

TURING

图灵数学·统计学丛书 49

The Calculus Lifesaver

All the Tools You Need to Excel at Calculus

普林斯顿

微积分读本



人民邮电出版社  
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵数学·统计学丛书 49

The Calculus Lifesaver

All the Tools You Need to Excel at Calculus

# 普林斯顿 微积分读本



人民邮电出版社  
北京

## 图书在版编目(CIP)数据

普林斯顿微积分读本/(美)班纳(Banner, A.)著;  
杨爽, 赵晓婷, 高璞译. —北京: 人民邮电出版社,  
2010.8

(图灵数学·统计学丛书)

ISBN 978-7-115-23130-7

I. ①普… II. ①班… ②杨… ③赵… ④高… III.  
①微积分 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 118833 号

### 内 容 提 要

本书阐述了求解微积分的技巧, 详细讲解了微积分基础、极限、连续、微分、导数的应用、积分、无穷级数、泰勒级数与幂级数等内容, 旨在教会读者如何思考问题从而找到解题所需的知识点, 着重训练大家自己解答问题的能力.

本书适用于大学低年级学生、高中高年级学生、想学习微积分的数学爱好者以及广大数学教师. 即可作为教材、习题集, 也可作为学习指南, 同时还有利于教师备课.

图灵数学·统计学丛书

### 普林斯顿微积分读本

- 
- ◆ 著 [美] Adrian Banner
  - 译 杨爽 赵晓婷 高璞
  - 责任编辑 傅志红
  - 执行编辑 卢秀丽 毛倩倩
  - ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街 14 号  
邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn  
网址: <http://www.ptpress.com.cn>  
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
  - ◆ 开本: 700×1000 1/16  
印张: 42  
字数: 819 千字 2010 年 8 月第 1 版  
印数: 1-3 000 册 2010 年 8 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号 图字: 01-2009-3812 号

ISBN 978-7-115-23130-7

定价: 95.00 元

读者服务热线: (010)51095186 印装质量热线: (010)67129223

反盗版热线: (010)67171154

## 版权声明

Original edition, entitled *The Calculus Lifesaver : All the Tools You Need to Excel at Calculus* by *Adrian Banner*, ISBN: 978-0-691-13088-0, published by Princeton University Press. Copyright © 2007 by Princeton University Press.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage and retrieval system, without permission in writing from Princeton University Press.

Simplified Chinese translation copyright © 2010 by Posts & Telecom Press.

本书简体中文版由普林斯顿大学出版社授权人民邮电出版社独家出版。未经出版者许可,不得以任何方式复制本书内容。

仅限于中华人民共和国境内(香港、澳门特别行政区和台湾地区除外)销售发行。

版权所有,侵权必究。

## 译者序

对于大多数学生来说,微积分或许是他们曾经上过的倍感迷茫且最受挫折的一门课程了.而本书,不仅让学生们能有效地学习微积分,更重要的是提供了战胜微积分的必备工具.

本书源于风靡美国普林斯顿大学的 Adrian Banner 的微积分复习课程.他激励了一些考试前想获得优秀但考试结果却平平的学生.

对于任何单变量微积分的课程,本书既可以作为教科书,也可以用作学习指南,对于全英文授课的教师来说更是一个得力助手.作者 Adrian Banner 是美国普林斯顿大学的著名数学教授并担任新技术研究中心主任. Adrian Banner 教授的授课风格是非正式的、有吸引力并完全不强求的,甚至在不失其详尽性的基础上又增添了许多娱乐性,而且他不会跳过讨论一个问题的任何步骤.

作者独创的“内心独白”方式——即问题求解过程中学生们应遵循的思考过程——为我们提供了不可或缺的推理过程以及求解方案.本书的重点在于创建问题求解的技巧.其中涉及的例题从简单到复杂并对微积分理论进行了深入探讨.读者会在非正式的对话语境中体会微积分的无穷魅力.

本书特点:

- 是任何单变量微积分教科书的好伙伴;
- 洋溢着非正式的、娱乐性的但非强求的对话语境风格;
- 丰富的在线视频;
- 大量精选例题(从简单到复杂)提供了一步一步的推理过程;
- 定理和方法的证明以及相关应用的说明实现理论应用于实践的目标;
- 详细探讨了诸如无穷级数这样的难点问题.

