聚焦考研

FOCUS 聚焦图书

中国最值得信赖的考研品牌

2011版考研数学

基础轻松过，高分自然来

500题

基础轻松过

潘正义 主编

（理工类）

世界图书出版公司

聚焦考研

FOCUS 聚焦图书

中国最值得信赖的考研品牌

2011版考研数学

基础轻松过，高分自然来

基础轻松过

500题

潘正义 主编

（理工类）

基本概念要吃透 有了基础轻松过

基础练习要做够 高数复习何用愁

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

考研数学基础轻松过．理工类／潘正义主编．—北京：
世界图书出版公司北京公司，2007.1(2010.3 修订)
ISBN 978—7—5062—8166—9

Ⅰ．考… Ⅱ．潘… Ⅲ．高等数学—研究生—入学考试—
习题 Ⅳ．O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 019511 号

考研数学基础轻松过(理工类)

主　　编：潘正义　　责任编辑：张中兴　　装帧设计：余曙敏

出　　版：世界图书出版公司北京公司
发　　行：世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号　电话：010-88861708　邮编：100089)
销　　售：各地新华书店
印　　刷：廊坊人民印刷厂

开　　本：787×1092 毫米　1/16　　印　　张：17.5
字　　数：350 千字　　版　　次：2010 年 3 月第 4 版　2010 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978—7—5062—8166—9/G·248　　定价：27.50 元

服务热线：010—88861708

前　言

考研数学复习离不开课本，因为课本承载了考研所需的全部基本原理和基础知识。但由于考生各自对教材的理解和抓住要点的能力不同，夯实基础知识和基本原理的结果就会有差异。为了让考生更好地运用基础知识和基本原理及定理，让考生尽快地形成数学整体架构，为下一阶段的系统复习打牢基础，于是《考研数学基础轻松过》一书就应运而生。

该书本着“抓基础、点重点”的原则，全面而系统的串联数学基础知识，点明重点，力求帮助读者在有限时间内熟悉数学基础知识和基本原理，对相应的原理和知识设置了相关例题链接，为了让读者巩固基础知识练习，例题我们并没有给出具体解题过程只给出参考答案，其目的是让读者自己思考解答进一步夯实基础。在每章节之后，附有精选出来的具有代表性的章节练习，对课本的相关知识点进行了题型化全面改造，试题基础与知识点全面衔接，对知识点的理解和运用具有很强的综合指导作用。

建议考生在使用本书时注意以下几点：

1. 先弄懂本书中相关基础知识和知识点，再作练习；

2. 不应该开始做题就看书中解题思路和参考答案，应该多思考一下方法，这样既能活跃您的数学思维，又能让您见题“不怵”，真正掌握数学解题精髓，提高您对知识点的灵活运用能力；

3. 将自己易错的题目归纳总结，反复揣摩推敲，形成思维定势。这样您一定会对数学解题有豁然开朗之感。

最后送考生两句话：

1. 考研数学，贵在总结，加深基本知识点的总结和记忆。题不在多，精练则灵，基础题训练夯实你的数学基础！

2. 今天的努力是为了明天的收获，今天的汗水将见证明天的成功！！

目　录

第一篇　高等数学

第一章　函数、极限、连续

本章要点

一、函数概念

1. 函数的定义及表示法

定义：设 x 和 y 是两个变量（均在实数集 R 内取值），D 是一个给定的非空数集，如果对于每个数 $x \in D$，按照某个对应法则 f，变量 y 都有惟一确定的数值和它对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作：$y = f(x)$. 其中 D 叫做函数 $y = f(x)$ 的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量，函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域.

函数的表示方法：公式法、表格法、图形法等.

2. 函数的性质

(1) 有界性　设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在正数 M，对于任意 $x \in I$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有界；如果这样的 M 不存在，则称函数 $y = f(x)$ 在上无界. 如果存在实数 M_1，对于任意 $x \in I$，恒有 $|f(x)| \leqslant M_1$，则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有上界；如果存在实数 M_2，对于任意 $x \in I$，恒有 $|f(x)| \geqslant M_2$，则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有下界. 易知函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有界的充分必要条件是它在 I 上既有上界又有下界.

