模型降阶方法

蒋耀林 著

科学出版社
www.sciencep.com

模型降阶方法

蒋耀林 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书主要讨论大型系统近似过程的模型降阶方法的理论与应用. 除绪论外, 全书共分 10 章, 其基本内容包括输入输出系统理论、渐近波形估计方法、Krylov 子空间类方法、多点拟合方法、正交分解方法、平衡截断方法、积分全等变换与最优化方法, 以及一些特殊系统的模型降阶方法. 全书系统性强, 详略得当, 由浅入深, 循序渐进, 每章内容自成体系, 又相互关联.

本书可供计算数学、应用数学、电路与系统、电力系统与自动控制, 以及计算机科学等相关专业的研究生和科研工作者阅读, 同时也可作为理工类有关专业的教师以及从事科学和工程问题的模型分析与模拟的广大技术人员的理论参考书.

图书在版编目(CIP)数据

模型降阶方法/蒋耀林著. —北京: 科学出版社, 2010

ISBN 978-7-03-027437-3

I. 模… II. 蒋… III. 算法理论 IV. O141.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 083072 号

责任编辑: 赵彦超 杨 然 / 责任校对: 陈玉凤
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京佳信达欣艺术印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 6 月第 一 版 开本: B5(720 × 1000)
2010 年 6 月第一次印刷 印张: 22
印数: 1—2 500 字数: 433 000

定价: 68.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

近年来, 在众多工程应用领域, 如电子系统、电力系统、控制系统、力学系统、流体机械系统等, 都涉及大型或复杂动力系统的计算机设计、仿真、优化与控制. 这些工程系统一般都是由微分方程来描述的, 方程的维数通常比较高, 在某些领域方程组的规模极其庞大, 因而给工程人员的设计和仿真模拟带来了巨大的挑战. 长期以来, 工程技术人员和数学研究者一直致力于寻找一些能够在降低系统规模的同时, 还能够保持原有问题的一些固有性质或结构的有效方法. 模型降阶就是处理大型系统近似过程的一类有效方法, 在许多工业领域都有着独特的应用. 例如, 随着现代集成电路技术的快速发展, 在单块芯片上集成的晶体管数目已呈指数规律增长, 为了在合理时间内分析与模拟大量互连电路的性能, 必须有效降低所设计的电路系统的规模. 在这种情况下, 如何将一个较大系统转化为一个近似的较小系统, 以降低系统分析的难度和减少相应算法的计算量, 便形成了电路系统中模型降阶这一理论问题. 事实上, 近几年模型降阶方法已被成功地应用于许多高新工业技术和应用领域.

模型降阶这一基本而朴素的思想, 虽多年前就散见于一些工程界的文献中, 但其作为一类具有理论依据的较为系统的数学方法还是近年来的事情. 模型降阶问题早期多出现在自动控制和电路系统领域, 尤其是随着现代大型集成电路的发展, 模型降阶理论在电路设计与模拟过程中得到了进一步丰富和完善. 同时, 近十年来如何快速数值模拟大型复杂系统也得到了包括数学工作者在内的广大研究者和工程师的广泛关注. 我们知道, 要设计一个复杂系统, 如机器人、飞船、移动电话、计算机以及各类电子产品等, 需要花费很长的时间进行研发. 为了保证最后得到的设计产品能满足各项规定的性能指标, 就必须在此之前对系统进行分析和计算模拟, 这主要是为了避免因为设计缺陷而导致的产品浪费. 基于这些考虑, 在现代工业制造中人们设计出多种电子设计自动化计算机仿真软件来辅助电子产品的设计和生产. 对于现代大型或复杂系统, 由于其高维数或复杂性, 直接进行分析相对困难或数值模拟耗时过长, 甚至对某些问题无法模拟. 在这样的背景下, 对模型的规模或阶数进行有效的降阶处理就显得尤为重要了. 事实上, 基于模型降阶方法的数值模拟算法也是电子设计自动化软件的理论基础之一. 目前, 模型降阶方法已经开始被运用到更复杂的数学物理模型中, 这类模型包括流体模型和电磁场模型等. 模型降阶方法也因其具有高效快速计算性能而正在被应用到各类偏微分方程的数值求解中.

