高中数学教学理论与实践

——丛书之三

LILUN

SHIJIAN

《数学通讯》丛书编审组

主　编　伍家德

副主编　毛经中　刘诗雄

湖北教育出版社

高中数学教学理论与实践
——丛书之三

《数学通讯》丛书编审组

主　编　　伍家德

副主编　　毛经中　刘诗雄

编审组成员（按姓氏笔划为序）

毛经中　刘楚炤　刘诗雄　李汉棣

朱运才　伍家德　朱翠蓉　汪跃中

陈传理　金为明　林友智　郑学群

徐学文　黄邦本　黄能容　裴光亚

湖北教育出版社

内 容 简 介

本书是《高中数学教学理论与实践》丛书之三，内容涉及中学数学教学大纲规定的不等式、数列和数列的极限、数学归纳法、复数、排列组合与二项式定理等方面的知识. 各章首先注重理顺知识结构的联系脉络，廓清概念，突出重点，点拨关键，使之对基本理论及其主导思想有系统而明晰的了解，并熟练掌握必要的技能技巧. 然后着重对常见的、典型的题型系统归类，以充足的例题剖析解题的思路、方法和技巧，对常用的数学方法和有关数学思想都作了介绍. 本书还对中学课本虽已涉及但未深入阐述且在进一步学习和解题实践中有价值的问题作了适当研究，以开阔读者视野. 另外还介绍了与本书内容有关的富有趣味性、思想性和激励作用的历史知识. 各章还配有适当份量的习题，习题与例题紧密配合，相互补充，使本书具有更好的可读性和实用[illegible]考，也适合高中学生及自学青年阅读.

鄂新登字02号

高中数学教学理论与实践

——丛书之三

《数学通讯》丛书编审组

*

湖北教育出版社出版、发行

（430022·武汉市解放大道新育村63号）

咸 宁 地 区 印 刷 厂 印 刷

*

787×1092毫米32开本　9.5印张　269 000字

1992年9月第1版　1992年9月第1次印刷

ISBN 7—5351—0901—2/G·684

定　价：3.20元

说　明

在当前教育改革深入发展的新形势下，中学师资水平亟需提高．编写这套丛书的目的，在于为中学师生提供一个正确理解和把握高中数学——它的内容、方法和思想的指南，以期帮助广大中学数学教师提高专业素质、教学水平和指导课外活动的能力，并帮助广大中学生搞清对数学概念的认识，提高分析问题和解决问题的能力．写作中根据现行教学大纲并参照新大纲的精神；注意从中学实际出发；源于课本，但不拘于课本，居高临下地提出问题、引导思考、发展思维；在理论与实践相结合的基础上，把揭示数学规律与数学解题方法论、数学教育经验紧密结合．丛书既有较高的理论价值，又具有较强的可读性和实用性．

这套丛书共分五册，丛书之一、之二分别为代数（部分）、立体几何内容，供高一用；丛书之三、之四分别为代数（部分）、解析几何内容，主要供高二、高三用．前四册的每一册的内容都包括高中数学的基本理论、解题指导、问题研究、历史镜头几个方面．丛书之五为基础知识系列复习与综合能力专题训练，供高三总复习使用．

这套丛书是在华中师范大学副校长邓宗琦教授的关怀、数学系领导的直接指导下，由《数学通讯》丛书编审组总体设计、详细规划，聘请第一线有丰富教学经验的数学教师编写，华师大数学系部分教师参加了审查，最后由编审组统稿审定完成。如果这套丛书能对提高教学质量和学生学习成绩有所帮助，那将