基础过关题链接

【例 1】思考函数 $f(x) = \lg x^2$ 和函数 $g(x) = 2\lg x$ 是否是相同的函数？

【例 2】例如：$y = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上是否有界？

【注】函数有界或无界是相对于某个区间而言的，例如 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界，但在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上是有界的.

(2) 单调性　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于 $\forall x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$）则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调增加（或单调减少）的.

(3) 周期性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的常数 T，使得对于任一 $x\in D$，有 $x\pm T\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则 $f(x)$ 称为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

判别方法有两种：

① 利用定义法：对计算 $f(x+T)=f(x)$ 是否成立. 如果成立，则 $f(x)$ 周期为 T.

② 间接法：利用常见的周期函数进行判别.

(4) 奇偶性　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对任一 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$（或 $f(-x)=-f(x)$），则称函数 $f(x)$ 为偶函数（或奇函数）. 偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于坐标原点对称.

3. **复合函数**

设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 为两个函数，若 $\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域有非空交集，则由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 可复合而成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，u 称为中间变量.

4. **反函数**

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 若对 $\forall y\in W$，存在惟一确定的 $x\in D$，满足 $y=f(x)$，则得到 x 是 y 的函数，记为 $x=\varphi(y)$，称为 $y=f(x)$ 的反函数. 习惯上将的 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.

5. **隐函数**

设有关系式 $F(x,y)=0$，若对 $\forall x\in D$ 存在惟一确定的 y 满足 $F(x,y)=0$ 与 x 相对应，由此确定的 y 与 x 的函数关系 $y=y(x)$ 称为由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数.

【例 3】 设 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 上以 T 为周期的连续函数，则下列函数中也是以 T 为周期的是

A. $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$

B. $\int_{-x}^0 f(t)\mathrm{d}t$

C. $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_{-x}^0 f(t)\mathrm{d}t$

D. $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_x^0 f(t)\mathrm{d}t$　　【　　】

【例 4】 设函数 $f(x)=\begin{cases}1,|x|\leqslant 1\\ 0,|x|>1\end{cases}$，则 $f[f(x)]=$ ________.

【例 5】 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,x\leqslant 0\\ x^3,x>0\end{cases}$ 的反函数是 $g(x)$，求 $g(4)$.

6. 基本初等函数及初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合运算所构成并可用一个式子表示的函数称为初等函数.

7. 分段函数

在自变量的不同变化范围中对应法则用不同式子来表示的函数称为分段函数.

例如：$f(x)=\begin{cases}x, x<0\\ 1, x\geqslant 0\end{cases}$ 是分段函数.

【注】分段函数的复合分段函数在分段点的极限、连续性、可导性以及分段函数的不定积分与定积分都是考试的重点和难点，必须引起考生足够的重视. 且分段函数一般不是初等函数.

二、极限

1. 极限的定义

(1) 数列极限的定义　对于数列$\{x_n\}$，常数a，若对于任意给定的正数$\varepsilon>0$，存在正整数N，当$n>N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$恒成立，则称常数a为数列$\{x_n\}$的极限，或者称数列$\{x_n\}$收敛于a，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(2) 当$x\to\infty$时，函数$f(x)$的极限　若存在常数A，对于任意给定的正数$\varepsilon>0$，存在正数X，当$|x|>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$恒成立，则称常数A为$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

(3) 当$x\to x_0$时(x_0为有限值)函数$f(x)$的极限　若存在常数A，对于任意给定的正数$\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$恒成立，则称常数A为当$x\to x_0$时的极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

(4) 当$x\to x_0$时(x_0为有限值)函数的左右极限　若存在常数A，对于任意给定的正数$\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$0<x-x_0<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$恒成立，则称常数A为当$x\to x_0$时的右极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$，或$f(x_0+0)=A$，或$f(x_0^+)=A$.

【例 6】$\lim\limits_{x\to 0}\left(\arctan\dfrac{1}{x}+\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}\right)=$ ________.

【参考答案】

1. 不同；
2. 无界；
3. C；
4. 1；
5. $g(4)=-2$；
6. $\dfrac{\pi}{2}$.

基础过关题链接

【例 1】$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=$ ________.