自 1995 年起, 作者一直从事电路模拟算法的研究, 工作主要集中在波形松弛和

模型降阶两个方面. 当前, 作者正致力于模型降阶方法与波形松弛方法的交叉融合以及并行实现等问题的研究. 十多年前, 模型降阶方法的数学基础还很不完善, 也很少受到数学界的重视. 但随着科技的快速发展, 模型降阶方法的理论与应用目前已得到了很大的完善和拓展, 未来这方面的研究内容必将引发新的学科方向, 同时也会对相关学科的发展产生深远的影响. 在现阶段, 把正在逐渐成熟的模型降阶方法介绍给国内广大读者是十分适宜的, 作者希望这方面的研究成果能够引起从事系统设计、模拟与仿真的广大人士的更多关注, 从而推进我国科技的快速进步. 本书的基本内容散见于国际上有关模型降阶的诸多文献中, 部分内容作为西安交通大学博士研究生学位课程已多次讲授. 为方便不同知识背景的读者阅读, 本书尽量采用比较通俗易懂的语句叙述, 侧重从方程和系统的角度阐述方法的机理, 注重方法的基本内涵和本质. 在内容选取方面, 注重条理性、系统性和方法的普适性. 同时, 本书既重视已有理论基础, 也注重最新研究进展, 努力使读者阅读本书后一方面能够了解模型降阶的整体面貌, 并且能够进入模型降阶研究的前沿, 另一方面也能够直接利用有关方法去解决实际问题.

本书除绪论外, 主要内容分为 10 章. 具体安排如下：绪论部分介绍模型降阶的基本思想和基本方法, 使读者对模型降阶方法有一个概括的认识; 第 1 章介绍常用的矩阵分解以及矩阵方程的代数求解方法; 第 2 章介绍输入输出系统性质, 包括系统的基本概念、系统的范数以及系统的稳定性和无源性等; 第 3 章介绍渐近波形估计方法; 第 4, 5 章介绍 Krylov 子空间类方法, 包括经典的 Arnoldi 和 Lanczos 降阶方法; 第 6 章介绍多点拟合方法; 第 7 章介绍正交分解方法; 第 8 章介绍平衡截断方法; 第 9 章介绍积分全等变换和最优化方法; 第 10 章讨论特殊系统的模型降阶方法, 这些系统是双线性系统、耦合系统、定常系统以及简单偏微分系统.

在本书撰写过程中, 作者的学生陈海宝、王晓龙、陈春岳、杨媚、李挺、周潞和李一鹏等同学付出了许多辛勤劳动, 尤其是陈海宝和王晓龙同学长期全面负责材料的收集和整理等繁杂工作. 作者的家人一直为作者营造着温馨和谐的家庭环境, 使作者无后顾之忧. 此外, 在作者长期研究中, 多次得到国家科技部相关项目和国家自然科学基金的大力支持. 在本书出版之际, 作者衷心感谢所有支持和帮助过作者的机构和人们.

最后, 由于作者水平有限, 书中不妥与错误之处在所难免, 希望广大读者和同仁不吝赐教.

蒋耀林

2010 年 1 月于西安

目　　录

绪　论

模型降阶 (model order reduction) 方法被提出以来, 不仅在工程界得到广泛应用, 而且在科学计算界也受到普遍重视. 在模型降阶方法出现以前, 在数学上就存在着著名的处理输入输出系统传递函数的 Padé 逼近方法. 现在知道, 这种有理逼近方式是模型降阶方法的一种简单形式. 所谓模型降阶, 简而言之, 就是在某种情况下将一个较大系统转化为一个近似的较小系统的过程, 以便降低大型复杂系统的理论分析难度和减少数据运算量. 一般的模型降阶方法, 应满足如下一些基本条件: 降阶系统与原始系统的近似误差足够小; 降阶系统能保持原始系统的某些性能, 例如稳定性、无源性和结构性等; 降阶计算过程稳定而高效, 等等.

