

西安交大  
考研

2011版

数学考研

新干线

# 高等 数学

武忠祥



西安交通大学出版社

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

2011 版  
数学考研新干线  
高等数学

西安交通大学出版社

## 内容简介

本书是为准备考研的同学复习高等数学(微积分)编写的辅导讲义,力求用不多的篇幅,在较短的时间内帮助同学理解基本概念,掌握基本理论、基本公式、重点及难点,澄清常犯的错误与疑惑。同时,通过典型例题,在归纳题型的基础上帮助同学们梳理解题思路,掌握常用的解题方法和技巧。

---

### 图书在版编目(CIP)数据

数学考研新干线 高等数学(2011版)/武忠祥编著. —西安:西安交通大学出版社,2010.4

(数学135系列. 数学考研新干线)

ISBN 978-7-5605-3101-4

I. 数… II. 武… III. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料  
IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 053995 号

---

书 名 数学考研新干线 高等数学(2011版)  
编 著 武忠祥  
责任编辑 叶涛

出版发行 西安交通大学出版社  
(西安市兴庆南路10号 邮政编码710049)

网 址 <http://www.xjtupress.com>  
电 话 (029)82668357 82667874(发行部)  
(029)82668315 82669096(总编办)

传 真 (029)82668280  
印 刷 三河市文阁印刷厂

---

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 13 字数 309千字  
版次/印次 2010年4月第1版 2010年4月第1次印刷  
书 号 ISBN 978-7-5605-3101-4/O·293  
定 价 24.00元

---

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。

订购热线:(029)82665248 (029)82665249

投稿热线:(029)82664954

读者信箱:jdlgy@yahoo.cn

版权所有 侵权必究

## 前 言

本书是为准备考研的同学复习高等数学(微积分)而编写的辅导讲义,由编者多年来在考研辅导班的讲稿改写而成.全书共分九章及一个附录,每章均由考试内容要点精讲和常考题型的方法与技巧两部分组成.

本书力求用不多的篇幅,在较短的时间内帮助同学理解基本概念,掌握基本理论、基本公式、重点及难点,澄清常犯的错误与疑惑.同时,通过典型例题,在归纳题型的基础上帮助同学们梳理解题思路,掌握常用的解题方法和技巧.

本书为了考研同学使用方便,将几种试卷共同要求的内容编写在本讲义的前面.其中数学二只要求前六章,数学三只要求前七章,数学一全要.

希望本讲义能对复习考研的同学有较大的帮助.由于编者水平有限,疏漏和错误之处在所难免,欢迎批评指正.

祝同学们在考研的路上一路顺利!

编 者

2010年3月

# 目 录

## 前言

<b>第一章 函数 极限 连续</b> .....	(1)
<b>第一节 函数</b> .....	(1)
■ 考试内容要点精讲 .....	(1)
■ 常考题型的解题方法与技巧 .....	(2)
题型一 复合函数 .....	(2)
题型二 函数性态 .....	(3)
<b>第二节 极限</b> .....	(5)
■ 考试内容要点精讲 .....	(5)
■ 常考题型的解题方法与技巧 .....	(7)
题型一 极限的概念、性质及存在准则 .....	(7)
题型二 求极限 .....	(9)
方法 1 利用有理运算法则求极限 .....	(9)
方法 2 利用基本极限求极限 .....	(10)
方法 3 利用等价无穷小代换求极限 .....	(10)
方法 4 洛必达法则 .....	(11)
方法 5 泰勒公式 .....	(14)
方法 6 利用夹逼准则求极限 .....	(16)
方法 7 利用单调有界准则求极限 .....	(17)
方法 8 利用定积分的定义求极限 .....	(18)
题型三 已知极限确定参数 .....	(19)
题型四 无穷小量阶的比较 .....	(20)
<b>第三节 连续</b> .....	(22)
■ 考试内容要点精讲 .....	(22)
■ 常考题型的解题方法与技巧 .....	(23)
题型一 讨论连续性及其间断点类型 .....	(23)
题型二 介值定理、最值定理及零点定理的证明题 .....	(25)
<b>第二章 一元函数微分学</b> .....	(27)
<b>第一节 导数与微分</b> .....	(27)
■ 考试内容要点精讲 .....	(27)
■ 常考题型的解题方法与技巧 .....	(29)
题型一 可导性的讨论(导数定义) .....	(29)