【例 2】若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则下列极限一定存在的是：　(　　)

A. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^a$ (a为实数)

B. $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|$

C. $\lim\limits_{x\to x_0}\ln f(x)$

D. $\lim\limits_{x\to x_0}\arcsin f(x)$

【例 3】设函数$f(x)$在点$x=0$的左右极限均存在，则下列等式中不正确的是　(　　)

A. $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(-x)$

B. $\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$

若存在常数 A，对于任意给定的正数 $\varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立，则称常数 A 为当 $x \to x_0$ 时的左极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x_0 - 0) = A$ 或 $f(x_0^-) = A$.

2. 数列极限的基本性质

定理 1.1（极限的惟一性）如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么它的极限惟一.

定理 1.2（收敛数列的有界性）如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界，即存在常数 $M > 0$，使得对 $\forall n$，有 $|x_n| \leqslant M$.

定理 1.3（收敛数列的保号性）如果 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$，且 $a > 0$（或 $a < 0$），那么存在正整数 N，当 $n > N$ 时，都有 $x_n > 0$（或 $x_n < 0$）.

推论 1.1　如果 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$，$\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$，且 $a > b$，那么存在正整数 N，当 $n > N$ 时，都有 $x_n > y_n$.

推论 1.2　如果存在正整数 N，当 $n > N$ 时，都有 $x_n \geqslant 0$（或 $x_n \leqslant 0$），且 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$，那么 $a \geqslant 0$（或 $a \leqslant 0$）.

定理 1.4（收敛数列与其子数列间的关系）如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么它的任一子数列也收敛于 a.

3. 函数极限的基本性质

定理 1.5（极限的惟一性）如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$，那么 $A = B$.

定理 1.6（函数极限的局部有界性）如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，那么 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域 $U_0(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 内有界，即存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x)| \leqslant M$.

定理 1.7（函数极限的局部保号性）如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，而且 $A > 0$（或 $A < 0$），那么存在常数 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）.

如果在 x_0 的某空心邻域内 $f(x) \geqslant 0$（或 $f(x) \leqslant 0$），而且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，那么 $A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）.

C. $\lim\limits_{x \to 0} f(|x|) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

D. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

【例 4】 设 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = -1$，当 $x \to 0$ 时，$\ln\cos x^2$ 是比 $x^n f(x)$ 高阶的无穷小量，而 $x^n f(x)$ 是比 $e^{\sin^2 x} - 1$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

【例 5】 设 $\lim\limits_{n \to \infty}(y_{n-1} - y_n) = 0$，则数列 $\{y_n\}$ 收敛，如果（　　）

A. $\{y_n\}$ 是单调数列

B. $\{y_n\}$ 是有界数列

C. $\{y_{2n}\}$ 与 $\{y_{2n+1}\}$ 都是单调数列

D. $\{y_{2n}\}$ 与 $\{y_{2n+1}\}$ 收敛

【参考答案】

1. ln2；

2. B；

3. D；

4. A；

5. D.

定理 1.8(函数极限与数列极限的关系) 如果极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$存在，$\{x_n\}$为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足 $x_n\neq x_0$，那么相应的函数列$\{f(x_n)\}$必收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

定理 1.9(复合函数的极限) 设函数 $y=f(u)$ 在点 $u=a$ 处连续，又$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$的极限为$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(a)$.

4. 无穷小量与无穷大量

(1) 定义

无穷小量　如果 $\lim f(x)=0(x\to x_0$ 或 $x\to\infty)$，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 时的无穷小量.

无穷大量　如果 $\lim f(x)=\infty(x\to x_0$ 或 $x\to\infty)$，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 时的无穷大量.

【注】不要把无穷小量与很小的数混为一谈，“0”是惟一可以作为无穷小量的常数，也不要无穷大量与很大的数混为一谈，任何常数都不是无穷大量. 无穷大量必定是某区间上的无界量，但无界量不一定是无穷大量.

例如：$f(x)=x\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是无界量，但当 $x\to\infty$ 时不是无穷大量.

(2) 性质

性质 1　$\lim f(x)=A\Leftrightarrow A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是$(x\to x_0$ 或 $x\to\infty)$ 无穷小量.

性质 2　有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量；

有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量；

无穷小量与有界量的乘积仍是无穷小量.

