全国考研辅导班教材系列

2011年 MBA、MPA、MPAcc 联考 数学完全攻略

● 主编 华杰MBA考前培训
张凯 刘智 朱伟

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国考研辅导班教材系列

2011年 MBA、MPA、MPAcc 联考 数学完全攻略

2011 Nian MBA、MPA、MPAcc Liankao
Shuxue Wanquan Gonglüe

● 主编 华杰MBA考前培训
张凯 刘智 朱伟

高等教育出版社 · 北京
HIGHER EDUCATION PRESS · BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

2011年MBA、MPA、MPAcc联考数学完全攻略/张凯，刘智，朱伟主编. —北京:高等教育出版社，2010.6

ISBN 978-7-04-029401-9

Ⅰ.①2… Ⅱ.①张…②刘…③朱… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第082464号

策划编辑 刘 佳 责任编辑 雷旭波 封面设计 王凌波
版式设计 余 杨 责任校对 王 超 责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	咨询热线	400-810-0598 800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京宏伟双华印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×1092 1/16	版 次	2010年6月第1版
印 张	10.25	印 次	2010年7月第3次印刷
字 数	280 000	定 价	24.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 29401-00

前　言

MBA、MPA、MPAcc联考中的数学科考试是研究生入学考试中的一个很特别的例子，广大考生需要用专门的方法去迅速提高。

特别点在于：

(1) 联考中的数学试题只考初等数学与概率初步，看起来是初中与高中的知识，但是真正的联考题目很多带有明显的竞赛色彩，难度与出题点与其他任何科目不同。

(2) 联考中数学知识的各个部分衔接不是很密切，也就是说考的是一些“点”，而不是“线”。联考不要求系统学习数学知识，只需要按照大纲的考点与要求掌握就可以。这点很重要，一些考生学了很多根本不考的数学知识，南辕北辙，浪费了时间，提高不了成绩，实在可惜。

(3) 联考对考生的做题速度、准确度、迅速判断能力要求很高。数学目前是25道题，考试需要70多分钟，也就是说解每道题平均不到3分钟，所以如果方法不对、技巧性不够，是很难取得好成绩的。

(4) 联考中独有的题型：条件充分性判断。这个题型估计60%以上的考生会将因果搞混淆，将充分变成必要，将结果搞成条件。而目前市面上很多书对此类题型分析得很模糊，更增加了考生的迷惑。

面对纷繁无序的备考，很多考生要么在一大堆资料中找不到重点与方向，要么在题海中苦苦地挣扎而不得其解，成绩几乎提高不了多少，既浪费精力，又打击士气。根据多年的教学经验，笔者认为，考生应在充分理解考试大纲的基础上，对联考内容、题型的各种变化能很好地把握，从而保证所做的每道题都是有的放矢、富有成效的。

本书力图根据考生的上述特点，科学有效地快速提高考生的成绩。本书每一章的主要内容如下：

(1) 对本考试独有的新题型——条件充分性判断题目做详细的解析，并通过典型例题让读者一目了然。

(2) 严格依据大纲对所有考点涉及的概念、原理、知识点做全面系统的入门讲解，同时对各类基本命题类型、考试的经常出题点进行系统的分析，以便考生在最短的时间对联考的范围、内容、特点有充分的认识，从而基本能应付考试中遇到的问题。

(3) 主要对考试中可能出现的各类题型、热点做更进一步的讲解。本部分尤其重视对解题技巧的剖析，以便更快、更准、更好地解题，使考生的应试技巧进一步提高。

(4) 主要是对历年真题的解析，以便使考生对命题人员的思路、重点、方向有更深刻的了解，从而在考场上做到游刃有余，所向披靡！

(5) 对数学考试的思想、思维模式进行展开，以利于考生更系统、更宏观地掌握数学实质，提高分数。

总之，联考的数学考试不是大家想象的那么简单，更不是一些人所说的那么难，只要用力、用心、用巧，一切皆有可能！

本书难免会有疏漏之处，热诚欢迎各位老师、考生及读者批评并提出宝贵意见，同时感谢国内MBA、MPA、MPAcc考前培训名牌华杰培训与高等教育出版社编辑对本书写作过程中给予的支持。