是我们的最大愿望．限于编者水平，缺点和错误难免，欢迎指正．

参加编写丛书之三的作者有：叶家振、黄能容、朱尧初、琚兴广、何兴楚、左加林、郭熙汉．副主编和主编对初稿作了修改、补充和整理．

《数学通讯》丛书编审组

1991年1月

目　　录

第一章　不　等　式

现实世界中的数量关系有“相等”和“不相等”之分．数量间的相等关系只是局部的、相对的，而不等关系则是普遍的、绝对的．“不等式”一章着重研究“不等”关系，不仅内容丰富、实用，而且饶有趣味．在本章中，我们要学习和掌握：不等式的概念和性质；不等式的等价变形理论；不等式的证明方法与技巧；不等式的解法；不等式的应用等．这些知识不仅有助于解决实际问题，而且有助于发展思维，开发智能，为我们进一步学习打下坚实的理论基础，并进行必要的思维训练．

［基本理论］

1．两个实数的大小比较

从实数减法在数轴上的表示可以看出，实数 a、b 之间具有以下性质：

$$a-b>0 \Longleftrightarrow a>b;$$

$$a-b=0 \Longleftrightarrow a=b;$$

$$a-b<0 \Longleftrightarrow a<b.$$

注　(1) 对任何两个实数 a、b，$a>b$，$a=b$，$a<b$ 三种关系中，有且只有一个成立，这叫三分律．(2) 上述等价关系的左边是实数运算的比较性质，右边是两个实数间的顺序关系．它告诉我们，要比较两个实数的大小，只要考查它们的差就可以了；反之，如果知道两个实数的差是正、是负或是 0，那么它们的大小关系就被相应地确定了．它是数的比较的基本依据．

2. 不等式的基本性质

(1) 对逆性　$a > b \Longleftrightarrow b < a$.

(2) 传递性　$a > b, b > c \Longrightarrow a > c$.

传递性是不等变形的主要依据，利用它可以将证明 $a>c$ 转化为证明两个不等式 $a>b$ 和 $b>c$.

(3) 加法保序性　$a > b \Longrightarrow a + c > b + c$.

(4) 乘法保序性　$a > b, c > 0 \Longrightarrow ac > bc$.

(5) 加法法则　$a > b, c > d \Longrightarrow a + c > b + d$.

(6) 乘法法则　$a > b > 0, c > d > 0 \Longrightarrow ac > bd$.

(7) 乘方法则　$a > b > 0 \Longrightarrow a^n > b^n (n \in N)$.

(8) 开方法则　$a > b > 0 \Longrightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} (n \in N)$.

注　学习上述性质时，不仅要弄清条件和结论是什么，而且要会推导并明确从条件到结论的每一步推理的理由，明确其中的关键步骤是什么. 同时必须用心体会诸性质、条件和结论间的关系，否则会出现由 $a>b$ 导出$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$之类的错误.

3. 二元和三元的平均值不等式

(1) 如果 a_1、$a_2 \in R^+$，那么

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1a_2},$$

其中等号当且仅当 $a_1 = a_2$ 时成立.

(2) 如果 a_1、a_2、$a_3 \in R^+$，那么

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geqslant \sqrt[3]{a_1a_2a_3},$$

其中等号当且仅当 $a_1 = a_2 = a_3$ 时成立.

上述不等式不仅是论证不等式的重要依据，而且在解决最值问题时，广泛地被采用. 我们以 $n=2$ 时的不等式 $\sqrt{a_1a_2} \leqslant$

$\frac{a_1+a_2}{2}$为例来阐明这一点.

1）当和 $a_1+a_2=S$（定值）时，积

$$a_1a_2\leqslant\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2=\frac{S^2}{4},$$

当 $a_1=a_2$ 时取等号，即 $a_1=a_2$ 时，积

$$(a_1a_2)_{\max}=\frac{S^2}{4},$$

2）当积 $a_1a_2=p$（定值）时，和

$$a_1+a_2\geqslant 2\sqrt{a_1a_2}=2\sqrt{p},$$

当 $a_1=a_2$ 时取等号，即 $a_1=a_2$ 时，和

$$(a_1+a_2)_{\min}=2\sqrt{p},$$

应用此不等式求最值，要紧扣三条，缺一不可：

①a_1、a_2 是正数；

②a_1、a_2 之和（积）为定值；

③不等式$\sqrt{a_1a_2}\leqslant\frac{a_1+a_2}{2}$能取等号.

