如果今天刮风，那么我会骑马。（1·1·8）式

$\gamma \rightarrow \delta$：如果鲁迅是人民的孺子牛，则$2+3=5$ （1·1·9）式

$\alpha \longleftrightarrow \beta$：只有当$2+3=5$，今天才会刮风。

结合以上几例，我们不难得出使用命题联结词应注意的

以下几点。

1）许多自然语言可用命题、命题联结词这样一些符号来表示，用这些符号表达的语言称为形式语言，这种形式语言中的命题联结词在自然语言中的表达方式极其繁多。如，

否定词可表达：非、不、无、不是、不成立、没有、not等。

合取词可表达：且、和、与、及、又、并且、同时、以及、不但……而且……、既……又……、尽管……仍然、虽然……但是、and等。

析取词可表达：或、或者、可能、or等。

蕴含词可表达：如果……则……、当……、则……、如果……那么……、假若……那么……、只要……就……、if……then……等。

等价词可表达：当且仅当、充要条件、相同、相等、一样、if and only if（iff）等。

由于命题联结词在自然语言中的表达方式可以不同，因此由自然语言翻译成形式语言。首先应弄清语言的含义，绝不能从自然语言的形式上去生搬硬套。

2）命题联结词与之表达的自然语言，在使用上，既有统一的一面，相当的一方，又有区别。

i）象例1·1·3，两个风马牛不相及、毫无逻辑关系的命题，在数理逻辑中可用命题联结词将它们组成合理的复合命题，这在自然语言中却是不允许的。一般来说，在自然语言中，且、and等是用来表示同类事物的并列关系，蕴含的前件与后件应有必然的因果关系，但命题联结词“$\wedge$”、“$\rightarrow$”却无此限制。

ii）析取词“V”只表示“可兼的或”。在自然语言中，或、or既可表示“可兼的或”也可表示“不可兼的或”。如，“今天下雨或下雪”是“可兼的或”，它表达了今天可能下雨，也可能下雪，还可以表达今天又下雨又下雪。如，明天上午8时，我在家或在兰州大学新文科楼301教室上课”，是“不可兼的或”，因为要么我在家，要么我在上课，决不会两者同时发生。

3）还有两个应注意的问题：i）命题联结词是命题与命题之间的联结词，而不是命题内部名词或形容词之间的联结词。如“李红和张详都是好学生”，这个命题中的“和”仅表达两个名词之间的联结关系，不是命题联结词。ii）逻辑演算中，关于复合命题的真假，只能按命题联结词的定义去理解，而不能仅根据自然语言的意思去理解。如蕴含式，前件真，后件真，蕴含式必真；前件真、后件假，蕴含式必假；但前件假，则不管后件是真还是假，蕴含式均真，这就是逻辑学中所谓的实质蕴涵。

§1·2 命题公式

命题演算中，命题本身所包含的内容是不被注意的，而只注意命题的真假；联结词只承认它的定义，而不去理会它的实际意义。命题的演算类似数的运算，它也有常值命题，即已知其真假。然而任何一个抽象原子命题，我们只知道它有“真”、“假”二值。当它没有确指时（没有赋于具体的真假），这个原子命题是一个变域为“真”、“假”二值的变量，通常称为命题变元（命题变量/命题变项/变目）。由命

题变元、命题联结词适当地加上括号所组成的字符串(String)就构成了命题公式(适合公式/wff/公式)。下面我们用递归方法——产生式的方法来严格地定义命题公式。

定义1·2·1　1.)T.F和命题变元是公式(wff);

2)如果α是公式，则$(\neg\alpha)$也是公式(wff)。

3)如果α和β是公式，则

$(\alpha\wedge\beta)$，$(\alpha\vee\beta)$，$(\alpha\rightarrow\beta)$，

$(\alpha\leftrightarrow\beta)$也是公式(wff);

4)有限步使用1)、2)、3)所生成的公式是(wff)。

由定义2·1可知，下列字符串，都是公式。

$(\neg(\alpha\wedge\beta))$，

$(((\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\delta\rightarrow\gamma))\leftrightarrow(\alpha\wedge\beta))$