简单地说, 人们对模型降阶的认识一般可以基于实验模型和数值模拟这两种方式的考虑. 前者是从系统物理结构的角度出发来简化模型, 由于系统物理结构的个别性和复杂性, 难以形成精确模型, 使得这种方式不太实际; 后者是利用单纯的数值方法来模拟系统的各种响应以达到对系统的模拟, 这也容易忽略工程系统的一些具体特性, 这种方式通常模拟效果也不太理想. 目前出现的模型降阶方法都是介于这两者之间的. 本书主要从系统或方程的角度来介绍各类模型降阶方法, 同时兼顾系统的特殊性能, 其基本内容涵盖了模型降阶中的一些主要方法.

0.1　模型降阶的基本思想

首先引入一个常见的线性时不变系统

$$\begin{cases} E\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = Ax(t) + bu(t), \\ y(t) = c^{\mathrm{T}}x(t), \end{cases} \tag{0.1.1}$$

其中 $E,\ A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 是常数矩阵, $b, c \in \mathbf{R}^n$ 是常数向量, $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 是系统的状态变量, $u(t) \in \mathbf{R}$ 是系统的输入变量, $y(t) \in \mathbf{R}$ 是系统的输出变量. 假设已知变换矩阵 $V,\ W \in \mathbf{R}^{n\times r}(r \ll n)$, 那么, 由原始系统 (0.1.1) 就可以得到其降阶系统

$$\begin{cases} \tilde{E}\dfrac{\mathrm{d}\tilde{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{b}u(t), \\ \tilde{y}(t) = \tilde{c}^{\mathrm{T}}\tilde{x}(t), \end{cases} \tag{0.1.2}$$

其中 $\tilde{E} = W^{\mathrm{T}}EV, \tilde{A} = W^{\mathrm{T}}AV$, $\tilde{b} = W^{\mathrm{T}}b, \tilde{c} = V^{\mathrm{T}}c$, $\tilde{x}(t) \in \mathbf{R}^r$ 是降阶系统的状态变

量, $\tilde{y}(t) \in \mathbf{R}$ 是降阶系统的输出变量. 如果矩阵 V 是标准列正交的, 通常可直接选取 $W = V$.

不妨假设原始系统 (0.1.1) 的初始状态为零. 这样, 对系统 (0.1.1) 做 Laplace 变换后可以得到 $Y(s) = c^{\mathrm{T}}X(s) = c^{\mathrm{T}}(sE - A)^{-1}bU(s)$, 其中 $U(s)$, $X(s)$ 和 $Y(s)$ 分别是 $u(t)$, $x(t)$ 和 $y(t)$ 经 Laplace 变换后的函数. 系统 (0.1.1) 的传递函数为 $H(s) = c^{\mathrm{T}}(sE - A)^{-1}b$. 类似地, 降阶系统 (0.1.2) 的传递函数为 $\tilde{H}(s) = \tilde{c}^{\mathrm{T}}(s\tilde{E} - \tilde{A})^{-1}\tilde{b}$. 明显地, 传递函数是输入输出系统的本质特征. 对线性系统而言, 它们是系统在时间域内输入输出关系 $h(t)$ 的 Laplace 变换.

通常, 称降阶系统 (0.1.2) 是原始系统 (0.1.1) 的近似, 是指传递函数 $\tilde{H}(s)$ 应是 $H(s)$ 的近似, 也就是 $\tilde{H}(s) \approx H(s)$, 并且复变函数 $\tilde{H}(s)$ 比 $H(s)$ 的复杂度要低. 从复变函数 $\tilde{H}(s)$ 和 $H(s)$ 的表达式可以看出, 它们都是有理分式函数, 其复杂度由它们的极点个数和在复平面中的位置来决定. 这样, 模型降阶的基本目的就是寻找有理分式函数 $H(s)$ 的近似函数 $\tilde{H}(s)$, 使得 $\tilde{H}(s)$ 的极点个数远远小于 $H(s)$ 的极点.