这样的一本经典著作将易用性与可读性以及内容的深度与数学的严谨完美地结合在一起.对于每一个想要掌握微积分的学生来说,本书都是极好的资源.当然,非数学专业的学生也将大大受益.

在翻译本书的过程中,译者虽然尽最大努力尊重原文,并尽可能避免直译产生的歧义,但是由于才疏学浅,难免存在翻译不当之处,敬请广大读者批评指正,以便再版时更正.

本书能得以顺利出版,首先要感谢人民邮电出版社图灵公司的大力支持,同时,首都经济贸易大学华侨学院信管系的全体教师也给予了无私的帮助,在此一并表示衷心感谢.最后感谢我的家人在本书翻译过程中所给予的支持与鼓励,尤其是爱女

芮绮!

《普林斯顿微积分读本》  
微笑着面对数学的世界  
积累着超越无穷的力量  
分化出化解疑难的翅膀  
求解出优化问题的阳光  
生成了数学天空的晴朗  
秘籍 —— 放飞自己的理想

谨以此诗献给爱女芮绮以及喜爱数学的新生代!

杨 爽

于首都经济贸易大学华侨学院信管系

## 前 言

本书旨在帮助你学习单变量微积分的主要概念，同时也致力于教会你求解问题的技巧。无论你是第一次接触微积分，还是为了准备一次测验，或是已经学过微积分但想再温习一遍，我都希望本书能够对你有所帮助。

写作本书的灵感来自我在普林斯顿大学的学生们，他们在过去的几年里就发现，起初的笔记连同讲座、复习研讨以及教材作为学习指南是很有帮助的。以下是他们在学习过程中提出的一些你可能也想问的问题。

**这本书为什么这么长** 我认为你是真的想要掌握这门课程，而不只是想囫圇吞枣，一知半解，那你就投入一些时间和精力，去阅读并理解这些详尽的阐述。

**阅读之前，我需要知道些什么** 你需要了解一些基本的代数知识，并且要知道如何求解简单的方程式。本书的前两章涵盖了你所需要的大部分的微积分预备知识。

**啊！下周就要期末考试了，我还什么都不知道呢！从哪里开始啊** 接下来的几页就会介绍如何使用本书来备考。

**例题的求解过程在哪里？我所看到的只是大量的文字与少量的公式** 首先，看一个求解过程并不能教会你应该怎样思考。所以，我通常试图给出一种“内心独白”，即当你尝试求解问题的时候，脑海中应该经历怎样的思考过程。最后，你想到了求解问题的所有知识点，但仍然需要用正确的方式把它们全部写出来。我的建议是先看懂并理解问题的求解方法，然后再返回来尝试自己解答。

**定理的证明哪儿去了** 本书中的大部分定理都以某种方式被验证了。在附录 A 中可以找到更多正式证明过程。

**主题没有次序！我该怎么办呢** 学习微积分没有什么标准次序。我选择的顺序是有效的，但你可能还得通过搜索目录来查找你需要的主题，其余的可以先忽略。我也可能遗漏了一些主题。为什么不尝试给我发送电子邮件呢？地址是 [adrian@calclifesaver.com](mailto:adrian@calclifesaver.com)。你一定想不到，我可能会为你写一个附加章节（也为下一版写，如果有的话！）。

**你使用的一些方法和我学到的不一样。到底谁的正确，我的任课老师的还是你的** 希望我们都没错！如果还有疑问，就请教你的任课老师什么是对的吧。

**页边空白处怎么没有微积分的历史和有趣的史实呢** 本书中有一点微积分历史内容，但不在这里过多分散我们的注意力。如果你想记下这些历史内容，就请阅读一本关于微积分历史的书吧，那才更有趣，而且比零零散散的几句话更值得关注。

我们学校可以用这本书作为教材吗 这本书配有很好的习题集, 可以作为一本教材, 也可以用作一本学习指南. 你的任课老师也会发现这本书很有助于备课, 特别是在问题求解的技巧这一方面.

本书提及的这些录像是什么 在网站 [www.calclifesaver.com](http://www.calclifesaver.com) 上, 你可以找到我的年度复习研讨录像, 其中涉及了很多 (但不是全部!) 本书的章节和例题.

## 如何使用这本书备考

如果你快要参加考试了, 那么发挥本书效用的机会就来了. 我很同情你的处境, 因为你没有时间阅读整本书的内容! 但是你不用担心, 后面的那张表会标出本书的主要章节, 来帮助你备考. 此外, 纵观整本书, 下列图标会出现在书中页边空白处, 让你快速识别什么是重要内容.



