MOHU
JIHE
JICHU
LILUN
JI
YINGYONG

模糊集合基础理论及应用

高琴妹

南大学出版社

前　言

精确性和复杂性是不相容的。当一系统的复杂性增加时，其精确的能力和关于其行为的描述能力将随之减小。例如，很难切合实际地证明一个关于现实世界中经济系统的行为。因此人们迫切希望能找到与现实世界中普遍存在的不精确性相适应的方法。模糊集之父——美国加利福尼亚大学著名教授扎德(L.A.Zadeh)，1921年2月4日出生于前苏联巴库，1942年获伊朗德黑兰大学电机工程学士、1946年获美国麻省理工学院电机工程硕士、1949年获美国哥伦比亚大学电机工程博士。1965年，这位电机工程博士发表了著名论文《Fuzzy Sets》，从此揭开了如何处理现实世界中不精确性的篇章。他通过引进模糊集——边界不明显的类，提出了对复杂系统进行分析的一种方法。在这种方法中，用比数值变量更为有效的语言变量，描述系统的行为。世界上有几种杂志《Fuzzy Sets and Systems》、《IEEE Trans.on Fuzzy Systems》、《模糊系统和数学》，专门刊载有关文章。至今，各国研究“模糊”的学者已超过万人，发表重要论文6 000多篇。研究范围从单纯的模糊数学扩展到模糊理论应用、模糊系统及其硬件集成。

我长期从事电气自动化的教学与研究工作，从事模糊集理论学习与研究的时间不很长，在查阅了大量中外有关模糊集理论研究、应用的著作和论文后，很快被它的理论及处理问题的方法所吸引，发表了一些文章。鉴于我校是一所文、理、工并存的高等专科学校，为让学生们了解模糊集合这一领域的知识，就萌发了编写教材的想法，作为选修课程之用。本书力求浅显易懂，并重在应用。但愿通过本书的学习，学生们能开发研究不精确性的思维，有更多的人加入到这一研究的领域中来，这就是写本书的初衷。

本书从清晰集合开始逐步引申到模糊集合，深入浅出地介绍了模糊聚类分析、模糊综合评判与模糊关系方程、模糊语言与近似推理、模糊控制等方面的内容。

本书的出版，得到我校“教授工程”的大力支持，同时也得到了东南大学出版社领导的关心和帮助。本书部分内容引用了国内外专家、学者的最新研究成果，在此一并向他们致以诚挚的谢意。

由于本人水平有限，加之模糊数学和模糊技术本身也在发展，并不十分成熟，本书错误之处，恳请读者斧正。

作者

2000 年 10 月

目　　录

1 模糊集合基础知识

1.1 清晰集合

1.1.1 集合

集合是现代数学中最基本的概念之一。通常把具有一定范围的并有同一属性的确定对象所组成的全体称为集合。集合的名称通常用大写的英文字母 A、B… 来表示。

1) 集合常用的术语

(1) 元素　组成集合的各个事物被称为集合内的元素(或称为集合元),通常用英文小写字母 a、b… 来表示。

(2) 论域　由被考虑对象的所有元素的全体组成的基本集合称为论域,用 U、V、X… 来表示。

(3) 全集　在一定范围内,如果所有集合均为某一集合的子集,则该集合称为全集。全集是唯一的。

(4) 空集　不包含任何元素的集合称为空集,用 $\emptyset$ 表示。空集不唯一,如方程 $x^2+1=0$ 的全体实根就是空集。

(5) 子集　若由集合 A 中的一部分元素所组成的集合 B,并且 B 的所有元素都属于 A,则称集合 A 是 B 的子集。空集是任意集合的子集。

(6) 属于　若事物 a 是集合 A 的元素,则元素 a 属于集合 A,表示为 $a \in A$;反之,若事物 b 不是集合 B 的元素,则元素 b 不属于 B,用 $b \in B$ 表示,或用 $b \notin B$ 来表示。因此,元素与集合之间的关系是属于或不属于的关系。对于清晰集合来讲是确定的,两者必居其一,不可兼得。

(7) 包含与真子集　设 A、B 是论域 U 中的两个子集，当所有 x 属于 $A(\forall x \in A)$ 时，必定有 $x \in B$，记作 $\forall x \in A \longrightarrow x \in B$，则称 B 包含 A，或称 A 含于 B，表示为 $B \supseteq A$ 或 $A \subseteq B$。若 $A \subseteq B$ 并且 $A \neq B$，则称 A 是 B 的真子集，表示 $A \subset B$。