假设矩阵 A 非奇异, 那么, 当 $|s| < 1/\rho(A^{-1}E)$ 时, 可以对 $H(s)$ 进行 Taylor 级数展开, 得到 $H(s) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} m_i s^i$, 其中系数 $m_i = -c^{\mathrm{T}}(A^{-1}E)^i A^{-1}b$ 称为传递函数 $H(s)$ 在零点处的第 i 阶矩. 降阶系统 (0.1.2) 的传递函数可以类似展开为 $\tilde{H}(s) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \tilde{m}_i s^i$, 其在零点处的第 i 阶矩为 $\tilde{m}_i = -\tilde{c}^{\mathrm{T}}(\tilde{A}^{-1}\tilde{E})^i \tilde{A}^{-1}\tilde{b}$. 由以上简单分析可以看出, 为衡量降阶系统与原始系统之间的近似程度, 可以比较相应的传递函数. 具体地, 可以比较降阶系统与原始系统传递函数相同阶的矩. 理论分析表明, 由许多模型降阶方法所得到的降阶系统的传递函数通常能保持原始系统的传递函数的一定数量的矩, 即有 $\tilde{m}_i = m_i (i = 0, 1, \cdots, q-1)$, 其中 q 为某一正整数.

此外, 估计传递函数 $\tilde{H}(s)$ 和 $H(s)$ 在某种范数意义下的误差也是衡量降阶系统逼近原始系统程度的一种重要方法. 例如, 在 Hankel 范数意义下求解极小值问题 $\min\limits_{\tilde{H}(s)} \left\| H(s) - \tilde{H}(s) \right\|_H$, 这样就可以通过原始系统传递函数 $H(s)$ 的最优的近似传递函数 $\tilde{H}(s)$ 来构造降阶系统的状态空间方程和输出方程.

简单假设传递函数 $H(s)$ 只有单重极点, 将它写成如下分式或部分分式形式

$$H(s) = \frac{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_l s^l}{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_n s^n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{k_j}{s - p_j} \ (l < n).$$

这样, 传递函数 $H(s)$ 在时间域上的瞬态响应为 $h(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} k_j \mathrm{e}^{p_j t}$. 在时间域上, 原

始系统的输出还可以表示为如下卷积形式

$$y(t)=(h*u)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

同样, 假设降阶系统的传递函数 $\tilde{H}(s)$ 只有单重极点, 那么它可以写为

$$\tilde{H}(s)=\frac{1+\tilde{a}_1s+\tilde{a}_2s^2+\cdots+\tilde{a}_zs^z}{1+\tilde{b}_1s+\tilde{b}_2s^2+\cdots+\tilde{b}_rs^r}=\sum_{j=1}^{r}\frac{\tilde{k}_j}{s-\tilde{p}_j}\ (z<r).$$

它在时间域上的瞬态响应为 $\tilde{h}(t)=\sum_{j=1}^{r}\tilde{k}_j\mathrm{e}^{\tilde{p}_jt}$. 进一步, 降阶系统的输出可以表示为

$$\tilde{y}(t)=(\tilde{h}*u)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{h}(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

也就是说, 对模型降阶来说, 在时间域上输出输入关系应满足 $\tilde{h}(t)\approx h(t)$. 从而, 对同一个输入 $u(t)$, 降阶前后的系统输出具有近似关系 $\tilde{y}(t)\approx y(t)$.

原则上, 降阶后的系统还应保持原始系统一些基本性质, 比如系统的稳定性和无源性等. 这些性质是工程应用领域中动力系统的重要属性, 也是模型降阶所关注的重点问题. 由高效的模型降阶方法所得到的降阶系统应能保持系统的稳定性和无源性. 通常系统的无源性蕴含系统的稳定性.