- 例题求解过程始于此行.



- 这里非常重要.



- 你应当自己尝试解答本题.



- 注意: 这部分内容大多是为感兴趣的读者准备的. 如果时间有限, 就请跳到下一节.

此外, 一些重要的公式或定理带有边框, 一定要好好学啊.

## 两个通用的学习小贴士

- 把你自己总结的所有重要的知识点和公式都写出来, 以便记忆. 虽说数学不是死记硬背, 但也有一些关键的公式和方法, 最好是你能自己写得出来. 好记性不如烂笔头嘛! 通常来说, 做总结足以巩固和加强你对所学知识的理解. 这就是为什么我没有在每一章的结尾部分作要点总结的主要原因. 如果你自己去做, 那将会更有价值.
- 尝试自己做一些类似的考试题, 比如你们学校以前学期的期末试题, 并在恰当的条件下进行测验. 这将意味着遵守不间断, 不吃饭, 不看书, 不玩手机, 不发电子邮件, 不发信息等诸如此类的考试规则等等. 完成之后, 再看看你是否可以得到一套标准答案来评阅试卷, 如果能请人帮你评阅会更好.



## 考试复习的重要章节 (按主题划分)

主题	副主题	节
微积分基础	直线	1.5
	其他常用图像	1.6
	三角学基础	2.1
	$[0, \pi/2]$ 之外的三角函数	2.2
	三角函数的图像	2.3
	三角恒等式	2.4
	指数函数与对数函数	9.1
极限	三明治定理	3.6
	多项式极限	第 4 章全部
	导数伪装的极限	6.5
	三角函数极限	7.1(跳过 7.1.5)
	指数函数与对数函数极限	9.4
	洛必达法则	14.1
	极限问题综述	14.2
连续	定义	5.1
	介值定理	5.1.4
微分	定义	6.1
	法则 (如, 乘积法则/商法则/ 链式求导法则)	6.2
	求切线	6.3
	分段函数的导数	6.6
	画导函数图像	6.7
	三角函数	7.2, 7.2.1
	隐函数求导	8.1
	指数与对数函数	9.3
	对数求导	9.5
	双曲函数	9.7
	反函数	10.1
	反三角函数	10.2
	反双曲函数	10.3
	求导定积分	17.5

(续)

主题	副主题	节
导数的应用	相关变化率	8.2
	指数增长与衰退	9.6
	求全局最大值与全局最小值	11.1.3
	罗尔定理/中值定理	11.2, 11.3
	临界点的分类	11.5, 12.1.1
	求拐点	11.4, 12.1.2
	画图	12.2, 12.3
	优化	13.1
	线性化/微分	13.2
	牛顿方法	13.3
积分	定义	16.2(跳过 16.2.1)
	基本性质	16.3
	求面积	16.4
	估计定积分	16.5, 附录 B
	平均值/中值定理	16.6
	基本例子	17.4, 17.6
	替代法	18.1
	分部积分	18.2
	部分分式	18.3
	三角函数积分	19.1, 19.2
	三角换元	19.3(跳过 19.3.6)
	积分技巧综述	19.4
运动	速度与加速度	6.4
	常数加速度	6.4
	简谐运动	7.2.2
	求位移	16.1
反常积分	基本知识	20.1, 20.2
	求解技巧	第 21 章全部
无穷级数	基本知识	22.1.2, 22.2
	求解技巧	第 23 章全部
泰勒级数与幂级数	估计和误差估计	第 25 章全部
	幂/泰勒级数问题	第 26 章全部

(续)		
主题	副主题	节
微分方程	可分一阶	30.2
	一阶线性	30.3
	常数系数	30.4
	建模	30.5
其他话题	参数方程	27.1
	极坐标	27.2
	复数	28.1 ~ 28.5
	体积	29.1, 29.2
	弧长	29.3
	表面面积	29.4

除非有特殊说明, 标明“节”的一栏包括所有小节. 如, 6.2 节包括从 6.2.1 到 6.2.7 的所有小节.