为满足不同阶段、不同程度考生的需求，编者将不断补充相关的资料信息，详见中国教育考试在线 www.eduexam.com.cn 及编者博客所在网站 www.mba600.com。

编者

2010年2月

于北京海淀

目　录

第一章　实数的概念、性质、运算及应用

第一节　充分条件与充分性判断

考试要求：全国硕士研究生入学统一考试管理类专业硕士学位联考综合能力考试中有 10 道条件充分性判断的考题，每题 3 分，共 30 分. 这 30 分是所有初试者最为害怕的 30 分，原因是题型太陌生，没有直接的选项，与传统的选择题相差很大. 这也是管理类专业硕士学位联考中数学试题最大的特点.

一、充分条件

定义　由条件 A 成立，就可以推出结论 B 成立（即 $A \Rightarrow B$ 是真命题），则说 A 是 B 的**充分条件**.

若 A 是 B 的充分条件，也可以说：A 具备了使 B 成立的充分性. 若 $A \nRightarrow B$，则说 A 不是 B 的充分条件，也可以说：A 不具备使 B 成立的充分性.

例如，设 A 为 $x=3$；B 为 $x \geqslant 3$. 当 $x=3$ 时，必有 $x \geqslant 3$ 成立，因为 $x \geqslant 3$ 就是 x 不小于 3，故 A 是 B 的充分条件，或说，对于 B 的成立，A 具有充分性. 显然，对于 A 的成立，B 不具有充分性.

又如，$x-1>2$ 不是 $3<x<7$ 的充分条件，同样 $x+2<9$ 也不是 $3<x<7$ 的充分条件，但 $x-1>2$ 与 $x+2<9$ 联合起来，即 $x-1>2$ 且 $x+2<9$，对于 $3<x<7$ 的成立具有充分性.

二、题型分析

在管理类专业硕士学位联考中，条件充分性判断题是一种单项选择题，有（A）、（B）、（C）、（D）、（E）五个选项. 但这种题型与一般选择题有区别：

（1）每一道条件充分性判断题的选项都相同.

（2）在一道具体的条件充分性判断题的后面不带选项.

这种题型的结构如图 1-1 所示.

条件充分性判断题的前提是非必要部分，有些题中有，有些题中没有，有些题中是隐含的. 要注意前提在条件中可以放心使用.

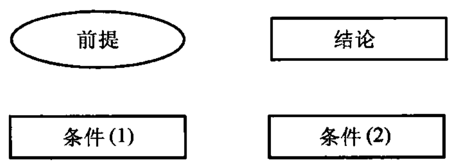

图 1-1

三、解题说明

条件充分性判断题要求判断所给的条件能否充分支持题中陈述的结论.

能否充分支持，就是能否推出. 如果条件成立时，结论也成立，即条件能够推出结论，则称条件充分，反之则不充分.

管理类专业硕士学位联考综合能力试卷中，条件充分性判断题的标准选项如下：

（A）条件（1）充分，但条件（2）不充分

（B）条件（2）充分，但条件（1）不充分

（C）条件（1）和条件（2）单独都不充分，但条件（1）和条件（2）联合起来充分

（D）条件（1）充分，条件（2）也充分

(E) 条件(1)和条件(2)单独都不充分，条件(1)和条件(2)联合起来也不充分

注意　为避免无谓的重复，节省篇幅，本书下文中所有的条件充分性判断题均以此五个选项为标准选项.

四、经典例题

例1(条件充分性判断)　要使$\frac{1}{a}>1$成立.

(1) $a<1$.　　　　(2) $a>1$.

【解题思路】　由于$a=-1$满足条件(1)，但$\frac{1}{a}=-1$不大于1，即题干不成立，所以条件(1)不充分.

由条件(2)，当$a>1$时，$\frac{1}{a}$的分母大于分子(分子、分母均为正数)，应有$\frac{1}{a}<1$成立，故$\frac{1}{a}>1$不成立，条件(2)也不充分.

【参考答案】　(E)

例2(条件充分性判断)　$a\geqslant 3$.

(1) $a=3$.　　　　(2) $a>3$.