(8) 相等　如果两个集合 A 与 B，$A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A = B$。两个集合相等的充分必要条件是互为子集。

2) 子集的简单性质

(1) 对 $\forall A \subseteq U$，有 $\emptyset \subseteq A \subseteq U$；

(2) 自反性　$A \subseteq A$；

(3) 传递性　若 $A \subseteq B$，$B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$。

3) 相等集合的简单性质

(1) 自反性　$A = A$；

(2) 传递性　若 $A = B$，$B = C$，则 $A = C$。

4) 集合的表示法

描述集合最常用的方法有两种：

(1) 列举法　把集合所包含的一切元素，一一列举出来，逐一写在花括号｛　｝中。

(2) 描述法　描述集合中元素所具有的性质。

例 1.1.1　"小于 7 的正整数的集合"，分别用列举法和描述法表示。

列举法　$A = \{1,2,3,4,5,6\}$

描述法　$A = \{x \mid x$ 是小于 7 的正整数$\}$

而对于"区间[0,1]上所有实数的集合"，用描述法可表示为

$$\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$$

1.1.2　集合的运算

1) 集合的运算

(1) 设有两个集合 A 和 B。由属于 A 或者属于 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的并集，用 $A \cup B$ 表示，即

$$A \cup B = \{u \mid u \in A \text{ 或 } u \in B\}$$

(2) 设有两个集合 A 和 B。由既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的交集，用 $A \cap B$ 表示，即

$$A \cap B = \{u \mid u \in A \text{ 且 } u \in B\}$$

(3) 设有两个集合 A 和 B。由属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合，称为 A 与 B 的差集，用 $A \setminus B$ 表示，即

$$A \setminus B = \{u \mid u \in A \text{ 且 } u \notin B\}$$

(4) 设 A 为集合，U 为论域，由论域 U 中不属于 A 的所有元素组成的集合称为 A 关于 U 的补集，用 A^c 表示，即

$$A^c = U \setminus A = \{u \mid u \in U \text{ 且 } u \notin A\}$$

上述几种集合用图形表示，如图 1.1.1 所示。

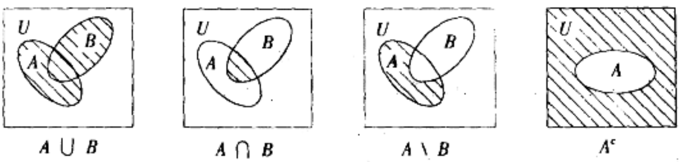

图 1.1.1　并、交、差和补集的示意图

2) 集合运算的性质

(1) 幂等律　$A \cap A = A,\ A \cup A = A$;

(2) 交换律　$A \cap B = B \cap A,\ A \cup B = B \cup A$;

(3) 结合律　$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

n 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的“交”与“并”可表示为

$$\begin{cases} A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \\ A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \end{cases}$$

例 1.1.2　设 $A_1 = \{a, b, d\}, A_2 = \{a, d\}, A_3 = \{c, d\}$，则

$$\bigcap_{i=1}^{3} A_i = \{d\},\ \bigcup_{i=1}^{3} A_i = \{a, b, c, d\}。$$

(4) 分配律　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

(5) 吸收律　$(A \cap B) \cup A = A;$

$(A \cup B) \cap A = A;$

(6) 还原律　$(A^c)^c = A;$

(7) 互补律　$A \cup A^c = U, A \cap A^c = \varnothing;$

(8) 对偶律　德·摩根(De.Morgen)定律为

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c。$$

1.1.3 集合的映射

设有集合 A 和 B，如果有一对应关系存在，对于任意 $a \in A$，有唯一的一个 $b \in B$ 与之对应，那么其对应是一个由 A 到 B 的映射 f，可表示为

$$f: A \longrightarrow B$$

对任意 $a \in A$ 经映射后变成 $b \in B$，表示为

$$b = f(a)$$

此时 A 称为 f 的“定义域”，而集合

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$$

称之为 f 的“值域”，显然 $f(A) \subseteq B$。

常用的几种映射

(1) 满射　若 $f(A) = B$，则称 f 为 A 到 B 上的满射。

(2) 单射　若映射 f 满足，只要 $f(a) = f(a')$ 时，就有 $a = a'$，则称 f 是单射。

(3) 双射　若映射 f 既是满射，又是单射，则称 f 为双射或称为 1 对 1 的映射。

例 1.1.3　$y = x^3, x \in (-\infty, +\infty), y \in (-\infty, +\infty)$，这个映射是 x 轴到 y 轴上的映射，亦称满射，同时也是单射，因此又是双射。