例如，对于不等式：

(i)$x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$；

(ii)$\sin\theta+\cos\theta\geqslant 2$($\theta$ 是第一象限角)；

(iii)$\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}\geqslant 2$；

(iv)$x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}-1\geqslant 2$，

是否都表示左式的最小值是 2 呢？否.（i）式仅当 $x>0$ 时成立，而（ii）和（iii）式则不具备取等号的条件，只有（iv）式具备取等号的条件.

对于 $n\geqslant 3$ 的均值不等式，应用时也应紧扣类似上述的三个

条件.

4. 不等式的证明

(1) 证明不等式的第一步是根据问题的特点选择合适的证明方法. 证明不等式的常用方法有如下几种:

1) 比较法　通过证明 $a-b>0$ 而达到证明 $a>b$ 的目的，这种方法叫做比较法. 从逻辑上讲这个方法属于综合法，只是在不等式证明中运用广泛才将其另立专项讨论.

类似于比较法，通常还采用作商比较的方法，即通过证明 $a/b>1$ ($b>0$) 进而证 $a>b$. 其依据是:

$$a/b>1 \quad 且\ b>0 \Longrightarrow a>b;$$
$$a/b>1 \quad 且\ b<0 \Longrightarrow a<b.$$

2) 综合法　从已知出发，以不等式的性质和已经证明了的不等式为依据，通过代数变形逐步推导出欲证之不等式的方法.

常用的作为证题依据的不等式除了前面已经列出基本不等式和均值不等式外，还有

$$a^2 \geqslant 0; \quad |a| \geqslant 0;$$
$$a^2+b^2 \geqslant 2ab;$$
$$a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc(a、b、c \in R^+);$$
$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geqslant 2(a、b\text{同号});$$
$$||a|-|b|| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a|+|b|.$$

3) 分析法　分析法是指从欲证的不等式出发，寻求使不等式成立的充分条件（已知或已证的）的证明方法.

设 $A_1<B_1$ 为欲证不等式，$A_i<B_i$ 为使 $A_{i-1}<B_{i-1}$ ($i=2, 3, \cdots, n$) 成立的充分条件，$A_n<B_n$ 为已知和已证不等式，那么用分析法证明不等式的基本格式是:

$$\because \quad A_1<B_1 \Longleftarrow A_2<B_2 \Longleftarrow A_3<B_3 \quad \cdots$$

$$\Leftarrow A_{n-1} < B_{n-1} \Leftarrow A_n < B_n,$$

而 $A_n < B_n$ 已知成立，

$\therefore \quad A_1 < B_1$.

4) 反证法　直接证明困难时，可以采用反证法. 反证法的实质在于把原命题的证明改为证明与它等价的逆否命题.

5) 数学归纳法　对于与自然数 n 有关的不等式，可以考虑用数学归纳法（见本书第三章）.

(2) 除了掌握不等式证明的基本方法外，还要熟练掌握证明不等式的一些有用技巧，如配方、分解因式、换元、构造、“放”与“缩”、利用实系数一元二次方程有解的条件等.

5. 不等式的同解概念与定理

定义　如果两个不等式（组）解集相同，那么这两个不等式就叫做同解不等式（组）.

定理 1　不等式两边都加上（或减去）同一个数或同一个整式，所得不等式与原不等式同解.

定理 2　不等式两边都乘以（或除以）同一个正数，所得不等式与原不等式同解.

定理 3　不等式两边都乘以（或除以）同一个负数后，再把不等号改变方向，所得不等式与原不等式同解.

值得指出的是，中学数学中的同解不等式（组）的概念和同解定理只能解释不等式两边同加整式或同乘（除）以正（负）数的情况，对于分式、指数、对数、三角函数、反三角函数不等式的求解过程中的变形，就显得无能为力了. 因此，在不等式的解法中，常用“等价变形”的思想解决问题. 所谓“等价变形”，就是将一个不等式依据有关的基础理论知识，将其转化为解集相同的不等式（组）.

