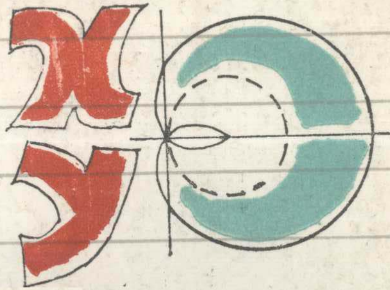

高中代数标准化题型分析与训练

河南科学技术出版社

青年自学丛书

高中代数

标准化题型分析与训练

河南科学技术出版社

编写　项昭义　李登印
蒋　庚　王传勋
编审　周其恩

青年自学丛书
高　中　代　数
标准化题型分析与训练
责任编辑　刘　嘉
河南科学技术出版社出版
新　郑　县　印　刷　厂　印　刷
河　南　省　新　华　书　店　发　行
787×1092毫米 32开本 10.875印张 212千字
1988年8月第1版　1990年4月第2次印刷
印数41001—47047册
ISBN　7—5349—0225—8/G·226
定价：3.46元

出版说明

为了帮助社会青年和高中学生更好地学习外语、数学、物理、化学、生物等课程，适应当前教学改革的需要，我们根据教学大纲的要求，结合教材内容，组织编写出版了这几个学科《标准化题型分析与训练》，供自学高中课程的社会青年和高中学生阅读，也可供高中教师教学时参考。

1988年4月

前　　言

本册书的第一篇总论，对标准化题型作了介绍和分析，对选择题的解法作了分析和总结；第二篇对高中代数以章为单位，结合本章知识内容，以解题方法为线索，比较系统地叙述解题的思路并举例说明。在这个基础上给出了A、B、C三组练习题，并附有大部分习题的答案和比较详细的提示。根据数学学科的特点和当前高中数学教学的实际情况与需要，书中的例题和习题除给出了客观性题目外，还安排了一定数量的传统题目，这样有利于全面考查学生对基本概念、基本技能掌握的情况和分析问题、解决问题的能力，全面体现《全日制中学数学教学大纲》的要求。

参加本书编写的有：项昭义（总论）、李登印（第一章）、蒋庚（第二～四章）、王传勋（第五～八章），全书由周其恩编审。

由于我们水平所限，书中错误和不妥之处在所难免，恳望读者批评指正。

编者

1988年4月

目　录

第一篇　总　论

第一章　关于标准化题型介绍及举例

一、数学选择题的定义

所谓标准化数学题型，即选择题型，是相对于传统的数学题型而言的。数学选择题型的实质是一种判断题型，其特点是给出若干个数学判断*，要求分辨其真假。

常用的数学选择题型包括有正误题和我们通常所说的选择题两大类。我们主要研究后一种选择题。

所谓正误题，也就是是非题。这主要是指，给出一个数学判断，要求判断其真假。这种题型大多是概念或性质的辨析。我们是熟悉的。

通常所说的选择题，就是指，在每个题目的后边，提供 4 ～ 5 个供选择的结论。一般只有一个结论正确，要求把这个符合要求的结论选出来。

---

*　判断是对客观事物有所肯定或有所否定的思维形式。从判断的内涵上看，有真判断，假判断之分；从判断的结构形式上看，有简单判断、复合判断两类。

选择题是标准化试题的重要题型。数学选择题在国外已风行多年，因为它便于电子计算机评卷计分，故近三四十年来，国外在中学数学中选择题型的运用，普及、深入而广泛。又因为它具有较强的针对性，较高的分辨度，较大的知识容度，较好的评分准确度等优点，所以在国内近几年也运用起来了。可以预料，在今后的数学测试中，即不论在全国初高中数学联赛试题中，或在全国高招入学考试数学试题中，选择题将越来越受到重视。

选择题的逻辑结构特点是，它一般由指令性语言、题干和选择支三个部分组成。为便于说明问题，我们先看一个例子：

例1 下面的每个小题，每题都给出代号为A，B，C，D的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，试把正确结论的代号写在题后的圆括号内：

（1）设S，T是两个非空集合，且$S \subsetneq T$，$\subsetneq S$，令$x = S \cap T$，那么$S \cup X$等于（ ）。

（A）x；　　　（B）T；

（C）ϕ；　　　（D）S。

（2）设a，b是满足ab<0的实数，那么（ ）。

（A）$|a+b| > |a-b|$；

（B）$|a+b| < |a-b|$；

（C）$|a-b| < |a| - |b|$；

（D）$|a-b| < |a| + |b|$。

（3）已知E，F，G，H为空间中的四个点，设

命题甲：点E，F，G，H不共面.