【解题思路】　$a\geqslant 3\Leftrightarrow a>3$或$a=3\Leftrightarrow a$不小于3.

对(1)，$a=3\Rightarrow a$不小于3，故(1)充分.

对(2)，$a>3\Rightarrow a$不小于3，故(2)也充分.

【参考答案】　(D)

例3(条件充分性判断)　方程$x^2-5x+6=0$成立.

(1) $x=2$.　　　　(2) $(x-3)^2\leqslant 0, x\in \mathbf{R}$.

【解题思路】　由条件(1)知$x=2$，$x-2=0$，所以$(x-2)(x-3)=0$，即$x^2-5x+6=0$成立，所以条件(1)充分.

由条件(2)得$x=3$，所以$x-3=0$，即$x^2-5x+6=0$成立，所以条件(2)也充分.

【参考答案】　(D)

例4(条件充分性判断)　实数a,b,c满足$ab^2<b^2c$.

(1) $a+b+c=0$.　　　　(2) $a<b<c$.

【解题思路】　显然条件(1)不充分，取$a=-1,b=0,c=1$就可以说明.

对条件(2)，虽然有$a<c$，但不能确定b的符号，若$b=0$，则结论不成立，故(2)不充分.

联合时，依然不能确定b的符号，故联合时也不充分.

【参考答案】　(E)

例5(条件充分性判断)　录入一篇MBA论文，录入员刘军比录入员江敏录入速度慢.

(1) 录入员刘军与录入员乙合作，需2小时录完.

(2) 录入员乙与录入员江敏合作，需1小时30分钟录完.

【解题思路】　条件(1)与条件(2)显然单独均不具有得到录入员刘军比录入员江敏效率低的结论的充分性.

下面考虑条件(1)和条件(2)联合. 由于刘军、乙合作所需时间大于乙、江敏合作所需时间，所以刘军比江敏录入速度慢，即刘军的效率比江敏低.

也可以用如下的计算方法：设刘军单独录入需 x 小时录完，江敏单独录入需 y 小时录完.

由条件(1)，乙每小时录入量为$\frac{1}{2}-\frac{1}{x}$，再由条件(2)得

$$\frac{1}{y}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1.5}=\frac{2}{3},$$

所以

$$\frac{1}{y}=\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{6}>\frac{1}{x},$$

即：刘军每小时完成的工作量小于江敏每小时完成的工作量，即刘军的效率比江敏的低. 故此题应选(C).

【参考答案】 (C)

五、考试技巧

1. 从条件充分性判断题的标准选项和解题说明可以看出，要解答一道条件充分性判断题，需要做三件事：

(1) 判断条件(1)是否充分.

(2) 判断条件(2)是否充分.

(3) 有必要时判断条件(1)和条件(2)联合起来是否充分.

2. 如何说明一个条件充分？如何说明一个条件不充分？

要说明一个条件充分，一般是通过计算或推导，说明当条件成立时，结论也成立；要说明一个条件不充分，最实用的方法就是举反例，取特殊值，此特殊值能使条件成立，但结论不成立.

(1) 应注意的是，小范围$\Rightarrow$大范围，但大范围$\nRightarrow$小范围.

(2) 如果结论中有字母作分母，首先考虑条件能不能保证结论有意义，如果不能保证，就不充分.

(3) 如果条件与结论没有联系，或者结论中的要素在条件中没有出现，条件不充分.

(4) 如果结论比较复杂，或不好判断，先化简一下.

(5) 如果两个条件是互补的，要说明条件(1)不充分，就取特殊值，使条件(1)成立，条件(2)不成立，看结论是否成立.

(6) 如果取特殊值，使条件(1)成立，条件(2)也成立，但结论不成立，选(E).

第二节　实数的分类、性质和运算(基础)

考试要求：本部分主要涉及实数的概念与运算.

考试时间	2007 年 10 月	2008 年 1 月	2008 年 10 月	2009 年 1 月	2009 年 10 月	2010 年 1 月
题数	1/30	0/30	2/30	0/15	3/25	2/25
分值	2 分	0 分	5 分	0 分	9 分	6 分

注：第二栏“题数”中的 1/30 是指本部分有 1 题，当年数学总题数是 30 题，其余类似.