题型二	复合函数导数	(33)
题型三	隐函数的导数	(34)
题型四	参数方程的导数	(35)
题型五	对数求导法	(36)
题型六	高阶导数	(36)
第二节	导数应用	(38)
■	考试内容要点精讲	(38)
■	常考题型的解题方法与技巧	(40)
题型一	极值与最值	(40)
题型二	方程的根	(42)
1.	存在性	(42)
2.	根的个数	(42)
题型三	不等式证明	(44)
题型四	求渐近线	(46)
题型五	微分中值定理证明题	(47)
1.	证明存在一个点 $\xi \in (a, b)$ , 使 $F'(\xi) = 0$	(47)
2.	证明存在两个点 $\xi, \eta \in (a, b)$	(50)
3.	泰勒公式的证明题	(52)
第三章	一元函数积分学	(54)
第一节	不定积分	(54)
■	考试内容要点精讲	(54)
■	常考题型的解题方法与技巧	(56)
题型一	计算不定积分	(56)
题型二	不定积分杂例	(60)
第二节	定积分	(61)
■	考试内容要点精讲	(61)
■	常考题型的解题方法与技巧	(63)
题型一	定积分计算	(63)
题型二	与定积分有关的综合题	(67)
题型三	积分不等式	(71)
第三节	反常积分	(74)
■	考试内容要点精讲	(74)
■	常考题型的解题方法与技巧	(74)
题型一	反常积分计算	(74)
题型二	反常积分的概念与敛散性	(75)
第四节	定积分应用	(76)
■	考试内容要点精讲	(76)
■	常考题型的解题方法与技巧	(77)
题型一	几何应用	(77)

题型二 物理应用 .....	(78)
第五节 导数在经济学中的应用(数学一、二不要求) .....	(78)
■ 考试内容要点精讲 .....	(78)
■ 常考题型的解题方法与技巧 .....	(80)
<b>第四章 多元函数微分学</b> .....	(83)
第一节 重极限、连续、偏导数、全微分(概念,理论) .....	(83)
■ 考试内容要点精讲 .....	(83)
■ 常考题型的解题方法与技巧 .....	(84)
题型一 求重极限 .....	(84)
题型二 证明重极限不存在 .....	(85)
题型三 讨论连续性、可导性、可微性 .....	(86)
第二节 偏导数与全微分的计算 .....	(88)
■ 考试内容要点精讲 .....	(88)
■ 常考题型的解题方法与技巧 .....	(89)
题型一 求一点处的偏导数与全微分 .....	(89)
题型二 求已给出具体表达式函数的偏导数与全微分 .....	(90)
题型三 含有抽象函数的复合函数偏导数与全微分 .....	(92)
题型四 隐函数的偏导数与全微分 .....	(95)
第三节 极值与最值 .....	(98)
■ 考试内容要点精讲 .....	(98)
■ 常考题型的解题方法与技巧 .....	(99)
题型一 求无条件极值 .....	(99)
题型二 求条件极值 .....	(101)
题型三 求最大最小值 .....	(102)
<b>第五章 二重积分</b> .....	(107)
■ 考试内容要点精讲 .....	(107)
■ 常考题型的解题方法与技巧 .....	(108)
题型一 计算二重积分 .....	(108)
题型二 累次积分交换次序及计算 .....	(113)
题型三 与二重积分有关的综合题 .....	(115)
题型四 与二重积分有关的积分不等式问题 .....	(118)
<b>第六章 常微分方程</b> .....	(120)
■ 考试内容要点精讲 .....	(120)
■ 常考题型的解题方法与技巧 .....	(122)
题型一 微分方程求解 .....	(122)
题型二 综合题 .....	(126)
题型三 应用题 .....	(129)