1.1.4 特征函数

每个集合 A 都有一个特征函数 $C_A(x)$，其定义如下：

$$C_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

其图形见图 1.1.2。

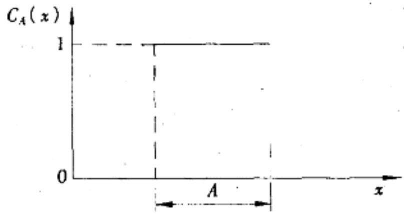

图 1.1.2　特征函数 $C_A(x)$ 的图形表示

特征函数的运算性质：

(1) $C_{A\cup B}(x) = \max(C_A(x), C_B(x))$

即并集 $A \cup B$ 的特征函数，等于 A、B 两集合的特征函数取最大值。

(2) $C_{A\cap B}(x) = \min(C_A(x), C_B(x))$

即交集 $A \cap B$ 的特征函数，等于 A、B 两集合的特征函数取最小值。

(3) $C_{A\setminus B}(x) = C_A(x) - \min(C_A(x), C_B(x))$

即差集 $A \setminus B$ 的特征函数，等于集合 A 的特征函数与交集 $A \cap B$ 的特征函数之差。

利用特征函数的定义，还可以得到

(4) $C_A(x) \equiv 0$　当且仅当 $A = \varnothing$；

(5) $C_A(x) \equiv 1$　当且仅当 A 等于论域 U；

(6) 若 $A \leqslant B$，则对 $\forall x \in U, C_A(x) \leqslant C_B(x)$；

(7) 若 $A = B$，则对 $\forall x \in U, C_A(x) = C_B(x)$。

1.2 模糊集合

1.2.1 模糊集定义

客观世界的许许多多概念都是模糊的,仅用绝对的属于或不属于来表达已经远远不能适应概念上的模糊性。例如,“老年人”这个经常使用的概念,同样具有模糊性,40 岁是否属于老年人,不是的话,那么 60 岁是老年人了,但 80 岁的老年人是否和 60 岁老年人同一概念呢?它们在“老年人”这一个属性上又有什么区别?再说,百岁老人又是怎样呢?于是,1965 年美国计算机与控制论专家扎德(L.A.Zadeh)教授提出了“模糊集合论”。

定义 1.2.1 设论域为 U,称映射

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}: U \longrightarrow [0,1]$$
$$u \longrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$$

确定了 U 的一个模糊(子)集 $\underset{\sim}{A}$。$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 称为 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数。常把 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 简记为 $\underset{\sim}{A}(u)$,$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 也表示元素 u 隶属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度,简称为隶属度。

模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 完全由其隶属函数所刻划。当 $\underset{\sim}{A}(u)$ 仅取 0,1 二数值时,$\underset{\sim}{A}$ 便是清晰集合。所以清晰集合是模糊集合的特例,模糊集是清晰集合的推广。

论域 U 上全体模糊子集构成的集合记为 $F(U)$,即

$$F(U) = \{\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{A}: U \longrightarrow [0,1]\}$$

称 $F(U)$ 为 U 上的模糊幂集。

例 1.2.1 设 $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$,$x_i$ 表示学生,对每个学生“性格开朗”的程度在[0,1]中打分,便得到从 U 到[0,1]的一个映射,记 $\underset{\sim}{A}$ = “性格开朗”:

$\underset{\sim}{A}(x_1) = 0.85, \underset{\sim}{A}(x_2) = 0.75, \underset{\sim}{A}(x_3) = 0.98, \underset{\sim}{A}(x_4) =$

$0.30, \underset{\sim}{A}(x_5)=0.60$

这样 $\underset{\sim}{A}(x)$ 就确定了一个模糊集 $\underset{\sim}{A}$，它表示出每个同学对"性格开朗"这一模糊概念的符合程度。

1.2.2 模糊集的表示法

对于论域 U 上模糊集合 $\underset{\sim}{A}$，通常采用的表示方式有如下4种：

1)Zadeh 表示法

(1) 当 U 为离散有限域$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$时，按 Zadeh 表示法有

$$\underset{\sim}{A}=\frac{\underset{\sim}{A}(x_1)}{x_1}+\frac{\underset{\sim}{A}(x_2)}{x_2}+\cdots+\frac{\underset{\sim}{A}(x_n)}{x_n}$$