## 致 谢

感谢所有在我写作本书过程中给予我支持和帮助的人。我的学生一直都是在教育及娱乐方面鼓励并支持我的源泉, 他们的意见使我受益匪浅。特别感谢我的编辑 Vickie Kearn、制作编辑 Linny Schenck 和设计师 Lorraine Doneker, 感谢他们对我的所有帮助和支持, 还要感谢 Gerald Folland, 他的很多真知灼见对本书的改善有很大的贡献。此外, 感谢 Ed Nelson、Maria Klawe、Christine Miranda、Lior Braunstein、Emily Sands、Jamaal Clue、Alison Ralph、Marcher Thompson、Ioannis Avramides、Kristen Molloy、Dave Uppal、Nwanneka Onvekwusi、Ellen Zuckerman、Charles MacCluer 和 Gary Slezak, 本书中的很多修正都得益于他们的意见和建议。

感谢下列普林斯顿大学数学系的教员和工作人员对我的大力支持: Eli Stein、Simon Kochen、Matthew Ferszt 和 Cott Kenny。我也要感谢我在 INTECH 的同事们给与的支持, 特别是 Bob Fernholz、Camm Maguire、Marie D'Albero 和 Vassilios Papathanakos, 他们提出了一些优秀并且及时的建议。我还要感谢我高二、高三的数学老师——William Pender, 他绝对是世界上最好的微积分老师。这本书中很多的方法都是从他的教学中获得的启发。我希望他能原谅我曲线不画箭头, 所有的坐标轴上没有标注, 在每一个  $+C$  后都忽视写“对于任意一个常数  $C$ ”。

我的朋友和家人都给了我无私的支持, 尤其是我的父母 Freda 和 Michael, 姐姐 Carly, 祖母 Rena, 还有姻亲 Marianna 和 Michael。最后, 我要特别感谢我的妻子 Amy 在我写书过程中对我的帮助和理解, 她总是陪伴在我身边 (感谢她为我画的“爬山者”! )。

# 目 录

<b>第 1 章 函数、图像和直线</b> .....	1	<b>第 4 章 如何求解涉及多项式的极限问题</b> .....	47
1.1 函数 .....	1	4.1 包含当 $x \rightarrow a$ 时的有理函数的极限 .....	47
1.1.1 区间表示法 .....	3	4.2 当 $x \rightarrow a$ 时的涉及平方根的极限 .....	50
1.1.2 求定义域 .....	3	4.3 当 $x \rightarrow \infty$ 时涉及的有理函数的极限 .....	51
1.1.3 利用图像求值域 .....	4	4.4 当 $x \rightarrow \infty$ 时的多项式型函数的极限 .....	56
1.1.4 垂线检验 .....	5	4.5 当 $x \rightarrow -\infty$ 时的有理函数的极限 .....	59
1.2 反函数 .....	6	4.6 包含绝对值的极限 .....	61
1.2.1 水平线检验 .....	7	<b>第 5 章 连续性和可导性</b> .....	63
1.2.2 求逆 .....	8	5.1 连续性 .....	63
1.2.3 限制定义域 .....	8	5.1.1 在一点处连续 .....	63
1.2.4 反函数的反函数 .....	9	5.1.2 在一个区间上连续 .....	64
1.3 函数的复合 .....	10	5.1.3 连续函数的例子 .....	65
1.4 奇函数和偶函数 .....	12	5.1.4 介值定理 .....	67
1.5 线性函数的图像 .....	14	5.1.5 一个更难的 IVT 例子 .....	69
1.6 常见函数及其图像 .....	16	5.1.6 连续函数的最大值和最小值 .....	70
<b>第 2 章 三角学回顾</b> .....	21	5.2 可导性 .....	71
2.1 基本知识 .....	21	5.2.1 平均速率 .....	71
2.2 三角函数定义域的扩展 .....	23	5.2.2 位移和速度 .....	72
2.2.1 ASTC 方法 .....	25	5.2.3 瞬时速度 .....	73
2.2.2 $[0, 2\pi]$ 以外的三角函数 .....	27	5.2.4 速度的图像解释 .....	74
2.3 三角函数的图像 .....	29	5.2.5 切线 .....	75
2.4 三角恒等式 .....	32	5.2.6 导函数 .....	76
<b>第 3 章 极限导论</b> .....	34	5.2.7 作为极限比的导数 .....	78
3.1 极限: 基本思想 .....	34	5.2.8 线性函数的导数 .....	80
3.2 左极限与右极限 .....	36	5.2.9 二阶导数和更高阶 .....	
3.3 何时不存在极限 .....	37		
3.4 在 $\infty$ 和 $-\infty$ 处的极限 .....	38		
3.5 关于渐近线的两个常见错误认知 .....	41		
3.6 三明治定理 .....	43		
3.7 极限的基本类型小结 .....	45		

