西安交大考研

2011版 数学考研

新干线

高等数学

武忠祥

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

2011版

数学考研新干线

高等数学

西安交通大学出版社

内容简介

本书是为准备考研的同学复习高等数学(微积分)编写的辅导讲义,力求用不多的篇幅,在较短的时间内帮助同学理解基本概念,掌握基本理论、基本公式、重点及难点,澄清常犯的错误与疑惑。同时,通过典型例题,在归纳题型的基础上帮助同学们梳理解题思路,掌握常用的解题方法和技巧。

图书在版编目(CIP)数据

数学考研新干线 高等数学(2011 版)/武忠祥编著. —西安:西安交通大学出版社,2010.4
(数学 135 系列. 数学考研新干线)
ISBN 978-7-5605-3101-4

Ⅰ.数… Ⅱ.武… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料
Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 053995 号

书　　名 数学考研新干线 高等数学(2011 版)
编　　著 武忠祥
责任编辑 叶涛

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号 邮政编码 710049)
网　　址 http://www.xjtupress.com
电　　话 (029)82668357 82667874(发行部)
(029)82668315 82669096(总编办)
传　　真 (029)82668280
印　　刷 三河市文阁印刷厂

开　　本 787mm×1 092mm 1/16 **印张** 13 **字数** 309 千字
版次印次 2010 年 4 月第 1 版 2010 年 4 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5605-3101-4/O·293
定　　价 24.00 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。
订购热线:(029)82665248 (029)82665249
投稿热线:(029)82664954
读者信箱:jdlgy@yahoo.cn

前　言

本书是为准备考研的同学复习高等数学(微积分)而编写的辅导讲义,由编者多年来在考研辅导班的讲稿改写而成.全书共分九章及一个附录,每章均由考试内容要点精讲和常考题型的方法与技巧两部分组成.

本书力求用不多的篇幅,在较短的时间内帮助同学理解基本概念,掌握基本理论、基本公式、重点及难点,澄清常犯的错误与疑惑.同时,通过典型例题,在归纳题型的基础上帮助同学们梳理解题思路,掌握常用的解题方法和技巧.

本书为了考研同学使用方便,将几种试卷共同要求的内容编写在本讲义的前面.其中数学二只要求前六章,数学三只要求前七章,数学一全要.

希望本讲义能对复习考研的同学有较大的帮助.由于编者水平有限,疏漏和错误之处在所难免,欢迎批评指正.

祝同学们在考研的路上一路顺利!

编　者

2010 年 3 月

目　录

第一章　函数 极限 连续

第一节　函数

■ 考试内容要点精讲

1. 函数的概念(定义、定义域、对应法则、值域)

2. 函数的性态

1) 单调性

$\boxed{\text{定义}}$　单调增：　$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

单调不减：　$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$

$\boxed{\text{判定}}$　(1) 定义；

(2) 导数：设 $f(x)$ 在区间 I 上可导，则

a) $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 单调增；

b) $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x)$ 单调不减.

2) 奇偶性

$\boxed{\text{定义}}$　偶函数：$f(-x) = f(x)$；奇函数：$f(-x) = -f(x)$.

$\boxed{\text{判定}}$　(1) 定义；

(2) 设 $f(x)$ 可导，则：

a) $f(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow f'(x)$ 是偶函数；

b) $f(x)$ 是偶函数 $\Rightarrow f'(x)$ 是奇函数.

(3) 连续的奇函数其原函数都是偶函数；

连续的偶函数其原函数之一是奇函数.

3) 周期性

$\boxed{\text{定义}}$　$f(x+T) = f(x)$

$\boxed{\text{判定}}$　(1) 定义；

(2) 可导的周期函数其导函数为周期函数；

(3) 周期函数的原函数不一定是周期函数.

4) 有界性

$\boxed{\text{定义}}$　若 $\exists M > 0, \forall x \in I, |f(x)| \leqslant M$；则称 $f(x)$ 在 I 上有界.

判定　(1) 定义；

(2) $f(x)$ 在$[a,b]$上连续 $\Rightarrow f(x)$ 在$[a,b]$上有界；

(3) $f(x)$ 在(a,b)上连续，且 $f(a+0)$ 和 $f(b-0)$ 存在 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在(a,b)上有界；

(4) $f'(x)$ 在区间 I(有限)上有界 $\Rightarrow f(x)$ 在 I 上有界.

3. 复合函数与反函数（函数分解成简单函数的复合，分段函数的复合）

4. 基本初等函数与初等函数

基本初等函数：

常数，幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数. 了解它们的定义域，性质，图形.

初等函数：

由基本初等函数经过有限次的加、减、乘、除和复合所得到且能用一个解析式表示的函数.

■ 常考题型的解题方法与技巧

题型一　复合函数

例 1.1　已知 $f(x+1)$ 的定义域为$[0,a]$，$(a>0)$，则 $f(x)$ 的定义域为

(A) $[-1,a-1]$.　　(B) $[1,a+1]$.

(C) $[a,a+1]$.　　(D) $[a-1,a]$.

解　应选(B).