<b>第七章 无穷级数</b> .....	(131)
<b>第一节 常数项级数</b> .....	(131)
■ 考试内容要点精讲.....	(131)
■ 常考题型的解题方法与技巧.....	(132)
题型一 正项级数敛散性的判定.....	(132)
题型二 交错级数敛散性判定.....	(135)
题型三 任意项级数敛散性判定.....	(136)
题型四 证明题与综合题.....	(139)
<b>第二节 幂级数</b> .....	(141)
■ 考试内容要点精讲.....	(141)
■ 常考题型的解题方法与技巧.....	(142)
题型一 求收敛域.....	(142)
题型二 将函数展开为幂级数.....	(145)
题型三 级数求和.....	(147)
<b>第三节 傅里叶级数</b> .....	(151)
■ 考试内容要点精讲.....	(151)
■ 常考题型的解题方法与技巧.....	(153)
题型一 有关收敛定理的问题.....	(153)
题型二 将函数展开为傅里叶级数.....	(154)
<b>第八章 向量代数与空间解析几何及多元微分学在几何上的应用</b> .....	(156)
<b>第一节 向量代数</b> .....	(156)
■ 考试内容要点精讲.....	(156)
■ 常考题型的解题方法与技巧.....	(157)
题型一 向量运算.....	(157)
题型二 向量运算的应用及向量的位置关系.....	(158)
<b>第二节 空间平面与直线</b> .....	(158)
■ 考试内容要点精讲.....	(158)
■ 常考题型的解题方法与技巧.....	(159)
题型一 建立直线方程.....	(159)
题型二 建立平面方程.....	(161)
题型三 与平面和直线位置关系有关的问题.....	(161)
<b>第三节 曲面与空间曲线</b> .....	(163)
■ 考试内容要点精讲.....	(163)
■ 常考题型的解题方法与技巧.....	(164)
题型一 建立柱面方程.....	(164)
题型二 建立旋转面方程.....	(164)
题型三 求空间曲线的投影曲线方程.....	(165)
<b>第四节 多元微分在几何上的应用</b> .....	(165)
■ 考试内容要点精讲.....	(165)



■ 常考题型的解题方法与技巧·····	(166)
题型一 建立曲面的切平面和法线方程·····	(166)
题型二 建立空间曲线的切线和法平面方程·····	(168)
第五节 方向导数与梯度·····	(169)
■ 考试内容要点精讲·····	(169)
■ 常考题型的解题方法与技巧·····	(169)
题型一 方向导数与梯度的计算·····	(169)
第九章 多元积分学及其应用·····	(172)
第一节 三重积分与线面积分·····	(172)
■ 考试内容要点精讲·····	(172)
■ 常考题型的解题方法与技巧·····	(175)
题型一 计算三重积分·····	(175)
题型二 更换三重积分次序·····	(176)
题型三 计算对弧长的线积分·····	(177)
题型四 计算对坐标的线积分·····	(178)
题型五 计算对面积的面积分·····	(183)
题型六 计算对坐标的面积分·····	(185)
第二节 多元积分应用·····	(187)
■ 考试内容要点精讲·····	(187)
■ 常考题型的解题方法与技巧·····	(188)
题型一 求几何量·····	(188)
题型二 计算物理量·····	(188)
第三节 场论初步·····	(190)
■ 考试内容要点精讲·····	(190)
■ 常考题型的解题方法与技巧·····	(190)
题型一 梯度 散度 旋度计算·····	(190)
客观题解题方法与技巧·····	(193)

# 第一章 函数极限连续

## 第一节 函数

### ■ 考试内容要点精讲

1. 函数的概念(定义、定义域、对应法则、值域)

2. 函数的性态

1) 单调性

**定义** 单调增:  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

单调不减:  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

**判定** (1) 定义;

(2) 导数: 设  $f(x)$  在区间  $I$  上可导, 则

a)  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  单调增;

b)  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x)$  单调不减.

2) 奇偶性

**定义** 偶函数:  $f(-x) = f(x)$ ; 奇函数:  $f(-x) = -f(x)$ .

**判定** (1) 定义;

(2) 设  $f(x)$  可导, 则:

a)  $f(x)$  是奇函数  $\Rightarrow f'(x)$  是偶函数;

b)  $f(x)$  是偶函数  $\Rightarrow f'(x)$  是奇函数.

(3) 连续的奇函数其原函数都是偶函数;  
连续的偶函数其原函数之一是奇函数.

3) 周期性

**定义**  $f(x+T) = f(x)$

**判定** (1) 定义;

(2) 可导的周期函数其导函数为周期函数;

(3) 周期函数的原函数不一定是周期函数.

4) 有界性

**定义** 若  $\exists M > 0, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$ ; 则称  $f(x)$  在  $I$  上有

界.

**判定**

(1) 定义;

(2)  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续  $\Rightarrow f(x)$  在  $[a, b]$  上有界;(3)  $f(x)$  在  $(a, b)$  上连续, 且  $f(a+0)$  和  $f(b-0)$  存在  $\Rightarrow f(x)$  在  $(a, b)$  上有界;(4)  $f'(x)$  在区间  $I$  (有限) 上有界  $\Rightarrow f(x)$  在  $I$  上有界.

3. 复合函数与反函数 (函数分解成简单函数的复合, 分段函数的复合)

#### 4. 基本初等函数与初等函数

基本初等函数:

常数, 幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数, 反三角函数. 了解它们的定义域, 性质, 图形.