	导数·····	80		8.1.2 隐函数求二阶导·····	137
	5.2.10 导数何时不存在·····	81	8.2 相关变化率·····	138	
	5.2.11 可导性和连续性·····	82	8.2.1 一个简单的例子·····	140	
<b>第 6 章</b>	<b>如何求解微分问题·····</b>	<b>84</b>	8.2.2 一个稍难的例子·····	141	
6.1	使用定义求导·····	84	8.2.3 一个更难例子·····	142	
6.2	求导(好方法)·····	87	8.2.4 一个非常难的例子·····	144	
	6.2.1 函数的常数倍·····	88	<b>第 9 章</b>	<b>指数函数和对数函数·····</b>	<b>148</b>
	6.2.2 函数和与函数差·····	88	9.1 基础知识·····	148	
	6.2.3 通过乘积法则求积		9.1.1 指数函数的回顾·····	148	
	函数的导数·····	88	9.1.2 对数函数的回顾·····	149	
	6.2.4 通过商法则求商		9.1.3 对数函数、指数函数及		
	函数的导数·····	90	反函数·····	150	
	6.2.5 通过链式求导法则求		9.1.4 对数法则·····	151	
	复合函数的导数·····	91	9.2 e 的定义·····	153	
	6.2.6 一个令人讨厌的例子·····	94	9.2.1 一个有关复利的例子·····	153	
	6.2.7 乘积法则和链式求导		9.2.2 我们的问题的答案·····	154	
	法则的理由·····	96	9.2.3 关于 e 和对数函数的		
6.3	求切线方程·····	98	更多内容·····	156	
6.4	速度和加速度·····	99	9.3 对数函数和指数函数求导·····	158	
6.5	导数伪装的极限·····	102	9.4 如何求解涉及指数函数和对数		
6.6	分段函数的导数·····	104	函数的极限·····	161	
6.7	直接画出导函数的图像·····	107	9.4.1 涉及 e 的定义的极限·····	161	
<b>第 7 章</b>	<b>三角函数的极限和导数·····</b>	<b>111</b>	9.4.2 指数函数在 0 附近的		
7.1	涉及三角函数的极限·····	111	行为·····	162	
	7.1.1 小数情况·····	111	9.4.3 对数函数在 1 附近的		
	7.1.2 问题的求解——小数		行为·····	164	
	的情况·····	113	9.4.4 指数函数在 $\infty$ 或 $-\infty$		
	7.1.3 大数的情况·····	117	附近的行为·····	165	
	7.1.4 “其他的”情况·····	120	9.4.5 对数函数在 $\infty$ 附近的		
	7.1.5 一个重要极限的证明·····	121	行为·····	167	
7.2	涉及三角函数的导数·····	124	9.4.6 对数函数在 0 附近的		
	7.2.1 求三角函数导数		行为·····	169	
	的例子·····	127	9.5 对数函数求导·····	170	
	7.2.2 简谐运动·····	128	9.6 指数的增长和衰退·····	174	
	7.2.3 一个好奇的函数·····	129	9.6.1 指数增长·····	175	
<b>第 8 章</b>	<b>隐函数求导和相关变化率·····</b>	<b>132</b>	9.6.2 指数衰退·····	176	
8.1	隐函数求导·····	132	9.7 双曲函数·····	178	
	8.1.1 技巧和例子·····	133	<b>第 10 章</b>	<b>反函数和反三角函数·····</b>	<b>182</b>
			10.1 导数和反函数·····	182	