一、实数的分类

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\begin{cases}1\\ \text{质数(只有 1 和自身两个约数)}\\ \text{合数(有除 1 和自身以外的约数)}\end{cases}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\end{cases}\\ \text{无理数(无限不循环小数,常见的有 }\pi,\sqrt{2},-\sqrt{3}\text{ 等)}\end{cases}$$

二、数的整除

定理 设 a,b 是两个整数,其中 $b>0$,则存在整数 q,r 使得 $a=bq+r$ 成立,而且 q,r 都是唯一的.

a 叫做**被除数**;b 叫做**除数**;q 叫做 a 被 b 除所得的**不完全商**;r 叫做 a 被 b 除所得到的**余数**,且 $0\leqslant r<b$. 若余数 $r=0$,意味着 b 可以整除 a,或者说 a 可以被 b 整除.

例 1 若一整数 n 既能被 6 整除,又能被 8 整除,则它还可以被下列哪一项整除?

(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) 18

【解题思路】 $6=2\times3$,$8=2\times4$,整数 n 既可被 3 整除,又可被 4 整除,那么一定可以被 12 整除.

【参考答案】 (B)

例 2 当正整数 k 被 12 除时,其余数为 3,下列哪一项被 12 除时,其余数等于 6?

① $2k$ ② $6k$ ③ $4k+6$

(A) ① (B) ② (C) ③ (D) ①② (E) ①②③

【解题思路】 设该正整数 $k=12m+3$,则

$$2k=12\cdot2\cdot m+6,\quad 6k=12\cdot6\cdot m+12+6,$$
$$4k+6=12\cdot4\cdot m+12+6,$$

故知①②③均满足.

【参考答案】 (E)

解题技巧

1. 整除的性质:设 a,b,c 均为整数.

(1) 如果 a,b 都能够被 c 整除,那么它们的和与差也能够被 c 整除.

(2) 如果 b 与 c 的积能整除 a,那么 b 与 c 都能整除 a.

(3) 如果 c 能整除 b,b 能整除 a,那么 c 能整除 a.

(4) 如果 b 与 c 都能整除 a,且 b 与 c 互质,那么 b 与 c 的乘积能整除 a.

2. 数的整除特征.

(1) 零能被任意非零自然数整除.

(2) 能被 2 整除的数,其个位数字是 0,2,4,6,8 这 5 个数字其中之一.

(3) 各位数字之和能被 3(或 9)整除的数必能被 3(或 9)整除.

(4) 末两位数能被 4 整除的数必能被 4 整除.

(5) 末位是 0 或 5 的数能被 5 整除.

三、奇数与偶数

定义　能被 2 整除的自然数都是**偶数**;不能被 2 整除的自然数都是**奇数**. 偶数都可以表示成 $2k$（k 为整数）的形式;奇数都可以表示成 $2k+1$（k 为整数）的形式.

例 3　若 n 为任意自然数,则 n^2+n

（A）为偶数

（B）为奇数

（C）当 n 为偶数时是偶数,当 n 为奇数时是奇数

（D）不能确定

（E）以上结论均不正确

【解题思路】　因为 $n^2+n=n(n+1)$,n 与 $n+1$ 是两个相邻的自然数,其中必有一个是偶数,所以 n^2+n 能被 2 整除,故它是偶数.

【参考答案】　（A）

例 4（条件充分性判断）　正整数 x 是偶数.

（1）x 被 3 除时,其余数为 2.

（2）x 被 5 除时,其余数为 2.

【解题思路】　条件（1）:设 $x=3k_1+2$,当 k_1 为奇数时,x 为奇数;当 k_1 为偶数时,x 为偶数.

条件（2）:设 $x=5k_2+2$,当 k_2 为奇数时,x 为奇数;当 k_2 为偶数时,x 为偶数.

