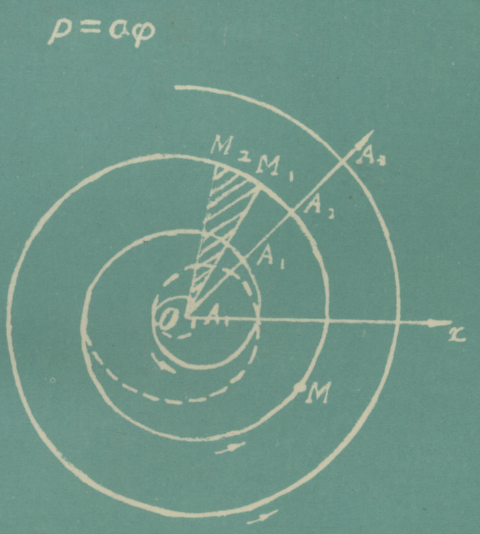
高等学校教材

高等数学

郭运瑞　张万琴　主编



天津科学技术出版社

高 等 数 学

主　编　郭运瑞　张万琴

副主编　陈荣江　孙用明　王宗申

肖泽昌　秦道岭　李培禄

编　委　（按姓氏笔划为序）

王守忠　王宗申　孙用明　李　锐

李培禄　刘利敏　肖泽昌　陈荣江

张万琴　郭运瑞　秦道岭

主　审　王天泽

天 津 科 学 技 术 出 版 社

津新登字(90)003号

责任编辑：周喜民 徐玉兰

高等数学

郭运瑞　张万琴　主编

*

天津科学技术出版社出版、发行
天津市张自忠路 189 号　邮编 300020
河南省封丘县印刷厂印刷

*

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 13 字数 382 千字
1995 年 9 月第 1 版
1995 年 9 月第 1 次印刷
印数：1－3000

ISBN 7－5308－1939－9
R・532　定价：13.90 元

前　　言

高等数学是高等院校的一门重要的基础课，它为学生学习专业基础课、专业课以及从事生产实践奠定必要的基础。为了适应我国教育改革和四化建设的需要，我们主要依据农、林、牧、商等专业的教学大纲，组织编写了这本《高等数学》教材。

本教材共分八章。内容包括：函数的极限与连续、一元函数的微积分及其应用、多元函数的微分法、二重积分、微分方程。各章后面配有习题，书末附有习题答案及几种常用曲线、积分表。讲授这本《高等数学》教材需要90～100学时。

在本教材编写的过程中，编者根据多年的教学经验，紧密结合教学实际，精选内容、适当编排，使教材深入浅出，通俗易懂，并适当反映近年来《高等数学》在教学和科研实践中的最新成果。本教材体现了四个特点：淡化某些繁杂形式，摆脱纯数学圈子的束缚，注重核心内容，但简而不略；采用直观形象、逐步介绍各种方法和技巧的方式；增加了经济类学科应用中的有关内容，增强了教材的适用性；采用现代数学符号系统，渗透现代数学的思想和方法。

本教材主要作为农、林、牧、商等专业的《高等数学》教材，也可作为师专、教育学院、职大、电大等有关专业的《高等数学》教材和参考书。

本教材由河南大学、河南职业技术师范学院、南阳理工学院、

濮阳教育学院、南阳师范专科学校、开封师范专科学校、新乡师范专科学校共同编写。在编写的过程中，得到了各参编院校有关领导的大力支持和帮助，在此表示衷心感谢！本书编写过程中，许昌师专的张德泉也作了部分工作。

本书曾请河南大学教学系的王天泽教授担任主审，对此我们全体参编人员由衷地表示感谢！

由于编者水平有限，时间紧迫，教材中难免出现错漏之处，敬希读者批评指正。

编　者

1995年5月

目　　录

第二章　导数与微分

第三章 微分中值定理与导数的应用

第四章　不定积分

第五章　定积分

第六章　多元函数的微分法

第七章 重积分

第八章 微分方程

第一章　函数与极限

数学是研究现实世界中的空间形式和数量关系的科学. 初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学则是以变量为研究对象的一门学科. 所谓函数关系就是变量之间的依赖关系，而极限方法则是研究变量的一种基本方法. 本章将系统地介绍变量、函数、极限和连续等基本概念，以及它们的性质.

§1.1　函数的概念

一、常量与变量

当我们研究或观察某种自然现象或技术过程时，常常会遇到各种不同的量，其中有些量在整个现象或过程中，始终保持一定的数值而不起变化，这种量叫做常量；而另外有些量可取各种不同的数值，即有变化，这种量叫做变量.

例如，物体做自由落体运动时，物体的质量保持不变，是常量；但物体下落的速度和距离都在变化，是变量.

需要注意，一个量是常量或变量，都是指在某一确定的现象或过程中来说的，同一量在不同情况下可能是不同的量.

例如，对圆的面积 S 来说，若圆的半径给定，则 S 就是定值，是常量；若圆的半径可以取各种不同的值，即取变量时，则 S 又是变量了.