10.1.1	使用导数证明反函数存在	182	12.3.2	使用完全方法绘制函数图像: 例 1	229
10.1.2	导数和反函数: 可能出现的问题	183	12.3.3	例 2	230
10.1.3	求反函数的导数	184	12.3.4	例 3	233
10.1.4	一个重要的例子	186	12.3.5	例 4	236
10.2	反三角函数	188	<b>第 13 章</b>	<b>最优化和线性化</b>	240
10.2.1	反正弦函数	188	13.1	最优化问题	240
10.2.2	反余弦函数	191	13.1.1	一个简单的最优化例子	240
10.2.3	反正切函数	193	13.1.2	最优化问题: 通常的方法	241
10.2.4	反正割函数	195	13.1.3	一个最优化的例子	242
10.2.5	反余割函数及反余切函数	196	13.1.4	另一个最优化的例子	244
10.2.6	计算反三角函数	197	13.1.5	在最优化问题中使用隐函数的求导方法	247
10.3	反双曲函数	199	13.1.6	一个较难的最优化例题	247
<b>第 11 章</b>	<b>导数和图像</b>	203	13.2	线性化	250
11.1	函数的极值问题	203	13.2.1	线性化的归纳	251
11.1.1	全局极值和局部极值	203	13.2.2	微分	253
11.1.2	极值定理	204	13.2.3	线性化的总结和例子	255
11.1.3	怎样求全局最大值和全局最小值	205	13.2.4	在我们估算过程中的误差	256
11.2	罗尔定理	208	13.3	牛顿方法	258
11.3	中值定理	210	<b>第 14 章</b>	<b>洛必达法则及极限问题</b>	264
11.4	二次导数及图像	213	14.1	洛必达法则	264
11.5	对于导数为零点的分类	215	14.1.1	类型 A: $0/0$	264
11.5.1	一次导数的应用	216	14.1.2	类型 A: $\pm\infty/\pm\infty$	267
11.5.2	二阶导数的应用	217	14.1.3	类型 B1( $\infty - \infty$ )	268
<b>第 12 章</b>	<b>如何绘制函数图像</b>	220	14.1.4	类型 B2( $0 \times \pm\infty$ )	270
12.1	怎样建立符号表格	220	14.1.5	类型 C( $1^{\pm\infty}, 0^0$ 或 $\infty^0$ )	271
12.1.1	制作一次导数的符号表格	222	14.1.6	洛必达法则类型的总结	273
12.1.2	制作二次导数的表格	223	14.2	关于极限的总结	274
12.2	绘制函数图像的完全方法	225			
12.3	例题	226			
12.3.1	一个不使用导数的例子	226			

<b>第 15 章 积分</b> .....	277	17.6 怎样解决问题: 微积分第二	
15.1 求和符号 .....	277	基本定理 .....	337
15.1.1 一个有用的求和 .....	280	17.6.1 计算不定积分 .....	338
15.1.2 伸缩求和法 .....	281	17.6.2 计算定积分 .....	340
15.2 位移和面积 .....	284	17.6.3 非代数和面积和	
15.2.1 三个简单的例子 .....	284	绝对值 .....	343
15.2.2 一段更常规的旅行 .....	286	17.7 技术上的观点 .....	346
15.2.3 有正负的面积 .....	288	17.8 微积分第一基本定理的	
15.2.4 连续的速度 .....	289	证明 .....	347
15.2.5 两个特别的估算 .....	292	<b>第 18 章 积分的方法: 第一部分</b> .....	349
<b>第 16 章 定积分</b> .....	295	18.1 替代法 .....	349
16.1 基本思想 .....	295	18.1.1 换元法和定积分 .....	352
16.2 定积分的定义 .....	299	18.1.2 怎样决定替代公式 .....	355
16.3 定积分的特性 .....	303	18.1.3 换元法的理论解释 .....	357
16.4 求面积 .....	307	18.2 分部积分法 .....	358
16.4.1 求非代数和面积 .....	308	18.3 部分分式 .....	363
16.4.2 求解两条曲线之间的		18.3.1 部分分式的代数	
面积 .....	310	运算 .....	363
16.4.3 求曲线与 $y$ 轴所围成		18.3.2 对每一部分积分 .....	367
的面积 .....	312	18.3.3 方法和一个完整的	
16.5 估算积分 .....	315	例子 .....	369
16.6 积分的平均值和中值定理 .....	318	<b>第 19 章 积分的方法: 第二部分</b> .....	374
16.7 不可积的函数 .....	321	19.1 应用三角函数公式的积分 .....	374
<b>第 17 章 微积分基本定理</b> .....	323	19.2 关于三角函数的幂的积分 .....	377
17.1 以其他函数为积分的函数 .....	323	19.2.1 $\sin$ 或 $\cos$ 的幂 .....	377
17.2 微积分的第一基本定理 .....	326	19.2.2 $\tan$ 的幂 .....	379
17.3 微积分的第二基本定理 .....	330	19.2.3 $\sec$ 的幂 .....	380
17.4 不定积分 .....	331	19.2.4 $\cot$ 的幂 .....	382
17.5 怎样解决问题: 微积分第一		19.2.5 $\csc$ 的幂 .....	383
基本定理 .....	333	19.2.6 递归公式 .....	383
17.5.1 变形 1: 变量是积分		19.3 关于三角换元法的积分 .....	385
下限 .....	334	19.3.1 类型 1: $\sqrt{a^2 - x^2}$ .....	385
17.5.2 变形 2: 积分上限是		19.3.2 类型 2: $\sqrt{x^2 + a^2}$ .....	387
一个函数 .....	334	19.3.3 类型 3: $\sqrt{x^2 - a^2}$ .....	388
17.5.3 变形 3: 积分上下限		19.3.4 配方和三角换元法 .....	389
都为函数 .....	336	19.3.5 关于三角换元法的	
17.5.4 变形 4: 极限伪装成		总结 .....	390
导数 .....	337	19.3.6 平方根的方法和三角	