初等函数:

由基本初等函数经过有限次的加、减、乘、除和复合所得到且能用一个解析式表示的函数.

### ■ 常考题型的解题方法与技巧

#### 题型一 复合函数

例 1.1 已知  $f(x+1)$  的定义域为  $[0, a]$ , ( $a > 0$ ), 则  $f(x)$  的定义域为

- (A)  $[-1, a-1]$ . (B)  $[1, a+1]$ .  
(C)  $[a, a+1]$ . (D)  $[a-1, a]$ .

解 应选(B).

例 1.2 已知  $f(x) = e^{x^2}$ ,  $f[\varphi(x)] = 1-x$ , 且  $\varphi(x) \geq 0$ , 求  $\varphi(x)$  及其定义域.

解 由  $f(x) = e^{x^2}$ ,  $f[\varphi(x)] = 1-x$ , 知

$$e^{\varphi^2(x)} = 1-x$$

$$\varphi^2(x) = \ln(1-x) \quad (x \leq 0)$$

$$\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)} \quad (x \leq 0)$$

例 1.3 设  $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} 2-x^2, & |x| < 1 \\ |x|-2, & 1 \leq |x| \end{cases}$ . 试求  $f[g(x)]$ ,  $g[f(x)]$ .

解  $f[g(x)] = \begin{cases} 0, & 1 \leq |x| < 2 \\ 1, & |x| < 1 \text{ 或 } |x| \geq 2 \end{cases}$

$$g[f(x)] = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ -1, & x \geq 0 \end{cases}$$

<b>题型二 函数性态</b>
-----------------

**例 1.4** 函数  $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$  在下列哪个区间内有界

(A)  $(-1, 0)$ . (B)  $(0, 1)$ . (C)  $(1, 2)$ . (D)  $(2, 3)$ .

**解法 1** 直接法

由于  $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$  在  $(-1, 0)$  上连续, 且

$$f(-1+0) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = -\frac{\sin 3}{18}. \text{ (存在)}$$

$$f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = -\frac{\sin 2}{4}. \text{ (存在)}$$

则  $f(x)$  在  $(-1, 0)$  上有界.

故选(A).

**解法 2** 排除法

$$\text{由于 } f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = \infty.$$

则  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上无界. (B) 不正确.

$$\text{由于 } f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = \infty.$$

则  $f(x)$  在  $(2, 3)$  上无界. (C) 不正确.

$$\begin{aligned} \text{由于 } f(2+0) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x|}{x(x-1)(x-2)} = \infty, \end{aligned}$$

则  $f(x)$  在  $(2, 3)$  上无界. (D) 不正确.

故应选(A).

**例 1.5** 以下四个命题中正确的是

(A) 若  $f'(x)$  在  $(0, 1)$  内连续, 则  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内有界.

(B) 若  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内连续, 则  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内有界.

(C) 若  $f'(x)$  在  $(0, 1)$  内有界, 则  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内有界.

(D) 若  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内有界, 则  $f'(x)$  在  $(0, 1)$  内有界.

**解法 1** 直接法

由于  $f'(x)$  在  $(0, 1)$  内有界, 则  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内有界, 故选(C).

**解法 2** 排除法

令  $f(x) = \frac{1}{x}$ , 则  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ , 显然,  $f'(x)$  和  $f(x)$  都在  $(0, 1)$  内连

续, 但  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内无界, 则(A)、(B) 都不正确.

令  $f(x) = \sqrt{x}$ , 显然  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内有界, 但  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  在  $(0, 1)$

内无界,则(D)不正确.

故应选(C).

**例 1.6** 设  $f(x), g(x)$  是恒大于零的可导函数,且  $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$ ,则当  $a < x < b$  时,有

$$(A) f(x)g(b) > f(b)g(x). \quad (B) f(x)g(a) > f(a)g(x).$$

$$(C) f(x)g(x) > f(b)g(b). \quad (D) f(x)g(x) > f(a)g(a).$$

**解** 令  $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , 则

$$F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} < 0$$

$F(x)$  单调减,由  $a < x < b$  知

$$F(b) < F(x), \text{ 即 } \frac{f(b)}{g(b)} < \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$f(x)g(b) > f(b)g(x)$$

故应选(A).

**例 1.7** 设函数  $f(x)$  连续,且  $f'(0) > 0$ ,则存在  $\delta > 0$ ,使得

(A)  $f(x)$  在  $(0, \delta)$  内单调增加.