联合（1）,（2）,有 $x=3k_1+2=5k_2+2$,$k_1=\dfrac{5k_2}{3}$,由下表可知,无法确定 x 是偶数.

k_2	3	6	9	12	15	18	21
k_1	5	10	15	20	25	30	35
x	17	32	47	62	77	92	107

【参考答案】　（E）

解题技巧

奇数±奇数=偶数　　　　奇数×奇数=奇数

奇数±偶数=奇数　　　　奇数×偶数=偶数

偶数±偶数=偶数　　　　偶数×偶数=偶数

如果两个整数的和为奇数,那么这两个数一定是一奇一偶;

如果两个整数的积为奇数,那么这两个数一定都是奇数.

四、质数、合数

定义　若一个大于 1 的正整数只有 1 和它本身两个约数,则称这个正整数为**质数**.

若一个大于 1 的正整数有除 1 和自身以外的约数,则称这个正整数为**合数**.

例 5　两个质数的和是 49,那么这两个质数的乘积等于

（A）90　　（B）92　　（C）94　　（D）96　　（E）不能确定

【解题思路】　49 为奇数,两个数的和为奇数,必定一个数为奇数,一个数为偶数,而 2 是唯一的

一个偶质数,故其中一个数必定为2,则另一个数为47,这两个质数的乘积等于$2\times47=94$.

【参考答案】 (C)

例6 一个整数a与1 080的乘积是一个完全平方数,则a的最小值等于

(A) 2 (B) 6 (C) 10 (D) 15 (E) 30

【解题思路】 $1\ 080=2\times2\times2\times3\times3\times3\times5=2\times2\times3\times3\times2\times3\times5$

$=2^2\times3^2\times2\times3\times5$,

因此只需$a=2\times3\times5$,使得

$$1\ 080a=2^2\times3^2\times2\times3\times5\times2\times3\times5=2^2\times3^2\times2^2\times3^2\times5^2.$$

【参考答案】 (E)

例7 3个质数之积恰好等于它们和的5倍,这3个质数之和为

(A) 12 (B) 14 (C) 15 (D) 18 (E) 20

【解题思路】 设这3个质数分别为x,y,z,依题意有$xyz=5(x+y+z)$,所以xyz必能被5整除.又因为5是质数,所以x,y,z中必有一个是5.不妨设$x=5$和$y\leqslant z$,则有

$$yz=5+y+z,$$

所以

$$(y-1)(z-1)=6,$$

从而

$$\begin{cases}y-1=1,\\z-1=6,\end{cases}\text{或}\begin{cases}y-1=2,\\z-1=3,\end{cases}$$

所以质数$y=2,z=7$,从而$x+y+z=14$.

故本题正确选项为(B).

【参考答案】 (B)

解题技巧

1既不是质数,也不是合数;

2是最小的质数;

除2以外的质数都是奇数;

4是最小的合数.

五、最大公约数、最小公倍数

1. 公约数

定义 设$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ $(n\geqslant2)$是n个正整数,若d是它们中每一个数的约数,则称d为这n个正整数的**公约数**(或**公因数**).

n个正整数$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ $(n\geqslant2)$的公约数中最大的一个,叫做这n个正整数的**最大公约数**.

2. 公倍数

定义 设$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ $(n\geqslant2)$是n个正整数,若a是它们中每一个数的倍数,则称a为这n个正整数的**公倍数**.

n个正整数$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ $(n\geqslant2)$的公倍数中最小的一个,叫做这n个正整数的**最小公倍数**.

若n个正整数的最大公约数是1,则称这n个正整数**互质**.

例8 甲数和乙数的最大公约数是6,最小公倍数是90,如果甲数是18,那么乙数等于

(A) 26 (B) 30 (C) 90 (D) 92 (E) 98

【解题思路】 因为甲数和乙数的最大公约数是6,故可设这两数分别为$6k_1,6k_2$ $(k_1,k_2$互质$)$,

则有

$$90=6k_1\cdot k_2\Rightarrow k_1\cdot k_2=15,$$

由于 $6k_1=18$，则 $k_2=5$，乙数为 $6k_2=30$.