命题乙：直线EF和GH不相交.

（A） 甲是乙的充分条件，但不是必要条件；

（B） 甲是乙的必要条件，但不是充分条件；

（C） 甲是乙的充要条件；

（D） 甲既不是乙的充分条件，也不是乙的必要条件。

（4） 要得到函数$y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$的图像，只需将函数$y=\sin 2x$的图像（如图1—1—1）（ ）。

（A） 向左平行移动$\frac{\pi}{3}$；　（B） 向右平行移动$\frac{\pi}{3}$；

（C） 向左平行移动$\frac{\pi}{6}$；　（D） 向右平行移动$\frac{\pi}{6}$。

（5） 极坐标方程$\rho=\sin\theta+2\cos\theta$所表示的曲线是（ ）

（A） 直线；

（B） 圆；

（C） 双曲线；

（D） 抛物线。

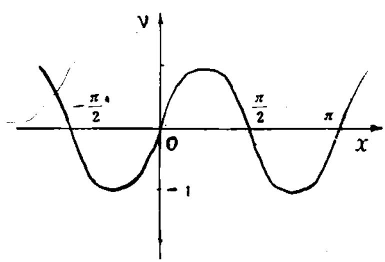

图1—1—1

如例1开头的一段文字叙述，就是指令性语言，其主旨是说明答题的基本要求。指令性语言，一般写在所有选择题的前边，总题号的后边。

例1的五个选择题中，每个选择题的四个结论前边

的语句就是题干，题干是指题目内容的句子、表格或插图。例1中的（4）的题干包含了图形。

如例1的五个选择题中，每个选择题的四个结论，就叫做选择支。选择支一般地是四个，也有五个的，但不论是四个或五个，必须至少有一个是正确的，例1（4）题的四个选择支中，（D）是正确的，而其它三个〔（A）、（B）、（C）〕是错误的。选择支中错误的结论，叫做干扰支。

选择题的应用功能主要表现在：

（1）具有较强的概念性，有利于培养思维的深刻性和批判性。

为了辨析数学概念和性质，利用选择题这一工具是合适的。选择题的干扰支功能是，可以澄清某些概念上的模糊和性质上邻近区域的混淆的，有利于培养数学思维的深刻性和批判性。

例如例1（3）题，是考察对充要条件理解程度的一道妙题，四个选择支选谁？——我们从分析题干的特点入手，$\because$点E，F，G，H不共面，$\therefore$直线EF和GH必不相交，这就是说，甲是乙的充分条件，但甲是不是乙的必要条件？我们再分析：若直线EF和GH不相交，但点E，F，G，H可以共面吗？这就存在一个性质上邻近区域易混淆的问题，如果你认为EF、GH不相交，那么点E，F，G，H也不能共面，那就错了，比如$EF \parallel GH$时，EF，GH不相交，但共面。这就是说，甲不是乙的必要条件。再根据指令性语言：“有且只有一个结论是正确的”可判断另外三个选择支都是错误的。故只有（A）正确。