式中，$\underset{\sim}{A}(x_i)/x_i$ 并不代表"分式"，而是表示元素 x_i 对于集合 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)$ 和元素 x_i 本身的对应关系，同样"+"也不表示"加"运算，而是表示在论域 U 上，组成模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 的全体元素 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 间排序与整体间的关系。

例 1.2.1 中的 $\underset{\sim}{A}$ 可表示为

$$\underset{\sim}{A}=\frac{0.85}{x_1}+\frac{0.75}{x_2}+\frac{0.98}{x_3}+\frac{0.30}{x_4}+\frac{0.60}{x_5}$$

(2) 当 U 为连续有限域时，按 Zadeh 给出的表示法为

$$\underset{\sim}{A}=\int_U \frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)}{u}$$

同样，这里的"$\int$"符号也不表示"求积"运算，而是表示连续论域 U 上的元素 u 与隶属度 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 一一对应关系的总体集合。

2) 函数描述法

根据模糊集合的定义，论域 U 上的模糊子集 $\underset{\sim}{A}$，完全可以由隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 来表征，而隶属函数值 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_i)$ 本身表示元素 u_i 对于 $\underset{\sim}{A}$ 隶属程度的大小。因此和清晰集合中的特征函数表示法一样，可以用隶属函数曲线来表示一个模糊子集 $\underset{\sim}{A}$。

例 1.2.2　以年龄作论域，取 $U = [0,200]$，扎德给出了“年老”$\underset{\sim}{O}$ 与“年轻”$\underset{\sim}{Y}$ 两个模糊子集的隶属函数为

$$\mu_{\underset{\sim}{O}}(u) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant u \leqslant 50 \\ \left[1 + \left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50 < u \leqslant 200 \end{cases} \tag{1.2.1}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{Y}}(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant u \leqslant 25 \\ \left[1 + \left(\dfrac{u-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & 25 < u \leqslant 200 \end{cases} \tag{1.2.2}$$

采用连续有限域的 Zadeh 表示法，模糊子集 $\underset{\sim}{O}$ 和 $\underset{\sim}{Y}$ 可分别表示为

$$\underset{\sim}{O} = \int_{0 \leqslant u \leqslant 50} \frac{0}{u} + \int_{50 < u \leqslant 200} \frac{\left[1 + \left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}}{u}$$

$$\underset{\sim}{Y} = \int_{0 \leqslant u \leqslant 25} \frac{1}{u} + \int_{25 < u \leqslant 200} \frac{\left[1 + \left(\dfrac{u-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}}{u}$$

隶属函数曲线如图 1.2.1 所示。

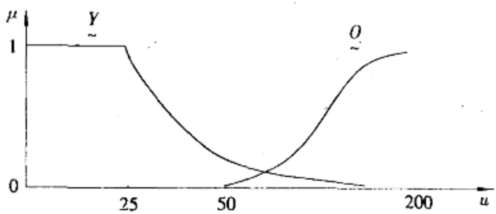

图 1.2.1　隶属函数的曲线图

3）序偶表示法

若将论域 U 中元素 u_i 与其对应的隶属度值 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_i)$ 组成序偶 $< u_i, \mu_{\underset{\sim}{A}}(u_i) >$ 来表示模糊子集 $\underset{\sim}{A}$。则可写成

$$\underset{\sim}{A} = \{ < u_1, \mu_{\underset{\sim}{A}}(u_1) >, < u_2, \mu_{\underset{\sim}{A}}(u_2) >, \cdots, < u_n, \mu_{\underset{\sim}{A}}(u_n) > \}$$

对于例 1.2.1 的 $\underset{\sim}{A}$ 可以表示为

$\underset{\sim}{A} = \{< x_1,0.85 >, < x_2,0.75 >, < x_3,0.98 >, < x_4,0.30 >, < x_5,0.60 >\}$

4) 向量表示法

如果将论域 U 中元素 $u_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 所对应的隶属度值 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_i)$ 写成向量形式来表示模糊子集 $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$,则可以是

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = (\underset{\sim}{A}(u_1), \underset{\sim}{A}(u_2), \cdots, \underset{\sim}{A}(u_n))$$