【参考答案】 (B)

例 9　两个数的最大公约数是 21，最小公倍数是 126，则这两个数的和等于

(A) 105　　(B) 147　　(C) 105 或 147　　(D) 105 或 145　　(E) 145

【解题思路】 因为两个数的最大公约数是 21，故可设这两数分别为 $21k_1, 21k_2$（k_1, k_2 互质，$k_1<k_2$），则有

$$126=21k_1\cdot k_2\Rightarrow k_1\cdot k_2=6,$$

得

$$\begin{cases}k_1=1,\\k_2=6,\end{cases}\text{或}\begin{cases}k_1=2,\\k_2=3,\end{cases}$$

故这两个数的和等于

$$1\times21+6\times21=147 \text{ 或 } 2\times21+3\times21=105.$$

【参考答案】 (C)

六、有理数和无理数

任何一个有理数都可以写成分数$\frac{m}{n}$的形式（m,n 均为整数，$n\neq0$）.

无理数，即非有理数之实数，不能写成分数$\frac{m}{n}$的形式（m,n 均为整数，$n\neq0$）.

例 10　下列各式中一定正确的是

(A) 两个无理数的和是无理数

(B) 两个无理数的乘积是无理数

(C) 两个无理数的乘积是有理数

(D) 一个有理数和一个无理数的乘积是无理数

(E) 一个有理数和一个无理数相加减，其结果是无理数

【解题思路】 两个无理数的和或差不一定是无理数，例如 $a=2-\sqrt{3}, b=2+\sqrt{3}$，则 $a+b=4$ 是有理数；两个无理数的乘积（或商）不一定是无理数，例如 $a=2-\sqrt{3}, b=2+\sqrt{3}$，则 $ab=2^2-3=1$ 是有理数；若 $a=3-\sqrt{3}, b=2+\sqrt{3}$，则 $ab=3+\sqrt{3}$ 是无理数. 因此(A)，(B)，(C)都不正确.

一个有理数和一个无理数的乘积可能是有理数，也可能是无理数. 例如 $a=0, b=2+\sqrt{5}$，则 $ab=0$ 是有理数；若 $a\neq0$，a 为有理数，b 为无理数，则 ab 一定是无理数. 因此(D)不正确.

一个有理数和一个无理数相加减，其结果一定是无理数，即(E)是正确的.

【参考答案】 (E)

例 11　若 x,y 为有理数，且满足方程$\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3}\right)x+\left(\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}\right)y-4-\pi=0$，那么 $x-y$ 的值等于

(A) 10　　(B) 12　　(C) 14　　(D) 16　　(E) 18

【解题思路】 整理原方程，得

$$\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y-4\right)+\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y-1\right)\pi=0,$$

因为 x,y 为有理数，所以

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y-4,\quad \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y-1,\quad 0$$

都是有理数，而 π 为无理数，所以

$$\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y-4=0,\\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y-1=0,\end{cases}$$

解得

$$x=12,y=-6,\text{即 } x-y=18.$$

【参考答案】（E）

例 12（条件充分性判断）　$m=n=0$.

（1）$m\geqslant0,n\geqslant0,\left(\frac{1}{2}\right)^{m+n}=1$.

（2）m,n 都是有理数，α 是无理数，且 $m+n\alpha=0$.

【解题思路】　条件（1）中，$\left(\frac{1}{2}\right)^{m+n}=1=\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\Rightarrow m=n=0$，充分.

条件（2）中，m,n 是有理数，α 是无理数，且 $m+n\alpha=0$，根据有理部与有理部相等，无理部与无理部相等，有 $m=0,n=0$，（2）充分.

【参考答案】（D）

解题技巧

两个有理数的和、差、积、商（分母不等于零）仍然是一个有理数.

七、分数和循环小数

循环小数可分为有限循环小数和无限循环小数，前者如4.256256256（不带省略号），后者如4.256256…（带省略号）. 所有的循环小数都是有理数.

无限循环小数是从小数点后某一位开始不断地重复出现前一个或一节数码的十进制无限小数，如2.1666…，35.232323…等. 被重复的一个或一节数码称为循环节. 循环小数的缩写法是将第一个循环节以后的数码全部略去，而在保留的循环节首末两位上方各添一个小点.

例如：2.166666…缩写为 $2.1\dot{6}$，0.34103103…缩写为 $0.34\dot{1}0\dot{3}$.