(3) 无穷小量的比较

定理 1.10(等价无穷小替换定理) 设在自变量 x 的同一变化过程中，$\alpha_1(x),\alpha_2(x),\beta_1(x),\beta_2(x)$ 都是无穷小，而且 $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x),\beta_1(x)\sim\beta_2(x)$，如果$\lim\dfrac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}=A$，则 $\lim\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim\dfrac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}=A$.

公式回顾

① 常用等价无穷小代换

当 $x\to 0$ 时，有

$\sin x\sim x$,

$\tan x\sim x$,

$\arcsin x\sim x$,

$\arctan x\sim x$,

$e^x-1\sim x$,

$a^x-1\sim x\ln a$,

$\ln(1+x)\sim x$,

$(1+x)^m-1\sim mx$,

$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,

$(1+\alpha x)^\beta-1\sim\alpha\beta x$.

② 两个重要极限：

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

或$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$.

5. **极限的四则运算法则**

如果 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,则有:

$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;$\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$;

$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$; $\lim f(x)^{g(x)}=A^B(A>0)$.

【注】极限运算法则成立的前提条件是极限 $\lim f(x)$,$\lim g(x)$ 均存在.

不存在的极限参与运算时,有下列结论:

存在 ± 存在 = 存在,

不存在 ± 不存在 = 不确定,

存在 × 不存在 = 不确定.

6. **极限存在的判别方法**

定理 1.11(单调有界定理)单调增加(或单调减少)且有上界(或有下界)的数列 $\{x_n\}$ 必有极限.

定理 1.12(夹逼定理) 如果数列 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$ 以及 $\{z_n\}$ 满足下列条件:

(1) $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,3\cdots)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

【注】求 $1^\infty,0^0,\infty^0$ 这三种类型的极限,可引入对数先化为"$0\cdot\infty$"型的极限,再化为"$\dfrac{0}{0}$"型或"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型的极限.

例如:

① $\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}$($\lim g(x)\ln f(x)$ 是"$0\cdot\infty$"型的极限).

② 对于"1^∞"型,有 $\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}=e^{\lim g(x)[f(x)-1]}$.

③ 常见的重要极限:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{a^x}=0,(a>1)$

或 $\lim\limits_{x\to\infty}x^na^{-x}=0,(a>1)$

$\lim\limits_{x\to 0^+}x^a\ln x=0,(a>0)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{n}$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a|}=1(a\neq 0)$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$;

$\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=1$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}0, & m<n\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,(b_0\neq 0)\\ \infty, & m>n.\end{cases}$$

三、函数的连续性

1. 连续性定义

(1) 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，那么称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 左连续；如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 右连续.

(2) 如果对于 $\forall x_0\in(a,b)$，$f(x)$ 在 x_0 连续，称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

(3) 如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且在点 $x=a$ 右连续，在点 $x=b$ 左连续，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

定理 1.13 $f(x)$ 在 x_0 点连续的充要条件

$f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在点 x_0 既左连续，又右连续.

2. 函数的间断点及其分类

(1) 定义：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义. 如果函数 $f(x)$ 有下列三种情形之一：

在点 x_0 没有定义；

虽在点 x_0 有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

虽在点 x_0 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$；

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，而点 x_0 称为函数的不连续点或间断点.

(2) 分类：

第一类间断点：$f(x)$ 在 x_0 处的左右极限均存在的间断点.

进一步细分：在 x_0 处的左右极限均存在且相等的间断点，称可去间断点；在 x_0 处的左右极限存在但不相等的间断点，称跳跃间断点.

第二类间断点：$f(x)$ 在 x_0 的左右极限中至少有一个不存在的间断点.

进一步细分：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 的 x_0 称为 $f(x)$ 的无穷间断点，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 因振荡不存

基础过关题链接

【例 1】设 $f(x),g(x)$ 在 x_0 不连续，则 ( )

A. $f(x)+g(x)$ 在 x_0 不连续，$f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 连续

B. $f(x)+g(x)$ 和 $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 点处都不连续

C. $f(x)+g(x)$ 在 x_0 连续，$f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 不连续

D. $f(x)+g(x)$ 和 $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 的连续性不确定

【例 2】设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，$g(x)=\begin{cases}e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则

A. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的可去间断点

B. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点

C. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点

D. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类跳跃间断点

【例 3】设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的一个

A. 连续点　　B. 可去间断点

C. 第二类间断点　　D. 跳跃间断点

在的称为$f(x)$的振荡间断点.