系统 (0.1.1) 的稳定性取决于系数矩阵 E 和 A. 例如, 如果矩阵 E 非奇异, 矩阵 $E^{-1}A$ 的特征值位于左半平面, 并且在虚轴上的特征值是单重的, 那么系统 (0.1.1) 是稳定的. 其实, 也可以通过系统的传递函数来判断系统的稳定性. 如果传递函数 $H(s)$ 的极点 $p_j(j=1,2,\cdots,n)$ 位于左半平面, 并且在虚轴上的极点是单重的, 那么系统 (0.1.1) 是稳定的. 同样, 对于降阶系统 (0.1.2), 可以类似通过系数矩阵 $\tilde{E}$ 和 $\tilde{A}$ 或它的传递函数 $\tilde{H}(s)$ 的极点位置来判定其稳定性.

系统 (0.1.1) 的无源性可以根据其传递函数 $H(s)$ 来直接判断. 例如, 如果系统 (0.1.1) 是单输入单输出的, 并且 $H(s)$ 满足: 在右半开平面 $H(s)$ 是解析的; 对任意满足 $\mathrm{Re}\{s\}>0$ 的 s, 成立 $H(\bar{s})=\overline{H(s)}$; 对任意 $s\in\mathbf{C}_+$, 即 $\mathrm{Re}\{s\}\geqslant0$, 成立 $\mathrm{Re}\{H(s)\}\geqslant0$, 那么, 该系统就是无源的. 同样, 也可以类似地给出降阶系统 (0.1.2) 的无源性条件. 据此, 系统 (0.1.1) 及其降阶系统 (0.1.2) 的无源性分别与各自的系数矩阵 E, A, b, c 和 $\tilde{E}$, $\tilde{A}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ 密切相关. 除系统的稳定性和无源性之外, 系统的自反性和结构性问题在模型降阶中也是常常被研究的对象.

最后, 简单考虑一下非线性系统的模型降阶问题. 对非线性系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=f(x(t),\ u(t)),\\ y(t)=h(x(t),\ u(t)),\end{cases}\tag{0.1.3}$$

其中 $f: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ 是非线性函数, $h: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是一般函数. 假设已知标准列正交矩阵 $V \in \mathbf{R}^{n\times r}(r \ll n)$, 那么, 由原始非线性系统 (0.1.3) 可以得到其降阶系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\tilde{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \tilde{f}(\tilde{x}(t),\, u(t)), \\ \tilde{y}(t) = \tilde{h}(\tilde{x}(t),\, u(t)), \end{cases} \tag{0.1.4}$$

其中 $\tilde{f}(\tilde{x}(t),\, u(t)) = V^{\mathrm{T}} f(V\tilde{x}(t),\, u(t))$, $\tilde{h}(\tilde{x}(t),\, u(t)) = h(V\tilde{x}(t),\, u(t))$, $\tilde{x}(t) \in \mathbf{R}^r$ 是降阶系统的状态变量, $\tilde{y}(t) \in \mathbf{R}$ 是降阶系统的输出变量. 为获得变换矩阵 V, 例如, 可以对非线性系统 (0.1.3) 的非线性项做线性化处理, 然后类似线性系统的降阶方法来构造这样的矩阵 V.

相对线性问题而言, 非线性系统由于自身结构的复杂性, 其模型降阶方法的误差估计比较复杂, 稳定性分析也有一定的难度. 尤其是非线性系统不具有类似线性系统的传递函数, 因而需要在时间域上给出无源性判定条件, 这使得无源性的分析变得相对困难.

在模型降阶中, 一般要重点考虑降阶系统逼近原始系统的程度如何. 通常, 可以分时间域和频率域两种情形讨论降阶系统与原始系统之间的误差. 在时间域上, 可以直接比较降阶系统与原始系统的输出函数在某种范数下的大小, 这种刻画误差的方式较为麻烦, 需要用到丰富的微分方程理论, 甚至还需要定义一些特殊的范数. 在频率域上, 需要对原始系统和降阶系统的状态方程和输出方程做 Laplace 变换以获得各自的系统传递函数, 然后通过比较传递函数的矩来衡量降阶系统逼近原始系统的程度. 这种误差刻画方式由于可借助的数学工具较多, 其理论研究结果往往很丰富也很深刻. 但无论是从时间域还是频率域出发, 由于模型降阶研究的对象是系统的整体近似问题, 不是以往单纯的函数计算或方程的求解等, 这当中需要更多和更深奥的数学理论是自然的, 其结果是相关的研究工作无疑会大大丰富和扩充现有的数学理论.