例 13　有四个分数 $\frac{12}{25},\frac{11}{24},\frac{19}{39},\frac{11}{29}$，其中最大的分数与最小的分数的差等于

（A）$\frac{122}{1\,131}$　　（B）$\frac{3}{104}$　　（C）$\frac{7}{975}$　　（D）$\frac{55}{696}$　　（E）以上结论均不正确

【解题思路】　将这四个分数从大到小排序，有

$$\frac{19}{39},\frac{12}{25},\frac{11}{24},\frac{11}{29},$$

则

$$\frac{19}{39}-\frac{11}{29}=\frac{19\times29-11\times39}{29\times39}=\frac{122}{1\,131}.$$

【参考答案】（A）

例 14　一位同学计算两个小数的乘法时，把一个因数 $1.2\dot{3}$ 错看成了 1.23，使计算结果少了0.3，则正确的计算结果是

(A) 90　　(B) 95　　(C) 101　　(D) 106　　(E) 111

【解题思路】　设另一个因数为 x,则

$$x(1.2\dot{3}-1.23)=0.00\dot{3}\cdot x=\frac{3}{9}\cdot\frac{1}{100}x=\frac{1}{300}x=0.3,$$

解得 $x=90$,故正确的计算结果为

$$90\cdot1.2\dot{3}=90\cdot(1.23+\frac{1}{300})=111.$$

本题用到了结论 $0.\dot{3}=\frac{3}{9}$,其推导过程如下:设 $0.\dot{3}=x$,则

$$3.\dot{3}=10\times0.\dot{3}=10x,$$

所以

$$10x-x=3.\dot{3}-0.\dot{3}=3,$$

解得 $x=\frac{3}{9}$,即 $0.\dot{3}=\frac{3}{9}$.

同理可得

$$0.\dot{0}\dot{3}=\frac{3}{99},\quad 0.\dot{0}0\dot{3}=\frac{3}{999}.$$

【参考答案】　(E)

八、取整运算

对于任意实数 x,用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 令 $\{x\}=x-[x]$,称 $[x]$ 是 x 的整数部分,$\{x\}$ 是 x 的小数部分.

由取整运算的定义可得出下列简单性质:

(1) $x=[x]+\{x\}$.　　(2) $0\leqslant\{x\}<1$.

例 15　把无理数 $\sqrt{5}$ 记作 a,它的小数部分记作 b,则 $a-\frac{1}{b}$ 等于

(A) 1　　(B) −1　　(C) 2　　(D) −2　　(E) 3

【解题思路】　因为 $4<5<9$,所以 $2<a<3$,故 $\sqrt{5}$ 的整数部分是 2,即 $b=a-2$,所以

$$a-\frac{1}{b}=a-\frac{1}{a-2}=\frac{a^2-2a-1}{a-2}=\frac{5-2\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-2}=\frac{-2(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}-2}=-2.$$

【参考答案】　(D)

例 16　设 $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ 的整数部分为 a,小数部分为 b,则 $ab-\sqrt{5}=$

(A) 3　　(B) 2　　(C) −1　　(D) −2　　(E) 0

【解题思路】

$$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

而

$$2<\frac{3+\sqrt{5}}{2}<3,$$

因此

$$a=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]=2,b=\frac{3+\sqrt{5}}{2}-2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

即
$$ab-\sqrt{5}=2\times\frac{-1+\sqrt{5}}{2}-\sqrt{5}=-1.$$

【参考答案】（C）

第三节　实数的分类、性质和运算(强化)

例1(2008年10月试题)　一个大于1的自然数的算术平方根为a,则与该自然数左右相邻的两个自然数的算术平方根分别为

(A) $\sqrt{a}-1,\sqrt{a}+1$　　(B) $a-1,a+1$　　(C) $\sqrt{a-1},\sqrt{a+1}$

(D) $\sqrt{a^2-1},\sqrt{a^2+1}$　　(E) a^2-1,a^2+1

【解题思路】　该自然数为a^2,其相邻的两个自然数为a^2-1,a^2+1,则与该自然数左右相邻的两个自然数的算术平方根应分别为$\sqrt{a^2-1},\sqrt{a^2+1}$.

【参考答案】（D）

例2(2008年10月试题,条件充分性判断)　$\frac{n}{14}$是一个整数.

