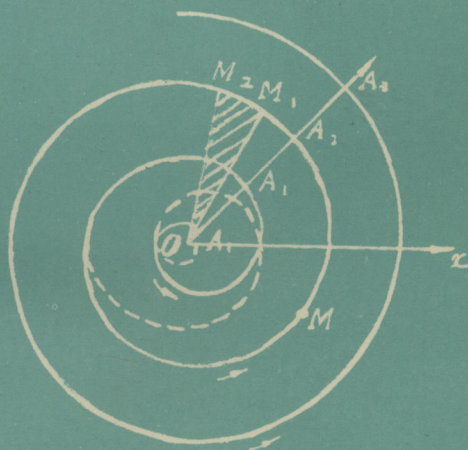


高等学校教材

高等数学

郭运瑞 张万琴 主编

$$\rho = a\varphi$$



天津科学技术出版社

高等数学

主 编 郭运瑞 张万琴

副主编 陈荣江 孙用明 王宗申
肖泽昌 秦道岭 李培禄

编 委 (按姓氏笔划为序)

王守忠 王宗申 孙用明 李 锐
李培禄 刘利敏 肖泽昌 陈荣江
张万琴 郭运瑞 秦道岭

主 审 王天泽

天津科学技术出版社

津新登字(90)003号

责任编辑: 周喜民
徐玉兰

高等数学

郭运端 张万琴 主编

*

天津科学技术出版社出版、发行
天津市张自忠路189号 邮编 300020
河南省封丘县印刷厂印刷

*

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 13 字数 382 千字
1995年9月第1版
1995年9月第1次印刷
印数: 1—3000

ISBN 7-5308-1939-9
R·532 定价: 13.90元

前 言

高等数学是高等院校的一门重要的基础课,它为学生学习专业基础课、专业课以及从事生产实践奠定必要的基础。为了适应我国教育改革和四化建设的需要,我们主要依据农、林、牧、商等专业的教学大纲,组织编写了这本《高等数学》教材。

本教材共分八章。内容包括:函数的极限与连续、一元函数的微积分及其应用、多元函数的微分法、二重积分、微分方程。各章后面配有习题,书末附有习题答案及几种常用曲线、积分表。讲授这本《高等数学》教材需要 90~100 学时。

在本教材编写的过程中,编者根据多年的教学经验,紧密结合教学实际,精选内容、适当编排,使教材深入浅出,通俗易懂,并适当反映近年来《高等数学》在教学和科研实践中的最新成果。本教材体现了四个特点:淡化某些繁杂形式,摆脱纯数学圈子的束缚,注重核心内容,但简而不略;采用直观形象、逐步介绍各种方法和技巧的方式;增加了经济类学科应用中的有关内容,增强了教材的适用性;采用现代数学符号系统,渗透现代数学的思想和方法。

本教材主要作为农、林、牧、商等专业的《高等数学》教材,也可作为师专、教育学院、职大、电大等有关专业的《高等数学》教材和参考书。

本教材由河南大学、河南职业技术师范学院、南阳理工学院、

濮阳教育学院、南阳师范专科学校、开封师范专科学校、新乡师范专科学校共同编写。在编写的过程中,得到了各参编院校有关领导的大力支持和帮助,在此表示衷心感谢!本书编写过程中,许昌师专的张德泉也作了部分工作。

本书曾请河南大学教学系的王天泽教授担任主审,对此我们全体参编人员由衷地表示感谢!

由于编者水平有限,时间紧迫,教材中难免出现错漏之处,敬希读者批评指正。

编 者

1995年5月

目 录

第一章 函数与极限

§ 1.1 函数的概念	(1)
一、常量与变量	(1)
二、区间与邻域	(1)
三、函数的概念	(3)
四、函数的表示法	(5)
§ 1.2 函数的几种特性	(6)
一、函数的有界性	(6)
二、函数的单调性	(6)
三、函数的奇偶性	(7)
四、函数的周期性	(7)
§ 1.3 初等函数	(8)
一、反函数	(8)
二、复合函数	(9)
三、初等函数	(10)
§ 1.4 经济学中的常用函数	(11)
一、需求函数	(11)
二、供给函数	(12)
三、生产函数	(13)
四、成本函数	(13)
五、收益函数	(13)
六、利润函数	(14)
§ 1.5 数列与函数的极限	(14)