例 1.2　已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

解　由 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，知

$$e^{\varphi^2(x)}=1-x$$

$$\varphi^2(x)=\ln(1-x)\quad(x\leqslant 0)$$

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}\quad(x\leqslant 0)$$

例 1.3　设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|<1\\ |x|-2, & 1\leqslant |x|\end{cases}$. 试求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解　$$f[g(x)]=\begin{cases}0, & 1\leqslant |x|<2\\ 1, & |x|<1 \text{ 或 } |x|\geqslant 2\end{cases}$$

$$g[f(x)]=\begin{cases}2, & x<0\\ -1, & x\geqslant 0\end{cases}$$

题型二　函数性态

例 1.4　函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界

(A) $(-1,0)$.　(B) $(0,1)$.　(C) $(1,2)$.　(D) $(2,3)$.

解法 1　直接法

由于 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在$(-1,0)$上连续，且

$$f(-1+0)=\lim_{x\to-1^+}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\frac{\sin3}{18}.\text{(存在)}$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to0}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\frac{\sin2}{4}.\text{(存在)}$$

则 $f(x)$ 在$(-1,0)$上有界.

故选(A).

解法 2　排除法

由于 $f(1-0)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\infty$.

则 $f(x)$ 在$(0,1)$上无界. (B)不正确.

由于 $f(1+0)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\infty$.

则 $f(x)$ 在$(2,3)$上无界. (C)不正确.

$$\text{由于 } f(2+0)=\lim_{x\to2^+}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\lim_{x\to2^+}\frac{|x|}{x(x-1)(x-2)}=\infty,$$

则 $f(x)$ 在$(2,3)$上无界. (D)不正确.

故应选(A).

例 1.5　以下四个命题中正确的是

(A) 若 $f'(x)$ 在$(0,1)$内连续，则 $f(x)$ 在$(0,1)$内有界.

(B) 若 $f(x)$ 在$(0,1)$内连续，则 $f(x)$ 在$(0,1)$内有界.

(C) 若 $f'(x)$ 在$(0,1)$内有界，则 $f(x)$ 在$(0,1)$内有界.

(D) 若 $f(x)$ 在$(0,1)$内有界，则 $f'(x)$ 在$(0,1)$内有界.

解法 1　直接法

由于 $f'(x)$ 在$(0,1)$内有界，则 $f(x)$ 在$(0,1)$内有界，故选(C).

解法 2　排除法

令 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$，显然，$f'(x)$ 和 $f(x)$ 都在$(0,1)$内连续，但 $f(x)$ 在$(0,1)$内无界，则(A)、(B)都不正确.

令 $f(x)=\sqrt{x}$，显然 $f(x)$ 在$(0,1)$内有界，但 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 在$(0,1)$

内无界，则(D)不正确.

故应选(C).

例 1.6 设 $f(x),g(x)$ 是恒大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则当 $a<x<b$ 时，有

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$.　　(B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$.

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$.　　(D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$.

解 令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，则

$$F'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0$$

$F(x)$ 单调减，由 $a<x<b$ 知

$F(b)<F(x)$，即 $\dfrac{f(b)}{g(b)}<\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$f(x)g(b)>f(b)g(x)$

故应选(A).

例 1.7 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少.

(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$.

(D) 对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$.

解 本题要用到一个常用的结论：

若 $f'(x_0)>0$，则存在 $\delta>0$，当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f(x)<f(x_0)$；当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f(x)>f(x_0)$. 若 $f'(x_0)<0$ 有相应的结论.（利用导数定义和极限的保号性易证明此结论）

由以上结论知(C)正确.

注 本题选(A)是一种典型的错误，原因是由 $f'(x_0)>0$，得不到一定存在 x_0 的某邻域，在此邻域内 $f(x)$ 单调增. 反例如下：

$$\text{令 } f(x)=\begin{cases}x+2x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x+2x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=1>0$$

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=1+4x\sin\dfrac{1}{x}-2\cos\dfrac{1}{x}$

取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，则 $f'(x_n)=1-2=-1<0$.

取 $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，则 $f'(y_n)=1+\dfrac{4}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}>0$

由于以上的两种点 x_n 和 y_n 在 $x=0$ 的任何邻域内都存在，则在 $x=0$

的任何邻域内既存在的导数为正的点，也存在导数为负的点，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 的任何邻域内都不单调增.

第二节　极 限

■ 考试内容要点精讲

1. 极限概念

1）数列极限：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)>0$，当 $n>N$ 时 $|a_n-A|<\varepsilon$.

2）函数极限：

（1）自变量趋于无穷大时函数的极限

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$：$\forall\varepsilon>0$，$\exists X(\varepsilon)>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$：$\forall\varepsilon>0$，$\exists X(\varepsilon)>0$，当 $x>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$：$\forall\varepsilon>0$，$\exists X(\varepsilon)>0$，当 $x<-X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A$$

（2）自变量趋于有限值时函数的极限

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

左极限　$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0-0)$；

右极限　$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0+0)$；

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$$

几个值得注意的极限

① $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}=\infty$（错）；

正确的是：$\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$；$\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$.