0.2 模型降阶的基本方法

到目前为止, 众多的模型降阶方法基本上是关于线性系统的, 更确切地说, 大多数降阶方法特别适合于线性时不变系统. 非线性系统的模型降阶方法发展相对较为缓慢, 这一方面是由于非线性系统模型降阶过程的机理难以被认识, 另一方面也是由于许多工程大型系统的主要部分是由线性元素组成的, 取而代之, 通常仅仅需对相应线性部分或系统进行降阶处理即可达到模型的设计要求. 这里, 首先对本书一些基本降阶方法给予简要介绍.

模型降阶中最基本和最重要的方法就是 Krylov 子空间类方法, 这类方法通常

采用所构造的标准列正交向量基底对系统进行模型降阶. 也就是说, 这类方法使得降阶系统的传递函数对于原始线性系统的传递函数在指定的频率区域内有很好的近似. Krylov 子空间方法在数学理论上相当完善, 其主要优点是算法稳定, 能够保持原始系统传递函数一定数量的矩, 并且在某种情况下还能保持系统的基本特性. 由于基于 Krylov 子空间技术的算法数值稳定, 算法实现简单且计算量较小, 所以这类算法在应用领域相当普遍, 尤其是在电子工程应用方面更是如此.

以线性系统 (0.1.1) 为例, 首先构造如下 Krylov 子空间

$$K_r(A^{-1}E; A^{-1}b) = \operatorname{span}\left\{A^{-1}b, A^{-1}EA^{-1}b, \cdots, (A^{-1}E)^{r-1}A^{-1}b\right\}.$$

对上述 Krylov 子空间中的列向量实施 Arnoldi 过程, 可以获得标准列正交矩阵 $V \in \mathbf{R}^{n\times r}$, 即成立 $V^{\mathrm{T}}V = I_r$, 其中 I_r 为 $r \times r$ 单位阵. 这种构造标准列正交矩阵的方式称为单侧 Krylov 子空间过程, 此外还有双侧 Krylov 子空间过程等.

一些常用的典型 Krylov 子空间方法主要包括: Arnoldi 降阶算法、C 正交 Arnoldi 算法, 以及块 Arnoldi 算法; 对称和非对称 Lanczos 降阶算法、块 Lanczos 算法等; PRIMA (passive reduced-order interconnect macromodeling algorithm) 算法; 多重 Krylov 子空间降阶算法等.

平衡截断概念首先来源于控制问题, 然后被用于一般系统的降阶过程. 仍以线性系统 (0.1.1) 为例, 先利用系统的可控和可观 Gram 矩阵来获得平衡变换矩阵 T. 对系统的状态变量做变换 $x(t) = T\hat{x}(t)$, 将其代入系统的状态方程和输出方程, 并且对状态方程两端左乘 T^{-1}, 可以得到其平衡系统为

$$\begin{cases} \hat{E}\dfrac{\mathrm{d}\hat{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{b}u(t), \\ \hat{y}(t) = \hat{c}^{\mathrm{T}}\hat{x}(t), \end{cases} \tag{0.2.1}$$

其中 $\hat{E} = T^{-1}ET$, $\hat{A} = T^{-1}AT$, $\hat{b} = T^{-1}b$, $\hat{c} = T^{\mathrm{T}}c$. 然后, 对状态向量 $\hat{x}(t)$ 按如下方式分块

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix},$$

其中 $\hat{x}_1(t)$ 的维数等于预期需要的降阶系统维数. 同时, 对 $\hat{A}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ 做相应分块

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{c} = \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix}.$$

最后, 令 $\tilde{A} = \hat{A}_{11}$, $\tilde{b} = \hat{b}_1$, $\tilde{c} = \hat{c}_1$, 就可以得到形如 (0.1.2) 的降阶系统.