(B)  $f(x)$  在  $(-\delta, 0)$  内单调减少.

(C) 对任意的  $x \in (0, \delta)$  有  $f(x) > f(0)$ .

(D) 对任意的  $x \in (-\delta, 0)$  有  $f(x) > f(0)$ .

**解** 本题要用到一个常用的结论:

若  $f'(x_0) > 0$ ,则存在  $\delta > 0$ ,当  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  时,  $f(x) < f(x_0)$ ; 当  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  时,  $f(x) > f(x_0)$ . 若  $f'(x_0) < 0$  有相应的结论. (利用导数定义和极限的保号性易证明此结论)

由以上结论知(C)正确.

**注** 本题选(A)是一种典型的错误,原因是由  $f'(x_0) > 0$ ,得不到一定存在  $x_0$  的某邻域,在此邻域内  $f(x)$  单调增. 反例如下:

$$\text{令 } f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = 1 > 0$$

$$\text{当 } x \neq 0 \text{ 时, } f'(x) = 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x}$$

$$\text{取 } x_n = \frac{1}{2n\pi}, \text{ 则 } f'(x_n) = 1 - 2 = -1 < 0.$$

$$\text{取 } y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, \text{ 则 } f'(y_n) = 1 + \frac{4}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} > 0$$

由于以上的两种点  $x_n$  和  $y_n$  在  $x = 0$  的任何邻域内都存在,则在  $x = 0$

的任何邻域内既存在的导数为正的点,也存在导数为负的点,则  $f(x)$  在  $x = 0$  的任何邻域内都不单调增.

## 第二节 极限

### ■ 考试内容要点精讲

#### 1. 极限概念

1) 数列极限:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A: \forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) > 0$ , 当  $n > N$  时

$$|a_n - A| < \epsilon.$$

2) 函数极限:

(1) 自变量趋于无穷大时函数的极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A: \forall \epsilon > 0, \exists X(\epsilon) > 0, \text{当 } |x| > X \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \epsilon.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A: \forall \epsilon > 0, \exists X(\epsilon) > 0, \text{当 } x > X \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \epsilon.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A: \forall \epsilon > 0, \exists X(\epsilon) > 0, \text{当 } x < -X \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \epsilon.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$$

(2) 自变量趋于有限值时函数的极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A: \forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \epsilon.$$

$$\boxed{\text{左极限}} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0);$$

$$\boxed{\text{右极限}} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$$

#### 几个值得注意的极限

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty \text{ (错);}$$

$$\text{正确的是: } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty; \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \text{ (错);}$$

$$\text{正确的是: } \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}; \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{x} = +\frac{\pi}{2}.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty \text{ (错);}$$

正确的是:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \text{ (错);}$$

正确的是:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = +\frac{\pi}{2}$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ .

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1 \text{ (错);}$$

正确的是:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = -1$ .

## 2. 极限性质

1) 有界性: 收敛数列必有界.

2) 有理运算性质: 若  $\lim f(x) = A$ ,  $\lim g(x) = B$ .

那么:  $\lim [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$ ;

$$\lim [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B;$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

两个常用的结论:

$$\textcircled{1} \lim \frac{f(x)}{g(x)} \text{ 存在, } \lim g(x) = 0 \Rightarrow \lim f(x) = 0;$$

$$\textcircled{2} \lim \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0, \lim f(x) = 0 \Rightarrow \lim g(x) = 0.$$

3) 保号性: 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则

(1) 若  $A > 0$  (或  $A < 0$ )  $\Rightarrow \exists \delta > 0$ , 当  $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$  时,  $f(x) > 0$  (或  $f(x) < 0$ ).

(2) 若  $\exists \delta > 0$ , 当  $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$  时,  $f(x) \geq 0$  (或  $f(x) \leq 0$ )  $\Rightarrow A \geq 0$  (或  $A \leq 0$ ).

4) 函数值与极限值之间的关系:

$$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \text{ 其中 } \lim \alpha(x) = 0.$$

## 3. 极限存在准则

1) 夹逼准则: 若存在  $N$ , 当  $n > N$  时,  $x_n \leq y_n \leq z_n$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ .

2) 单调有界准则: 单调有界数列必有极限.

## 4. 无穷小量

1) 无穷小量的概念:

若  $\lim f(x) = 0$ , 称  $f(x)$  为无穷小量 ( $x \rightarrow x_0$  或  $x \rightarrow \infty$ ).

2) 无穷小的比较: 设  $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = 0$ .