一、数列的极限·····	(16)
二、函数的极限·····	(18)
§ 1.6 无穷小量与无穷大量·····	(24)
一、无穷小量·····	(24)
二、无穷小量的运算定理·····	(25)
三、无穷大量·····	(26)
四、无穷小量的比较·····	(27)
§ 1.7 函数极限的运算法则·····	(28)
一、函数的和、差、积、商的极限·····	(28)
二、利用无穷小量的性质求极限·····	(31)
§ 1.8 极限存在准则 两个重要极限·····	(33)
§ 1.9 函数的连续与间断·····	(37)
一、函数的连续性·····	(37)
二、函数的间断点·····	(39)
三、连续函数的运算法则·····	(42)
四、初等函数的连续性·····	(43)
§ 1.10 闭区间上连续函数的性质·····	(44)
第一章 习题·····	(47)

第二章 导数与微分

§ 2.1 导数的概念·····	(53)
一、引 例·····	(53)
二、导数的定义·····	(56)
三、求导举例·····	(57)
四、函数的可导性与连续性的关系·····	(59)
五、导数的几何意义·····	(60)
§ 2.2 简单函数的导数·····	(61)

一、常数的导数	(61)
二、幂函数的导数	(61)
三、正弦函数的导数	(62)
四、对数函数的导数	(62)
§ 2.3 导数的运算法则	(63)
§ 2.4 复合函数的导数	(66)
§ 2.5 反函数的导数	(69)
一、反函数的导数	(69)
二、基本导数公式	(71)
§ 2.6 高阶导数	(72)
§ 2.7 隐函数的导数	
由参数方程所确定的函数的导数	(76)
一、隐函数的导数	(76)
二、参数方程所确定的函数的导数	(78)
§ 2.8 微分及其应用	(81)
一、微分的概念	(81)
二、微分的几何意义	(83)
三、基本微分公式和微分运算法则	(84)
四、微分在近似计算和误差估计中的应用	(87)
§ 2.9 导数在经济分析中的应用	(91)
一、边际分析	(91)
二、弹性分析	(93)
第二章 习题	(98)

第三章 微分中值定理与导数的应用

§ 3.1 微分中值定理	(104)
一、罗尔定理	(104)

二、拉格朗日中值定理	(107)
三、柯西中值定理	(110)
§ 3.2 未定式的极限	(111)
一、 $\frac{0}{0}$ 型未定式	(112)
二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	(115)
三、其它形式的未定式	(116)
§ 3.3 泰勒定理及其应用	(118)
一、泰勒定理	(118)
二、几个初等函数的泰勒公式	(121)
三、泰勒公式的应用	(123)
§ 3.4 函数的单调性与极值	(125)
一、函数单调性的判别法	(125)
二、函数的极值	(127)
三、最大值和最小值的求法	(131)
§ 3.5 函数图形的描绘	(134)
一、曲线的凸凹性与拐点	(134)
二、曲线的渐近线	(137)
三、函数的作图	(138)
§ 3.6 方程的近似解	(141)
§ 3.7 极值在经济中的应用	(145)
一、利润最大问题	(145)
二、成本最低问题	(147)
三、存贮费用最少问题	(148)
第三章 习题	(150)

第四章 不定积分

§ 4.1 原函数与不定积分	(154)
一、原函数与不定积分的概念	(154)
二、基本积分表	(157)
三、不定积分的性质	(158)
§ 4.2 换元积分法与分部积分法	(161)
一、换元积分法	(161)
二、分部积分法	(176)
三、某些不能用初等函数表示的积分	(181)
§ 4.3 几种特殊类型函数的积分	(182)
一、有理函数的积分	(182)
二、三角函数的有理式的积分	(183)
三、简单无理函数的积分	(184)
四、积分表的使用	(185)
§ 4.4 不定积分在经济中的应用	(187)
第四章 习题	(190)

第五章 定积分

§ 5.1 定积分的概念和基本性质	(194)
一、定积分问题举例	(194)
二、定积分的定义	(196)
三、定积分的几何意义	(199)
四、定积分的基本性质	(200)
§ 5.2 定积分基本定理	(204)
一、积分上限的函数及其导数	(204)
二、牛顿—莱布尼兹公式	(206)

§ 5.3 定积分的换元积分法与分部积分法	(209)
一、换元积分法	(209)
二、分部积分法	(213)
§ 5.4 广义积分	(214)
一、积分区间为无穷区间的广义积分	(214)
二、被积函数具有无穷间断点的广义积分	(216)
§ 5.5 定积分的应用	(218)
一、定积分的元素法	(218)
二、平面图形的面积	(219)
三、立体的体积	(222)
四、变力沿直线所作的功	(226)
五、定积分在经济问题中的应用	(227)
第五章 习题	(229)