在研究与应用领域, 一般可以将平衡截断降阶方法大致分为两类: 一类是普通意义下的平衡截断模型降阶方法; 另一类是频率加权平衡截断降阶方法. 不同于基

于 Krylov 子空间型模型降阶方法, 以平衡截断方法为基础的降阶方法通常能够直接给出降阶系统与原始系统之间的误差关系, 这是其他降阶方法所不能比拟的. 平衡截断降阶方法的另一个优点就是能保持原始系统的稳定性, 但主要缺点是计算量比较大.

正交分解降阶方法, 顾名思义, 就是在已知正交函数基底下对系统状态向量进行展开的方法. 继续以线性系统 (0.1.1) 为例, 假设 $\{g_i(t)\}_{i=0}^{+\infty}$ 为一族正交函数序列, 首先对状态变量 $x(t)$ 在这组正交函数基底下进行近似展开 $x(t) \approx \sum_{i=0}^{r-1} a_i g_i(t)$. 其次, 将其代入系统的状态方程, 通过待定系数法或选择有限采样点来确定系数向量 $a_i(i=0, 1, \cdots, r-1)$. 然后对 a_i 实行标准正交化过程就获得标准列正交矩阵 $V \in \mathbf{R}^{n\times r}$, 类似就可以得到降阶系统 (0.1.2).

同样, 也可以将正交分解降阶方法简单分为两类: 一类是对系统的状态变量或传递函数在已知正交函数基底下进行展开, 然后对系统进行降阶; 另一类是由系统的近似数据集通过构造一组基向量来对系统进行降阶, 即本征正交分解方法. 前者降阶过程直观明了, 易于理解, 其缺点是计算过程不稳定, 系统的稳定性和无源性一般也难以保证. 后者采用本征正交分解过程, 也可以有效地对非线性系统进行降阶, 该类模型降阶方法最近已引起了人们的广泛关注.

积分全等变换降阶方法需要对系统的状态变量进行积分全等变换, 然后构造标准列正交矩阵对原始系统进行降阶. 最优化降阶方法旨在利用优化方法寻找原始系统传递函数 $H(s)$ 的近似 $\tilde{H}(s)$, 然后根据 $\tilde{H}(s)$ 构造其降阶系统.

对于非线性系统, 由于其自身结构复杂, 一般线性系统的模型降阶方法不能直接运用于这类系统的降阶. 但是, 可以首先对非线性函数进行线性化或预处理以获得相对简单的系统, 然后再利用线性系统或特殊系统的模型降阶理论来研究非线性系统问题.

仍以非线性系统 (0.1.3) 为例, 不妨假设非线性函数 f 具有形式 $f(x(t), u(t)) = g(x(t)) + bu(t)$, 其中 $g(x(t))$ 是关于 $x(t)$ 的非线性函数, 并且 $g(0)=0$. 对非线性函数 $g(x(t))$ 在零点处做 Taylor 级数展开

$$g(x) = \left.\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} x + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} x \otimes x + \cdots,$$

其中 $\left.\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} \in \mathbf{R}^n$ 是 $g(x)$ 在零点处的 Jacobi 矩阵, $\left.\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} \in \mathbf{R}^{n\times n\times n}$ 是 $g(x)$ 在零点处的 Hesse 张量, "$\otimes$" 表示 Kronecker 积. 取上述 Taylor 级数展开式中的线性项部分近似函数 $g(x)$, 并记 $A = \left.\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$, 这样非线性系统 (0.1.3) 可以近似为

线性系统 (0.1.1), 此时 E 为单位矩阵. 假设矩阵 A 非奇异, 基于 Krylov 子空间 $K_r(A^{-1};A^{-1}b)$ 可以构造标准列正交矩阵 $V\in\mathbf{R}^{n\times r}$, 从而得到降阶系统 (0.1.4), 这是非线性系统的线性化方法. 如果在近似部分留下张量 $\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$, 那就变成非线性系统的张量模型降阶方法.