(1) 高阶: 若  $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$ ; 记为  $\beta(x) = o(\alpha(x))$ ;

(2) 同阶: 若  $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = C \neq 0$ ;

(3) 等价: 若  $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$ ; 记为  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ;

(4) 无穷小的阶: 若  $\lim \frac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^k} = C \neq 0$ , 称  $\beta(x)$  是  $\alpha(x)$  的  $k$  阶无穷小.

### 5. 无穷大量

1) 无穷大量的概念: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , 称  $f(x)$  为  $x \rightarrow x_0$  时的无穷大量.

2) 无穷大量与无界变量的关系: 无穷大量  $\Rightarrow$  无界变量

无穷大量一定是无界变量; 但无界变量不一定是无穷大量.

数列  $\{x_n\}$  是无穷大量:  $\forall M > 0, \exists N$ , 当  $n > N$  时, 恒有  $|x_n| > M$ .

数列  $\{x_n\}$  是无界变量:  $\forall M > 0, \exists N$ , 使  $|x_N| > M$ .

例 数列  $x_n = [1 + (-1)^n]n$  是无界变量, 但不是无穷大量.

3) 无穷大量与无穷小量的关系:

无穷大量的倒数是无穷小量; 无穷小量(恒不为零)的倒数是无穷大量.

## ■ 常考题型的解题方法与技巧

### 题型一 极限的概念、性质及存在准则

例 1.8 “对任意给定的  $\epsilon \in (0, 1)$ , 总存在正数  $N$ , 当  $n > N$  时, 恒有  $|x_n - a| \leq 2\epsilon$ ” 是数列  $\{x_n\}$  收敛于  $a$  的

(A) 充分条件但非必要条件. (B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件. (D) 既非充分条件又非必要条件.

解 本题主要考查对数列  $\{x_n\}$  收敛于  $a$  定义的理解. 其定义是“对任意给定的  $\epsilon > 0$ , 存在  $N > 0$ , 当  $n > N$  时, 恒有  $|x_n - a| < \epsilon$ ” 这与本题中的说法是等价的, 故应选(C).

例 1.9 设  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  均为非负数列, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ , 则必有

(A)  $a_n < b_n$  对任意  $n$  成立. (B)  $b_n < c_n$  对任意  $n$  成立.

(C) 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$  不存在. (D) 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$  不存在.

解法 1 直接法

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$  知  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n = \infty$ ,

故选(D).

解法 2 排除法

由题设条件可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n < \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ , 但这只能得到, 存在  $N > 0$ ,



当  $n > N$  后有  $a_n < b_n < c_n$ ; 而不能得到对任意的  $n$  有  $a_n < b_n < c_n$ .  
从而得知(A)、(B) 均不正确.

若取  $a_n = \frac{1}{n^2}$ ,  $c_n = n$ , 显然  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ ,

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0$

从而得知(C) 不正确, 故应选(D).

**例 1.10** 设对任意的  $x$  总有  $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

- (A) 存在且等于零.                      (B) 存在但不一定为零.  
(C) 一定不存在.                        (D) 不一定存在.

**解** 令  $\varphi(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ ,  $g(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ ,  $f(x) = 1$ .

显然  $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ , 此时

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ .

则(A) 和(C) 不正确.

若令  $\varphi(x) = x - \frac{1}{x^2}$ ,  $f(x) = x$ ,  $g(x) = x + \frac{1}{x^2}$ ,

则  $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ , 但  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  (不存在).

从而(B) 不正确, 故应选(D).

**例 1.11** 设数列  $\{x_n\}$  与  $\{y_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ , 则下列断言正确的是

- (A) 若  $x_n$  发散, 则  $y_n$  必发散.  
(B) 若  $x_n$  无界, 则  $y_n$  必有界.  
(C) 若  $x_n$  有界, 则  $y_n$  必为无穷小.  
(D) 若  $\frac{1}{x_n}$  为无穷小, 则  $y_n$  必为无穷小.

**解法 1** 排除法

若取  $x_n = n$ ,  $y_n = \frac{1}{n^2}$ , 显然(A) 不正确.

若取  $x_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$      $y_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数} \\ n, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$

则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ , 且  $x_n$  无界, 但  $y_n$  也无界, 则(B) 不正确.

若取  $x_n = \frac{1}{n^2}$ ,  $y_n = n$ , 显然(C) 不正确.

故应选(D).

**解法 2** 直接法

由于  $y_n = (x_n y_n) \cdot \frac{1}{x_n}$ , 则