通常用字母 a、b、c 等来表示常量，用字母 x、y、z 等表示变量.

二、区间与邻域

区间是本书最常用的一类数集. 设 a 和 b 都是实数，且 a ＜ b，

则称数集 $\{x|a<x<b\}$ 为开区间，记作 (a,b)；数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$；数集 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 和 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 都称为半开区间或半闭区间，分别记作 $[a,b)$ 和 $(a,b]$，a 和 b 称为上述区间的端点.

以上这些区间都称为有限区间. 数 $b-a$ 称为这些区间的长度.

根据实数集与数轴上点的一一对应关系，这些有限区间在数轴上的几何表示为有限线段. 如开区间 (a,b) 与闭区间 $[a,b]$ 在数轴上表示出来，分别如图 1.1(a) 与(b) 所示.

(a)　　　　(b)

图 1.1

除以上谈到的有限区间外，还有无限区间，引进符号 $+\infty$(读作正无穷大) 及 $-\infty$(读作负无穷大)，则可类似地表示无限区间，例如，满足关系式 $x\geqslant a$ 的全体实数，用区间 $[a,+\infty]=\{x|x\geqslant a\}$ 表示；满足关系式 $x<a$ 的全体实数，用区间 $(-\infty,a)=\{x|x<a\}$ 表示. 读者可类似地定义区间 $(a,+\infty)$ 和 $(-\infty,a]$. 全体实数的集合也可写成区间形式，即

$$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}.$$

有了区间的概念，我们进一步介绍邻域的概念. 设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，则称数集 $\{x||x-a|<\delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$. 点 a 叫做这邻域的中心，δ 叫做这邻域的半径.

因为 $|x-a|<\delta$ 相当于 $-\delta<x-a<\delta$ 即 $a-\delta<x<a+\delta$，所以邻域 $U(a,\delta)$ 也就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$，该区间以点 a 为中心，而长度为 2δ(如图 1.2).

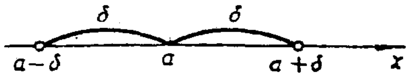


图 1.2

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉，点 a 的邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心的 δ 邻域，记作 $U(\hat{a},\delta)$，即

$$U(\hat{a},\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}.$$

三、函数的概念

先考虑几个例子.

例 1　自由落体运动的路程 s 与时间 t 由

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

联系着，t 的值确定了，s 的值就随之确定. 设落体着地的时刻为 T，则当 t 取 0 到 T 之间任何值时，由上式就可以确定 s 的相应值.

例 2　在气象观测站的百叶箱内气温自动记录仪把某一天的气温变化描绘在记录纸上，如图 1.3 所示的曲线. 根据这个图，我们就能知道这一天内时间 t 从 0 点到 24 点气温 T 的变化情形.

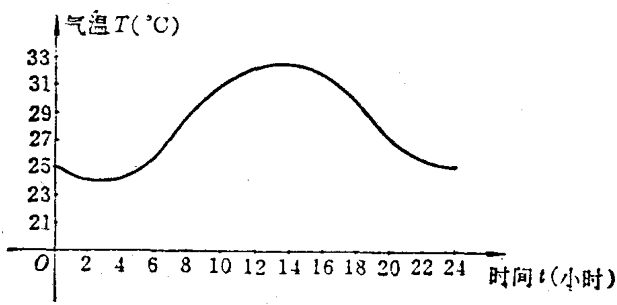


图 1.3

上面的例子都反映了在同一过程中有两个有联系的起着变化的量，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，按照一定的法则，另一个变量就有确定的值与之对应，两个变量之间的对应关系就是函数概念的实质.

定义　**给定两个非空实数集D、M，如果对于每个数 $x \in D$，按照一定的法则f总有唯一的数 $y \in M$ 与它对应，则称对应法则f是确定在数集D上的函数，简称 y 是 x 的函数. 记作 $y = f(x)$. 其中数集D称为函数的定义域，x 称为函数的自变量，y 称为函数的因变量.**

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的函数值，记作 $f(x_0)$. 全体函数值的集合

$$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\} \subset M$$

称为函数的值域.

由上述定义知，决定一个函数必须知道定义域D、对应法则f和函数值所在集合M. 函数值是由 $x \in D$ 通过f而唯一确定的实数，通常总是把M取为全体实数的集合R. 于是定义域D和对应法则f就成为确定函数的两个要素. 从而记号

$$y = f(x), x \in D$$

也就表达了一个实值函数. 如果一个函数的对应法则可以用数学式子来表达，则其定义域就是使这一式子有意义的一切实数值，如式子 $y = \sqrt{\lg x}$ 所表示的函数，其定义域是指 $D = \{x \mid x \geqslant 1\}$.

关于函数概念，有以下几点值得注意.

1. 两个函数相同，是指它们的定义域和对应法则分别相同.

2. 在函数的定义中，对每一个 x，只能有唯一的一个 y 与它对应，这种函数称为单值函数. 若允许同一 x 值可以和不止一个 y 值相对应，则称它为多值函数. 以后没有特别说明时，函数都是指单值函数.