② $\lim\limits_{x\to0}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$（错）；

正确的是：$\lim\limits_{x\to0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$；$\lim\limits_{x\to0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=+\dfrac{\pi}{2}$.

③ $\lim\limits_{x\to\infty}e^x=\infty$（错）；

正确的是：$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$；$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

④ $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x = \dfrac{\pi}{2}$（错）；

正确的是：$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x = +\dfrac{\pi}{2}$；$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$.

⑤ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1$（错）；

正确的是：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1$；$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} = -1$.

2. 极限性质

1）有界性：收敛数列必有界.

2）有理运算性质：若 $\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$.

那么：$\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$；

$\lim[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$；

$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$　$(B \neq 0)$

两个常用的结论：

① $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在，$\lim g(x) = 0 \Rightarrow \lim f(x) = 0$；

② $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$，$\lim f(x) = 0 \Rightarrow \lim g(x) = 0$.

3）保号性：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则

（1）若 $A > 0$（或 $A < 0$）$\Rightarrow \exists\,\delta > 0$，当 $x \in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）.

（2）若 $\exists\,\delta > 0$，当 $x \in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$f(x) \geqslant 0$（或 $f(x) \leqslant 0$）$\Rightarrow A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）.

4）函数值与极限值之间的关系：

$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$，其中 $\lim \alpha(x) = 0$.

3. 极限存在准则

1）夹逼准则：若存在 N，当 $n > N$ 时，$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

2）单调有界准则：单调有界数列必有极限.

4. 无穷小量

1）无穷小量的概念：

若 $\lim f(x) = 0$，称 $f(x)$ 为无穷小量（$x \to x_0$ 或 $x \to \infty$）.

2）无穷小的比较：设 $\lim \alpha(x) = 0$，$\lim \beta(x) = 0$.

（1）高阶：若 $\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$；记为 $\beta(x) = o(\alpha(x))$；

（2）同阶：若 $\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = C \neq 0$；

(3) 等价：若 $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$；记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$；

(4) 无穷小的阶：若 $\lim \frac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^k} = C \neq 0$，称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的 k 阶无穷小.

5. 无穷大量

1) 无穷大量的概念：若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷大量.

2) 无穷大量与无界变量的关系：无穷大量 $\Rightarrow$ 无界变量

无穷大量一定是无界变量；但无界变量不一定是无穷大量.

数列 $\{x_n\}$ 是无穷大量：$\forall M > 0$，$\exists N$，当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n| > M$.

数列 $\{x_n\}$ 是无界变量：$\forall M > 0$，$\exists N$，使 $|x_N| > M$.

例　数列 $x_n = [1 + (-1)^n]n$ 是无界变量，但不是无穷大量.

3) 无穷大量与无穷小量的关系：

无穷大量的倒数是无穷小量；无穷小量(恒不为零)的倒数是无穷大量.

■ 常考题型的解题方法与技巧

题型一　极限的概念、性质及存在准则

例 1.8　"对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$，总存在正数 N，当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$" 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的

(A) 充分条件但非必要条件.　(B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件.　(D) 既非充分条件又非必要条件.

解　本题主要考查对数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 定义的理解. 其定义是"对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$" 这与本题中的说法是等价的，故应选(C).

例 1.9　设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$，则必有

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立.　(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$ 不存在.　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在.

解法 1　直接法

由 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n = \infty$，

故选(D).

解法 2　排除法

由题设条件可知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n < \lim\limits_{n\to\infty} c_n$，但这只能得到，存在 $N > 0$，

当 $n > N$ 后有 $a_n < b_n < c_n$；而不能得到对任意的 n 有 $a_n < b_n < c_n$.

从而得知(A)、(B) 均不正确.

若取 $a_n = \frac{1}{n^2}$, $c_n = n$,显然 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$,

而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = 0$

从而得知(C) 不正确,故应选(D).

例 1.10 设对任意的 x 总有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x) - \varphi(x)] = 0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

(A) 存在且等于零. (B) 存在但不一定为零.

(C) 一定不存在. (D) 不一定存在.

解 令 $\varphi(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $g(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$, $f(x) = 1$.

显然 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x) - \varphi(x)] = 0$,此时 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$.

则(A) 和(C) 不正确.

若令 $\varphi(x) = x - \frac{1}{x^2}$, $f(x) = x$, $g(x) = x + \frac{1}{x^2}$,

则 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x) - \varphi(x)] = 0$,但 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$(不存在).

从而(B) 不正确,故应选(D).

例 1.11 设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$,则下列断言正确的是

(A) 若 x_n 发散,则 y_n 必发散.

(B) 若 x_n 无界,则 y_n 必有界.

(C) 若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小.

(D) 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小,则 y_n 必为无穷小.

解法 1 排除法

若取 $x_n = n$, $y_n = \frac{1}{n^2}$,显然(A) 不正确.

若取 $x_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$ $\quad y_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数} \\ n, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$,且 x_n 无界,但 y_n 也无界,则(B) 不正确.

若取 $x_n = \frac{1}{n^2}$, $y_n = n$,显然(C) 不正确.

故应选(D).

解法 2 直接法

由于 $y_n = (x_n y_n) \cdot \frac{1}{x_n}$,则