【注】① 判断函数的连续性可利用函数在一点连续的定义及初等函数的连续性；② 对于分段函数，利用$f(x)$在点x_0连续$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$.

3. 闭区间上连续函数的性质

定理 1.14(有界性与最大值最小值定理) 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，那么$f(x)$在$[a,b]$上有界且一定能取得最大值和最小值，即存在正数$N>0$，使$|f(x)|\leqslant N$，以及在闭区间$[a,b]$上有两点ξ_1,ξ_2，使得$f(\xi_1)=m$，$f(\xi_2)=M$，其中m,M分别是$f(x)$在$[a,b]$上的最小值和最大值.

定理 1.15(介值定理) 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且在这区间的端点取不同的函数值$f(a)=A$及$f(b)=B$，那么对于A与B之间的任意一个数C，在开区间(a,b)内至少有一点ξ，使得$f(\xi)=C$.

推论 1.3 设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，m,M分别是$f(x)$在$[a,b]$上的最小值和最大值，则对任意常数C，$m\leqslant C\leqslant M$，必存在$\xi\in[a,b]$，使$f(\xi)=C$.

定理 1.16(零点定理) 设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)$与$f(b)$异号，即$f(a)\cdot f(b)<0$，那么在开区间(a,b)内至少有一点ξ，使得$f(\xi)=0$.

【例 4】讨论函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^n+x^n)}{n+1}(x>0)$在定义域内的连续性.

【例 5】$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\ln(1+2x)}{x}+b, & x>0\\ a, & x=0,\\ \dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}, & x<0\end{cases}$

则$a=$______，$b=$______时，$f(x)$在$x=0$处连续.

【参考答案】

1. D；2. A；3. D；

4. $f(x)$在$(0,\infty)$内是连续的；

5. $\dfrac{1}{3}$，$-\dfrac{5}{3}$.

基础攻关

1. 已知$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^2+bx-\ln(1-2x+x^2)}{x^2}=5$，则______

A. $a=-4,b=2$　　B. $a=4,b=-2$

C. $a=3,b=-2$　　D. $a=-3,b=2$　　【　】

2. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$存在，$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$不存在，则正确的是

A. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不一定存在　　B. $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$不一定存在

C. $\lim\limits_{x\to x_0}[f^2(x)-g^2(x)]$必不存在　　D. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在　　【　】

3. 设$f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1+x$，且$\varphi(x)\geqslant 0$，则$\varphi(x)$在其定义域内是

A. 有界函数　　B. 周期函数

C. 单调增加函数　　D. 单调减少函数　　【　】

4. 设$f(x),g(x)$在x_0不连续，则

A. $f(x)+g(x)$在x_0不连续，$f(x)\cdot g(x)$在x_0连续

B. $f(x)+g(x)$和$f(x)\cdot g(x)$在x_0都不连续

C. $f(x)+g(x)$在x_0连续，$f(x)\cdot g(x)$在x_0不连续

D. $f(x)+g(x)$和$f(x)\cdot g(x)$在x_0的连续性不确定　　【　】

5. 设 $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$，$g(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$ 则

A. $f[g(x)]=\begin{cases}x^2, x<0\\ 0, x\geqslant 0\end{cases}$　B. $g[f(x)]=\begin{cases}x^2, x<0\\ 0, x\geqslant 0\end{cases}$

C. $f[g(x)]=\begin{cases}0, x<0\\ x^2, x\geqslant 0\end{cases}$　D. $g[f(x)]=\begin{cases}x, x<0\\ x^2, x\geqslant 0\end{cases}$　【　】

6. 设方程 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$，($a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为常数)，且 $a_n<0$，则

A. 不能确定方程是否有实根　B. 方程至少有一个正实根

C. 方程至少有一个负实根　D. 方程没有实根　【　】

7. $f(x)$ 在 x_0 处存在左、右导数，则 $f(x)$ 在 x_0 点

A. 可导　B. 连续　C. 不可导　D. 不连续【　】

8. 设 $f(x)=\begin{cases}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}} & x>0\\ b & x\leqslant 0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}\dfrac{3\sin(x-1)}{x-1} & x>1\\ e^{2ax}-e^{ax}+1 & x\leqslant 1\end{cases}$，若 $f(x)+g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则有

A. $a=e^2$，$b=\ln 2$　B. $a=\ln 2$，$b=e^2$

C. $a=\ln 2$，b 为任意实数　D. $b=e^2$，a 为任意实数　【　】

9. 设 $f(x)$ 为在 $x=0$ 点可导的奇函数，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(nx)-3f(x)}{x}=$ ________.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-x+\frac{1}{2}x^2\right)e^x-\sqrt{1+x^3}}{x^3}=$ ________.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{e^{\tan x}-e^{\sin x}}=$ ________.