第六章 多元函数的微分法

§ 6.1 空间直角坐标系	(236)
一、空间点的直角坐标	(236)
二、空间两点间的距离	(238)
三、曲面与方程	(240)
四、柱面	(241)
五、空间曲线及其方程	(242)
§ 6.2 二元函数及其图形	(245)
§ 6.3 二元函数的极限与连续	(247)
一、二元函数的极限	(247)
二、二元函数的连续性	(249)
§ 6.4 偏导数与全微分	(251)
一、偏导数	(251)

二、高阶偏导数	(253)
三、全微分	(255)
§ 6.5 二元函数的极值	(258)
一、二元函数的极值	(258)
二、多元函数微分法在经济上的应用举例	(262)
第六章 习题	(264)

第七章 重积分

§ 7.1 二重积分的概念与性质	(267)
一、二重积分的概念	(267)
二、二重积分的性质	(269)
§ 7.2 二重积分的计算法	(270)
一、利用直角坐标计算二重积分	(270)
二、利用极坐标计算二重积分	(276)
§ 7.3 二重积分的应用举例	(279)
第七章 习题	(284)

第八章 微分方程

§ 8.1 微分方程的基本概念	(287)
§ 8.2 可分离变量的微分方程	(289)
一、可分离变量的微分方程	(289)
二、齐次微分方程	(293)
§ 8.3 一阶线性微分方程	(295)
一、线性方程	(295)
二、贝努利方程	(300)
§ 8.4 几种特殊类型的二阶微分方程	(301)

一、 $y''=f(x)$ 型的微分方程	(301)
二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程	(302)
三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程	(304)
§ 8.5 二阶常系数齐次线性微分方程	(307)
§ 8.6 二阶常系数非齐次线性微分方程	(312)
一、 $f(x)=P_n(x)$ 型	(314)
二、 $f(x)=P_n(x)e^{\lambda x}$ 型	(316)
三、 $f(x)=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$ 型	(318)
§ 8.7 微分方程在经济等方面的应用	(322)
第八章 习题	(328)
附录 I 几种常用的曲线	(332)
附录 II 积分表	(336)
习题答案	(348)

第一章 函数与极限

数学是研究现实世界中的空间形式和数量关系的科学. 初等数学的研究对象基本上是不变的量, 而高等数学则是以变量为研究对象的一门学科. 所谓函数关系就是变量之间的依赖关系, 而极限方法则是研究变量的一种基本方法. 本章将系统地介绍变量、函数、极限和连续等基本概念, 以及它们的性质.

§ 1.1 函数的概念

一、常量与变量

当我们研究或观察某种自然现象或技术过程时, 常常会遇到各种不同的量, 其中有些量在整个现象或过程中, 始终保持一定的数值而不起变化, 这种量叫做常量; 而另外有些量可取各种不同的数值, 即有变化, 这种量叫做变量.

例如, 物体做自由落体运动时, 物体的质量保持不变, 是常量; 但物体下落的速度和距离都在变化, 是变量.

需要注意, 一个量是常量或变量, 都是指在某一确定的现象或过程中来说的, 同一量在不同情况下可能是不同的量.

例如, 对圆的面积 S 来说, 若圆的半径给定, 则 S 就是定值, 是常量; 若圆的半径可以取各种不同的值, 即取变量时, 则 S 又是变量了.

通常用字母 a, b, c 等来表示常量, 用字母 x, y, z 等表示变量.

二、区间与邻域

区间是本书最常用的一类数集. 设 a 和 b 都是实数, 且 $a < b$,

则称数集 $\{x|a < x < b\}$ 为开区间, 记作 (a, b) ; 数集 $\{x|a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 记作 $[a, b]$; 数集 $\{x|a \leq x < b\}$ 和 $\{x|a < x \leq b\}$ 都称为半开区间或半闭区间, 分别记作 $[a, b)$ 和 $(a, b]$, a 和 b 称为上述区间的端点.

以上这些区间都称为有限区间. 数 $b - a$ 称为这些区间的长度.

根据实数集与数轴上点的一一对应关系, 这些有限区间在数轴上的几何表示为有限线段. 如开区间 (a, b) 与闭区间 $[a, b]$ 在数轴上表示出来, 分别如图 1.1(a) 与(b) 所示.