上式即为向量表示法。注意隶属度为 0 的项不能省略,必须列入。

例 1.2.1 的 $\underset{\sim}{A}$ 用向量表示法时,应写成

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = (0.85, 0.75, 0.98, 0.30, 0.60)$$

1.2.3 模糊集的运算

定义 1.2.2 设 $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in F(U)$($F(U)$ 为 U 上的模糊幂集),规定:

(1) $\underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{B} \Leftrightarrow$ 任意 $u \in U, \underset{\sim}{A}(u) \leqslant \underset{\sim}{B}(u)$;

(2) $\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B} \Leftrightarrow$ 任意 $u \in U, \underset{\sim}{A}(u) \leqslant \underset{\sim}{B}(u)$,并且存在 $u_0 \in U$,使 $\underset{\sim}{A}(u_0) < \underset{\sim}{B}(u_0)$;

(3) $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B} \Leftrightarrow$ 任意 $u \in U, \underset{\sim}{A}(u) = \underset{\sim}{B}(u)$;

(4) $\underset{\sim}{A} = \emptyset \Leftrightarrow$ 任意 $u \in U, \underset{\sim}{A}(u) = 0$;

(5) $\underset{\sim}{A} = U \Leftrightarrow$ 任意 $u \in U, \underset{\sim}{A}(u) = 1$。

依次称为模糊集的包含、真包含、相等、模糊零集(空集)和模糊全集。

1) 模糊集的运算

与清晰集合一样,在模糊集中也具有“交”、“并”与“补”集。

定义 1.2.3 设 $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in F(U)$,规定:

(1) 交集 $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$,任意 $u \in U$,则

$$(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B})(u) = \min\{\underset{\sim}{A}(u), \underset{\sim}{B}(u)\} = \underset{\sim}{A}(u) \wedge \underset{\sim}{B}(u)$$

(2) 并集 $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$,任意 $u \in U$,则

$$(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})(u) = \max\{\underset{\sim}{A}(u), \underset{\sim}{B}(u)\} = \underset{\sim}{A}(u) \vee \underset{\sim}{B}(u)$$

(3) 补集 $\underset{\sim}{A}^c$,任意 $u \in U$,则

$$\underset{\sim}{A}^c(u) = 1 - \underset{\sim}{A}(u)$$

式中,Zadeh算子"$\vee$"表示"取最大值"运算;"$\wedge$"表示"取最小值"运算。以上运算见图 1.2.2。

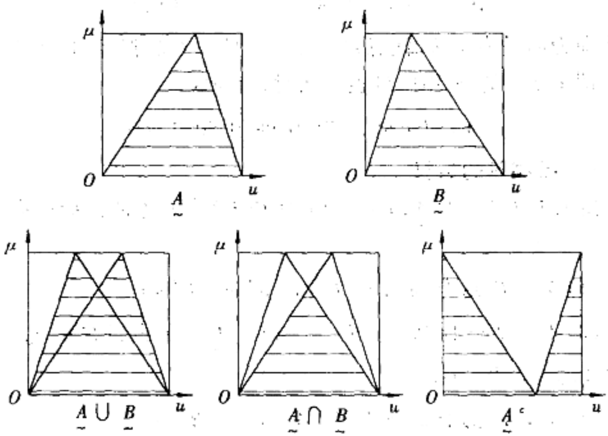

图 1.2.2　并、交和补运算的示意图

例1.2.3　设某种商品有8个不同的商标,表示商标"商誉高"和"价格合理"的隶属函数分别为(0.8,0.6,0.4,0.7,0.6,0.5,0.4,0.3)、(0.7,0.4,0.6,0.8,0.4,0.5,0.6,0.7),研究商标的信誉度。

设商标构成的论域为 $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_8\}$

"商誉高"的模糊子集为

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.8}{u_1} + \frac{0.6}{u_2} + \frac{0.4}{u_3} + \frac{0.7}{u_4} + \frac{0.6}{u_5} + \frac{0.5}{u_6} + \frac{0.4}{u_7} + \frac{0.3}{u_8}$$

"价格合理"的模糊子集为

$$\underset{\sim}{B} = \frac{0.7}{u_1} + \frac{0.4}{u_2} + \frac{0.6}{u_3} + \frac{0.8}{u_4} + \frac{0.4}{u_5} + \frac{0.5}{u_6} + \frac{0.6}{u_7} + \frac{0.7}{u_8}$$