	换元法	390		22.1.1 数列和函数的联系	436
19.4	积分技巧综述	392		22.1.2 两个重要数列	438
<b>第 20 章</b>	<b>反常积分: 基本概念</b>	394	<b>22.2</b>	<b>级数的收敛与发散</b>	439
20.1	收敛和发散	394	22.3	第 $n$ 项判别法 (理论)	443
20.1.1	关于反常积分的一些例子	396	22.4	无穷级数和反常积分的性质	444
20.1.2	其他的破裂点	398	22.4.1	比较判别法 (理论)	444
20.2	关于无穷区间的积分	399	22.4.2	极限比较判别法 (理论)	445
20.3	比较判别法 (理论)	401	22.4.3	$p$ 判别法 (理论)	446
20.4	极限比较判别法 (理论)	403	22.4.4	绝对收敛判别法	447
20.4.1	函数互为渐近线	403	22.5	级数的新判别法	448
20.4.2	关于判别法的陈述	405	22.5.1	比式判别法 (理论)	448
20.5	$P$ 判别法 (理论)	406	22.5.2	根式判别法 (理论)	450
20.6	绝对收敛判别法	408	22.5.3	积分判别法 (理论)	451
<b>第 21 章</b>	<b>反常积分: 如何解题</b>	411	22.5.4	交错级数判别法 (理论)	454
21.1	如何开始	411	<b>第 23 章</b>	<b>如何求解级数问题</b>	457
21.1.1	拆分积分	411	23.1	如何求几何级数的值	457
21.1.2	如何处理负函数值	412	23.2	如何应用第 $n$ 项判别法	459
21.2	积分判别法总结	414	23.3	如何应用比式判别法	460
21.3	$\infty$ 和 $-\infty$ 附近的常见函数	415	23.4	如何应用根式判别法	463
21.3.1	$\infty$ 和 $-\infty$ 附近的多项式和多项式型函数	416	23.5	如何应用积分判别法	464
21.3.2	$\infty$ 和 $-\infty$ 附近的三角函数	418	23.6	如何应用比较判别法、极限比较判别法和 $p$ 判别法	466
21.3.3	$\infty$ 和 $-\infty$ 附近的指数	420	23.7	如何应对含负项的级数	470
21.3.4	$\infty$ 附近的对数	423	<b>第 24 章</b>	<b>泰勒多项式、泰勒级数和幂级数导论</b>	475
21.4	常见函数在 0 附近的情形	427	24.1	近似值和泰勒多项式	475
21.4.1	0 附近的多项式和多项式型函数	427	24.1.1	重访线性化	476
21.4.2	0 附近的三角函数	428	24.1.2	二次近似	476
21.4.3	0 附近的指数函数	429	24.1.3	高阶近似	477
21.4.4	0 附近的对数函数	431	24.1.4	泰勒定理	478
21.4.5	0 附近的更一般函数	432	24.2	幂级数和泰勒级数	481
21.5	如何应对不在 0 或 $\infty$ 处的瑕点	433	24.2.1	一般幂级数	482
<b>第 22 章</b>	<b>数列和级数: 基本概念</b>	435	24.2.2	泰勒级数和麦克劳林级数	484
22.1	数列的收敛和发散	435	24.2.3	泰勒级数的收敛性	485