事实上解选择题的过程，就是培养思维批判性的过程。我们选择（A）正确，那就是否定其他三个选择支的正确，这种思辨的批判性，正是提高数学素养所应具备的思维品质。

例2 请解下面的选择题组：

（1）如果$z=\sqrt{2}(\cos 40^\circ-i\sin 50^\circ)$，那么$\arg z$是（　）。

（A）320°；（B）45°；（C）315°；（D）310°。

（2）如果$z=1+\cos 200^\circ+i\sin 200^\circ$，那么$z$和$\arg z$分别是（　）。

（A）$2\cos 100^\circ$、100°；（B）$2\sin 10^\circ$、26°；

（C）$2\cos 80^\circ$、280°；（D）$2\cos 80^\circ$、100°。

（3）如果$z=r(\cos\theta-i\sin\theta)$（$r<0$，$-\frac{\pi}{2}<\theta<0$），

那么z的三角式应是（　）。

（A）$r[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$；

（B）$-r[\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta)]$；

（C）$-r[\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)]$；

（D）$-r[\cos(2\pi-\theta)+i\sin(2\pi-\theta)]$。

分析：这是一组阶梯式的题型，可以培养思维的深刻性。

（1）
$$\begin{aligned}z&=\sqrt{2}(\cos 40^\circ-i\cos 50^\circ)\\&=\sqrt{2}(\cos 40^\circ-i\sin 40^\circ)\\&=\sqrt{2}(\cos 320^\circ+i\sin 320^\circ).\end{aligned}$$

∴应选择（A）。

（2）$z=1+\cos 200^\circ+i\sin 200^\circ$

$$=2\cos^2 100^\circ+2i\sin 100^\circ\cos 100^\circ$$

$$=2\cos 100^\circ(\cos 100^\circ+i\sin 100^\circ). \qquad (*)$$

思维之河流到此处要拐弯了，如果你认为$2\cos 100^\circ$是模r，辐角是100°，从而选择（A），那就错了！我们知道$r>0$，而此处$2\cos 100^\circ<0$，$\therefore r\neq 2\cos 100^\circ$。

于是，我们接着(*)式，就有

$$2\cos 100^\circ(\cos 100^\circ+i\sin 100^\circ)$$

$$=-2\cos 80^\circ(\cos 100^\circ+i\sin 100^\circ)$$

$$=2\cos 80^\circ[-\cos 100^\circ+i(-\sin 100^\circ)]$$

$$=2\cos 80^\circ(\cos 280^\circ+i\sin 280^\circ).$$

$\therefore$应选择（C）。

（3）$\because r<0$ $\therefore$（A）可排除。（B）、（C）、（D）选谁呢？——我们从已知条件式出发进行变形：

$$z=r(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$=-r(-\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$=-r[\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)].$$

$\therefore$应选择（C）。

说明：本题组的阶梯式体现在：（1）变形难度递增、两步变形、综合运用三角公式，由具体到抽象的表达式；（2）干扰支的干扰功能递增，负号隐蔽出现（如$\cos 100^\circ$，$r<0$），辐角形式复杂，用字母表示。

思维的深刻性在于排除一切干扰因素，基于对概念的深刻理解，对公式的灵活处理，从而达到正确选择的目的。

例3 在下列各方程中，哪一个方程的图形是一条直线？（ ）。

（A）$\lg x-\lg y=1$；　　（B）$\sqrt{(x-y)^2}=1$；

(C) $\dfrac{1}{x-y}=1$；

(D) $\operatorname{tg}(x-y)=1$，$(0<x-y<2\pi)$。

分析：由$\lg x-\lg y=1 \Rightarrow \lg\dfrac{x}{y}=\lg 10 \Rightarrow x=10y$，

即 $x-10y=0$ $(y\neq 0)$，从而否定（A）。

由$\sqrt{(x-y)^2}=1 \Rightarrow (x-y)^2=1$，即$x-y\pm 1=0$，这表示两条直线，从而否定（B）。

由 $\operatorname{tg}(x-y)=1 \Rightarrow x-y=\dfrac{\pi}{4}$

或$x-y=\dfrac{5\pi}{4}$ $(0<x-y<2\pi)$，

即 $x-y-\dfrac{\pi}{4}=0$ 或 $x-y-\dfrac{5\pi}{4}=0$，表示两条直线，从而否定（D），故应选择（C）。

这是排除法。排除法的实质是思维批判性功能的具体应用。

（2）具有较强的严密性，有利于培养思维的周密性和科学性。

数学选择题的选择支具有歧义性和多向性。使我们在做题时稍不留心便会导致选择干扰支，从而失误。这就要求我们谨慎细心，多层次思考，多方位分析，寻求规律，细致解题，有利于培养思维的周密性和科学性。