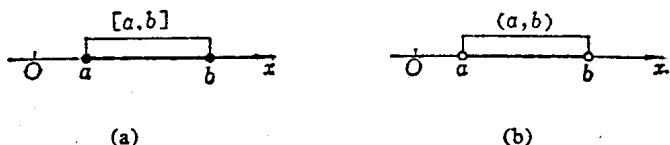


图 1.1

除以上谈到的有限区间外, 还有无限区间, 引进符号 $+\infty$ (读作正无穷大) 及 $-\infty$ (读作负无穷大), 则可类似地表示无限区间, 例如, 满足关系式 $x \geq a$ 的全体实数, 用区间 $[a, +\infty) = \{x|x \geq a\}$ 表示; 满足关系式 $x < a$ 的全体实数, 用区间 $(-\infty, a) = \{x|x < a\}$ 表示. 读者可类似地定义区间 $(a, +\infty)$ 和 $(-\infty, a]$. 全体实数的集合也可写成区间形式, 即

$$(-\infty, +\infty) = \{x|-\infty < x < +\infty\}.$$

有了区间的概念, 我们进一步介绍邻域的概念. 设 a 与 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$, 则称数集 $\{x||x - a| < \delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$. 点 a 叫做这邻域的中心, δ 叫做这邻域的半径.

因为 $|x - a| < \delta$ 相当于 $-\delta < x - a < \delta$ 即 $a - \delta < x < a + \delta$, 所以邻域 $U(a, \delta)$ 也就是开区间 $(a - \delta, a + \delta)$, 该区间以点 a 为中心, 而长度为 2δ (如图 1.2).

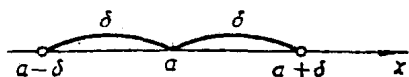


图 1.2

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉,点 a 的邻域去掉中心 a 后,称为点 a 的去心的 δ 邻域,记作 $U(\dot{a}, \delta)$,即

$$U(\dot{a}, \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\}.$$

三、函数的概念

先考虑几个例子.

例 1 自由落体运动的路程 s 与时间 t 由

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

联系着, t 的值确定了, s 的值就随之确定. 设落体着地的时刻为 T , 则当 t 取 0 到 T 之间任何值时, 由上式就可以确定 s 的相应值.

例 2 在气象观测站的百叶箱内气温自动记录仪把某一天的气温变化描绘在记录纸上, 如图 1.3 所示的曲线. 根据这个图, 我们就能知道这一天内时间 t 从 0 点到 24 点气温 T 的变化情形.

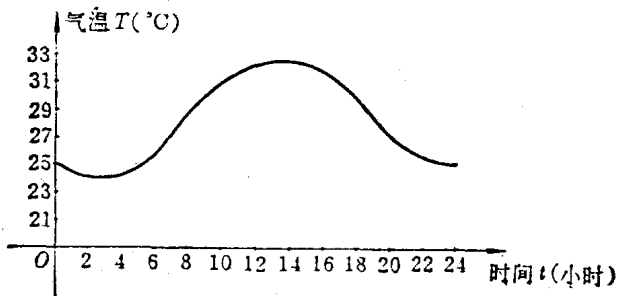


图 1.3

上面的例子都反映了在同一过程中有两个有联系的起着变化的量,当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时,按照一定的法则,另一个变量就有确定的值与之对应,两个变量之间的对应关系就是函数概念的实质.

定义 给定两个非空实数集 D, M , 如果对于每个数 $x \in D$, 按照一定的法则 f 总有唯一的数 $y \in M$ 与它对应, 则称对应法则 f 是确定在数集 D 上的函数, 简称 y 是 x 的函数. 记作 $y = f(x)$. 其中数集 D 称为函数的定义域, x 称为函数的自变量, y 称为函数的因变量.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时, 与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的函数值, 记作 $f(x_0)$. 全体函数值的集合

$$f(D) = \{y | y = f(x), x \in D\} \subset M$$

称为函数的值域.

由上述定义知, 决定一个函数必须知道定义域 D 、对应法则 f 和函数值所在集合 M . 函数值是由 $x \in D$ 通过 f 而唯一确定的实数, 通常总是把 M 取为全体实数的集合 R . 于是定义域 D 和对应法则 f 就成为确定函数的两个要素. 从而记号

$$y = f(x), x \in D$$

也就表达了一个实值函数. 如果一个函数的对应法则可以用数学式子来表达, 则其定义域就是使这一式子有意义的一切实数值, 如式子 $y = \sqrt{\lg x}$ 所表示的函数, 其定义域是指 $D = \{x | x \geq 1\}$.

关于函数概念, 有以下几点值得注意.

1. 两个函数相同, 是指它们的定义域和对应法则分别相同.
2. 在函数的定义中, 对每一个 x , 只能有唯一的一个 y 与它对应, 这种函数称为单值函数. 若允许同一 x 值可以和不止一个 y 值相对应, 则称它为多值函数. 以后没有特别说明时, 函数都是指单值函数.