$((\alpha\wedge\gamma)\rightarrow((\neg\beta)\vee(\theta\leftrightarrow\gamma)))$。

而下列字符串，都不是公式。

$\neg\alpha\vee\beta$　　$(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\wedge\beta)$

(短缺最外层括号)(缺外层括号且$(\wedge\beta)$不是公式)

$(\alpha\wedge\beta\rightarrow\beta)$

(缺最左边括号)

为了节省公式中的括号，通常又作如下规定:

1)公式$(\neg\alpha)$的括号可以省去。

2)整个公式的最外层括号可以省去。

3)五种联结词运算的优先级规定为如下递减

$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$

由以上三个附加规定，则$\neg\alpha\vee\beta$、$\alpha\rightarrow\beta$、$\alpha\wedge\neg\beta$都可认为是公式。

命题公式类似于数学分析中的函数表达式或算术表达式，故在程序语言中把命题公式也称作命题表达式或逻辑表达式。由于命题公式的定义域只有“真”、“假”二值，而且值域也只有“真”、“假”二值，在泛涵、算子这类概念出现之前，把它取名为真值函数。

若命题公式α由n个不同的命题变元α_1，α_2，…，α_n所组成，则称α为n元公式，$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$称为$\alpha$的命题变元组。$\alpha$的真假是由命题变元组$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$的任一组确定真值唯一确定。命题变元组中象$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$这样一组确定的真值叫做命题公式$\alpha$关于命题变元组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$的一个完全指派，或称指派或解释。如果仅对命题变元组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$的部分变元$\{v_1, v_2, \cdots, v_j\}$，$j<n$，赋以确定的值，而剩下的没有赋以确定值，变元组中象这样一组只有部分的确定值，称为命题公式α关于命题变元组$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$的一个部分指派。凡使命题公式取真（T）的指派，不管是完全指派还是部分指派都称为成真指派。凡使命题公式取假（F）的指派，不管是完全指派还是部分指派都称为成假指派。

n个不同命题变元组成的n元公式，共有2^n个完全指派（简称指派）。任何一个完全指派都对应于公式的一个唯一的确定值。因此，只要找出这2^n个完全指派，并对每个完全指派，都按照先括号、后联结词、联结词按优先级运算顺序，结合命题联结词的定义，逐步运算，便可得到命题公式相对于指派的值。这种方法，若用表格来描述，这种表格

就称为真值表。前节中表1.1.1～表1.1.5都是真值表。如命题公式$\alpha\wedge(\alpha\rightarrow\beta)\vee\beta$，可用表1.2.1所示的真值表来表示命题公式的值与变元组每个完全指派之间的关系。

表1.2.1　命题公式$\alpha\wedge(\alpha\rightarrow\beta)\vee\beta$之真值表

α	β	$\alpha\rightarrow\beta$	$\alpha\vee(\alpha\rightarrow\beta)$	$\alpha\wedge(\alpha\rightarrow\beta)\vee\beta$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

由真值表可以很清楚地看到命题变元组的每个指派与命题公式取值之间的对应关系。如果我们完全保持真值表中各命题变元之间以及命题变元与命题公式之间相互位置，则可把真值表一一对应地写成矩阵形式，如表1.2.2所示。这种矩阵称为真值函数矩阵。矩阵最后一列就是命题公式在各种完全指派下的取值。矩阵每一行，除最后一个元素外，就是一个完全指派，最后这个元素，正是这个完全指派下所唯一确定的命题公式取值。

表1.2.2　命题公式$\alpha\wedge(\alpha\rightarrow\beta)\vee\beta$

真值函数矩阵

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \text{公式取值} \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} T & T & T \\ T & F & F \\ F & T & T \\ F & F & F \end{pmatrix}$$

命题公式种类很多，在逻辑研究中，一种特殊的命题公式—永真函数/永真命题/重言式）占有特殊地位。

定义1·2·2　如