如例1（5）的解法：$\because \rho=\sin\theta+2\cos\theta$，

$\therefore \rho^2=\rho\sin\theta+2\rho\cos\theta$，

$x^2+y^2=y+2x$， ①

即$(x-1)^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4}$，这是一个以$(1,\frac{1}{2})$为圆心，以$\frac{\sqrt{5}}{2}$为半径的圆，故应选择（B）。

在这里，思维的周密性与科学性表现在：一定要把方程①化为圆锥曲线的标准方程。这就容易获得正确结论，从而排除其他选择支。

例4 在复平面上，设动点z对应的复数为z，z到复数$-i$和$1+i$所对应的点的距离之和等于5，则动点z的轨迹方程为（ ）

（A）$|z+i|+|z-1-i|=5$；

（B）$|z-i|+|z+1+i|=5$；

（C）$(z+i)+(z-1-i)=5$；

（D）$(z-i)+(z+1+i)=5$。

解：由两个复数所对应的点的距离定义可知：

$$|z-(-i)|+|z-(1+i)|=5,$$

即 $|z+i|+|z-1-i|=5$。

故应选择（A）。

说明：本例的四个选择支，（A），（B）与复平面上上两点的距离定义相近，但（B）错了一个符号。（C），（D）与定义相差甚远，其歧义性显然，唯（A）正确。

（3）具有较强的灵活性，有利于培养思维的流畅性和广阔性。

不论是哪种选择题，由于本身结构特点的规定性，故具有灵活性这一重要特点，判断正误（即判断是非）也好，多项选择也好，它都具有多角度，多层次，多侧面，多方向

的思考机会，所以特别有利于培养思维的流畅性和广阔性。

例5 已知方程$x^2+x\sin2\theta-\cos\theta=0$ $(\pi<\theta<\frac{3\pi}{2})$的两个根是$\alpha$、$\beta$，如果等比数列为

$$1,\ (\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}),\ (\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})^2,\ \cdots\cdots$$

前100项的和为零，θ应取的值是（ ）。

（A）$\frac{1}{6}\pi$；（B）$\frac{4}{3}\pi$；（C）$\frac{7}{6}\pi$；（D）$\frac{4}{5}\pi$。

分析：一看到二次方程有两根，立即会联想到韦达定理，又观察到数列从第二项起，各项均有$(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})$的形式，立即联想到用三角函数式表示出公比$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$，结合已知条件$S_{100}=0$，求出三角函数值。问题便迎刃而解了。整个思维过程似行云流水，反映了思维的流畅性。

略解：由韦达定理，有

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\sin2\theta,\\ \alpha\beta=-\cos\theta.\end{cases}$$

从而 $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=2\sin\theta$。

于是有

$$S_{100}=\frac{1-(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})^{100}}{1-(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})}=\frac{1-(2\sin\theta)^{100}}{1-2\sin\theta}=0.$$

解得　$\sin\theta=\pm\frac{1}{2}$，

$\because\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$，　$\therefore\theta=\frac{7}{6}\pi$，故应选择（C）。

说明：本例是三角、二次方程、等比数列的综合题。解决本题的关键是灵活运用韦达定理。思维的广阔性还表现在：本例可以推广和联想，比如保存原题结构不变，把"前100项的和为零"，改换为"前n 项的和为零"，其解题思路与方法均如上述。

例6　设P是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上一点，过$A(-a,0)$，$A'(a,0)$分别作$PA$，$PA'$的垂线交于$Q$，当$P$在椭圆上运动时，则$Q$点的轨迹方程是（　）图1—1—2。

（A）　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{a^2}{b}\right)^2}=1$（$y\neq0$）；

（B）　$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{a^2}{b}\right)^2}=1$（$y\neq0$）；

（C）　$\frac{x^2}{\left(\frac{a^2}{b}\right)^2}+\frac{b^2}{a^2}=1$（$y\neq0$）；

（D）　$\frac{x^2}{\left(\frac{a^2}{b}\right)^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$（$y\neq0$）。

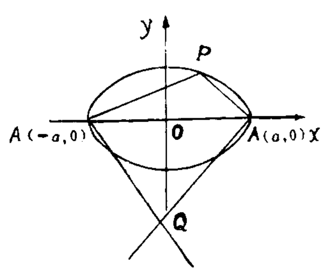

图1—1—2

略解：设$P(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$，