(1) n是一个整数,且$\frac{3n}{14}$也是一个整数.

(2) n是一个整数,且$\frac{n}{7}$也是一个整数.

【解题思路】　条件(1)中,$\frac{3n}{14}$是一个整数,3与14互质,即n是14的倍数,充分.

条件(2)中,$\frac{n}{7}$是一个整数,即n为7的倍数,不充分.

【参考答案】（A）

例3(2007年10月试题,条件充分性判断)　m是一个整数.

(1) 若$m=\frac{p}{q}$,其中p与q为非零整数,且m^2是一个整数.

(2) 若$m=\frac{p}{q}$,其中p与q为非零整数,且$\frac{2m+4}{3}$是一个整数.

【解题思路】　由条件(1),$m=\frac{p}{q}$是有理数,且m^2是一个整数,所以m是一个整数,条件(1)充分.

由条件(2),$\frac{2m+4}{3}$是一个整数,设$2m+4=3k$,从而$m=\frac{3k-4}{2}$不一定是整数,即条件(2)不充分.

【参考答案】（A）

例4(2010年1月试题,条件充分性判断)　有偶数位来宾.

(1) 聚会时所有来宾都被安排坐在一张圆桌周围,且每位来宾与邻座性别不同.

(2) 聚会时男宾人数是女宾人数的两倍.

【解题思路】　条件(1)中男女成对出现,故有偶数位来宾,充分.

条件(2)中,若有女宾1人,男宾2人,共有3人,不充分.

【参考答案】（A）

例 5(1998 年 10 月试题)　若方程 $x^2+px+37=0$ 恰有两个正整数解 x_1 和 x_2，则 $\frac{(x_1+1)(x_2+1)}{p}$ 的值是

(A) -2　　(B) -1　　(C) $-\frac{1}{2}$　　(D) 1　　(E) 2

【解题思路】　不妨设 $x_1<x_2$. 由韦达定理有 $x_1x_2=37=1\times37$，而 x_1 和 x_2 为正整数，则

$$x_1=1,x_2=37,$$

所以

$$x_1+x_2=-p=38,\text{即 } p=-38,$$

则有

$$\frac{(x_1+1)(x_2+1)}{p}=\frac{(1+1)(1+37)}{-38}=-2.$$

【参考答案】　(A)

例 6(2010 年 1 月试题)　三名小孩中有一名学龄前儿童(年龄不足 6 岁)，他们的年龄都是质数(素数)，且依次相差 6 岁，他们的年龄之和为

(A) 21　　(B) 27　　(C) 33　　(D) 39　　(E) 51

【解题思路】　年龄不足 6 岁的小孩，其年龄只能是 2，3 或 5 岁，则三名小孩的年龄有三种可能：

① 2　　8　　14

② 3　　9　　15

③ 5　　11　　17

很显然，只有第③种情形都是质数，从而得到满足题意的三名小孩年龄之和为

$$5+11+17=33.$$

【参考答案】　(C)

例 7(2009 年 10 月试题，条件充分性判断)　$a+b+c+d+e$ 的最大值是 133.

(1) a,b,c,d,e 是大于 1 的自然数，且 $abcde=2\ 700$.

(2) a,b,c,d,e 是大于 1 的自然数，且 $abcde=2\ 000$.

【解题思路】　条件(1)有

$$2\ 700=2\times2\times3\times3\times3\times5\times5,$$

$a+b+c+d+e$ 的最大值为

$$2+2+3+3+3\times5\times5=85,$$

不充分.

条件(2)有

$$2\ 000=2\times2\times2\times2\times5\times5\times5,$$

$a+b+c+d+e$ 的最大值为

$$2+2+2+2+5\times5\times5=133,$$

充分.

【参考答案】　(B)

例 8(2009 年 10 月试题)　若 x,y 是有理数，且满足 $(1+2\sqrt{3})x+(1-\sqrt{3})y-2+5\sqrt{3}=0$，则 x,y 的值分别为

(A) 1，3　　(B) -1，2　　(C) -1，3　　(D) 1，2　　(E) 以上结论都不正确

【解题思路】　整理原式，得

$$(x+y-2)+(2x-y+5)\sqrt{3}=0,$$