12. $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}=$ ________.

13. $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln^2 x\cdot\ln\left(1+\dfrac{x}{\ln x}\right)=$ ________.

14. 已知当 $x\to 0$ 时，$e^{x^2}-\ln\cos x-1$ 与 kx^2 是等价无穷小量，则 $k=$ ________.

15. 设 $f(x)=\dfrac{ax}{2x+3}$，且 $f[f(x)]=x$，则 $a=$ ________.

第二章　导数与微分

本章要点

一、导数的概念

1. 导数的定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx（点 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内）时，相应地，函数取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；如果 Δy 与 Δx 之比当 $\Delta x\to 0$ 时的极限存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称这个极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

2. 左导数、右导数

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域内有定义，则称

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\text{（存在）}$$

为 $f(x)$ 在点 x_0 的左导数；

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个右邻域内有定义，则称

$$f_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\text{（存在）}$$

为 $f(x)$ 在点 x_0 的右导数.

显然，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导的充要条件是左、右导数都存在且相等.

即 $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f_-(x_0)=f_+(x_0)$.

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内的每一点都可导，就称 $f(x)$ 在开区间 I 内可

基础过关题链接

【例 1】已知 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}=\qquad(\quad)$$

A. $f'(a)$　　B. $2f'(a)$

C. 0　　D. $f'(2a)$

【例 2】设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是在 $x=0$ 处可导的　（　）

A. 充分必要条件

B. 充分条件但非必要条件

C. 必要条件但非充分条件

D. 既非充分条件又非必要条件

【例 3】$f(x)$ 在 x_0 处存在左、右导数，则 $f(x)$ 在 x_0 点　（　）

A. 可导　　B. 连续

C. 不可导　　D. 不连续

导，对任意$x \in I$，都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值，这样构成一个新的函数，称之为原来函数 $y = f(x)$ 的导函数，简记为导数，记作 y'，$f'(x)$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$，即

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

如果函数 $y = f(x)$ 在开区间(a,b) 内可导，且 $f'_{+}(a)$ 及 $f'_{-}(b)$ 都存在，则称 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 上可导.

3. 导数的几何意义

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率，即 $f'(x_0) = \tan\alpha$，其中 α 是切线的倾角.

如果 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数为无穷大，这时曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处具有垂直于 x 轴的切线 $x = x_0$.

4. 导数的物理意义

若质点做直线运动，在t时刻质点的坐标为$f(t)$，则 $f'(t_0)$ 表示质点在 t_0 时刻的瞬时速度.

二、导数的计算

1. 基本初等函数的导数公式

2. 函数的和、差、积、商的求导法则

设 $u = u(x)$，$v = v(x)$ 都可导，则

$(u \pm v)' = u' \pm v'$； $(cu)' = cu'$（c 是常数）；

$(uv)' = u'v + uv'$； $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}(v \neq 0)$.

3. 反函数的求导法则

设 $x = f(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导且 $f'(y) \neq 0$，则它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 在区间内 $I_x = f(I_y)$ 也可导，且$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)}$ 或$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$.

【例 4】 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{2x+y} - \cos(xy) = \mathrm{e} - 1$ 所确定，则曲线 $y = f(x)$ 在点(0,1) 处的法线方程为__________.

【参考答案】

1. B；
2. A；
3. B；
4. $x - 2y + 2 = 0$.

基础过关题链接

【例 1】 设 $F(x) = g(x)\varphi(x)$，$\varphi(x)$ 在 $x = a$ 处连续但不可导，又 $g'(a)$ 存在，则 $g(a) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x = a$ 处可导的 （　　）

A. 充要条件

B. 必要非充分条件

C. 充分非必要条件

D. 非充分非必要条件