在非线性系统的降阶方法中,线性化是最基本的过程,通过线性化手段与Krylov子空间技术相结合就可以诱导出一些相对有效的方法. 再者, 在线性化基础上发展起来的二次化方法的降阶效果也比较明显. 利用 Taylor 级数展开的思想来形成系统的矩空间的方式同样可以给出一种相当巧妙的非线性系统模型降阶方法. 此外, 对非线性系统先进行双线性化或参数化再进行降阶, 也可以得到不错的降阶效果. 然而, 非线性系统模型降阶方法因其机理复杂, 发展很缓慢, 其理论还很不成熟, 许多工作尚在进一步研究探索中.

总的来说, 现有模型降阶方法的种类还远远不能满足众多工程应用领域的要求, 其内容远未臻于完善, 未来一段时间内十分需要发展更多保精度、保性能、保速度的高性能的大型或复杂系统的模型降阶方法.

第 1 章　矩阵分解和矩阵方程

在绪论中已简单介绍了模型降阶的基本思想和基本方法, 本章介绍与模型降阶方法相关的矩阵分解和矩阵方程的基本知识, 其主要内容包括矩阵的 QR 分解、LU 分解与 SVD 分解, 以及 Sylvester 方程[19,66,79,95] 的矩阵代数求解方法. 值得指出的是, Sylvester 方程的特殊形式就是著名的 Lyapunov 方程[33,34,76,82]. 关于矩阵分解的更多内容可以参见文献 [1, 2, 4, 19]; 关于 Sylvester 方程求解相关问题的介绍可以参见文献 [12, 81, 101, 139].

1.1 矩 阵 分 解

矩阵的基本分解在大型系统的解耦与模型降阶中会经常遇到. 为方便阅读本书, 有必要回顾一下相关的矩阵分解内容. 本节主要介绍矩阵的 QR 分解、LU 分解和 SVD 分解, 并给出这三种分解的一些基本性质.

1.1.1 QR 分解

在具体介绍 QR 分解之前, 需要给出标准列正交矩阵、正交矩阵和酉矩阵的定义. 若矩阵 $Q \in \mathbf{C}^{n\times r}(n \geqslant r)$, $Q^{\mathrm{H}}Q = I_r$, 其中 Q^{H} 表示 Q 的共轭转置, I_r 表示 r 阶单位矩阵, 则称 Q 为标准列正交矩阵; 特别地, 如果 $r = n$ 时, 就称 Q 为酉矩阵; 进一步, 若矩阵 $Q \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $Q^{\mathrm{T}}Q = I_n$, 其中 Q^{T} 表示 Q 的转置, 则称 Q 为正交矩阵. 下面介绍具体的 QR 分解过程.

设矩阵 $A \in \mathbf{C}^{m\times n}(m \geqslant n)$ 是列满秩的, A 的列向量为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 我们希望找到一组标准列正交向量 $q_1, q_2, \cdots, q_n$, 使得对任意给定的 i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 均满足

$$\operatorname{span}\{q_1, q_2, \cdots, q_i\} = \operatorname{span}\{a_1, a_2, \cdots, a_i\}. \tag{1.1.1}$$

当式 (1.1.1) 成立时, $q_1, q_2, \cdots, q_i$ 可以表示成 $a_1, a_2, \cdots, a_i$ 的线性组合; 反之, $a_1, a_2, \cdots, a_i$ 也可以表示成 $q_1, q_2, \cdots, q_i$ 的线性组合. 因此, 式 (1.1.1) 等价于

$$[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n] = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n]\,\hat{R},$$

其中 $\hat{R} = (r_{ij}) \in \mathbf{C}^{n\times n}$, 这里 $r_{ii} \neq 0$, 当 $i > j$ 时, $r_{ij} = 0$ $(i = 2, 3, \cdots, n,\ j = 1, 2, \cdots, n-1)$. 注意到, 矩阵 $\hat{R}$ 的左上角 $i \times i$ 块矩阵是非奇异的. 进一步, 有下列表达式