6. 不等式的解法

（1）整式不等式的解法

1）$ax>b$

当 $a>0$ 时，解为 $x>\frac{b}{a}$；当 $a<0$ 时，解为 $x<\frac{b}{a}$；当 $a=0$ 且 $b\geqslant 0$ 时，无解；当 $a=0$ 且 $b<0$ 时，解集为 R.

同法可得 $ax<b$ 的解.

2）$ax^2+bx+c \gtreqless 0$（$a\neq 0$）

常用的解法有：配方法，如

$$x^2+x-3>0 \Longleftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2>\frac{13}{4}$$

$$\Longleftrightarrow x<-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2} \text{或} x>-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2};$$

因式分解法，如

$$x^2-3x+2<0 \Longleftrightarrow (x-1)(x-2)<0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x-1<0 \\ x-2>0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x-1>0 \\ x-2<0 \end{cases} \Longleftrightarrow 1<x<2.$$

图象法，图象解法的结论见下一面的表：（$a<0$ 时，虽可仿上用图象研究，但常转化为 $a>0$ 的情形来解）.

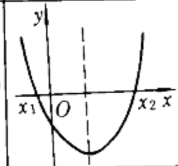
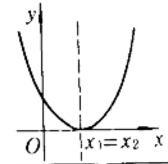
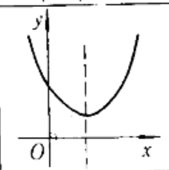
3）一元高次不等式

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n>0 (\text{或} <0)$$

其解法除中学课本上介绍的列表法外，一种简捷的解法是很多书刊上称作“序轴法”的方法，其基本要点是：

①把 $f(x)$的相异实根 $x_1<x_2<\cdots<x_k$（去掉偶次重根，$k\leqslant n$）标在数轴上，这些实根将数轴依次划分为 $k+1$ 个不相交的区间；

②确定左起第一个区间上 $f(x)$的符号，然后按正负相间的规律，从左到右写出使 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)的全部区间（注意去掉偶次重根）.

二次函数	判别式	示意图	不等式的解	
			$f(x)=ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$	$f(x)=ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$
$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a>0)$	$\Delta>0$		$x<x_1$ 或 $x>x_2$（大小两根外）	$x_1<x<x_2$（大小两根间）
	$\Delta=0$		$x\neq x_{1,2}=-\dfrac{b}{2a}$	无解
	$\Delta<0$		$x\in R$	无解

(2)分式不等式的解法

一般有三种解法：

列表法，见中学课本.

化为不等式组求解：

$$\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x)\geqslant 0 \\ g(x)>0 \end{cases} 或 \begin{cases} f(x)\leqslant 0 \\ g(x)<0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x)\geqslant 0 \\ g(x)<0 \end{cases} 或 \begin{cases} f(x)\leqslant 0 \\ g(x)>0 \end{cases}$$

化为整式不等式求解：

$$\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x)\geqslant 0 \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) \leqslant 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

(3)根式不等式的解法——常化为与之同解的有理不等式(组)求解或运用图象法解.

(4)指数不等式的解法——运用指数函数性质转化为代数不等式求解.即对于

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} (0 < a \neq 1),$$

当 $a>1$ 时,化为

$$f(x)>g(x);$$

当 $0<a<1$ 时，化为

$$f(x)<g(x).$$

(5) 对数不等式的解法——运用对数函数性质转化为代数不等式组求解. 转化过程中要特别注意定义域问题. 即对于

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \quad (0 < a \neq 1),$$

当 $a>1$ 时，化为

$$f(x)>g(x)>0;$$

当 $0<a<1$ 时，化为

$$0<f(x)<g(x).$$

(6) 含绝对值符号的不等式的解法

对于 $|x|\neq a$，$a>0$，有

1) $|x|>a \Longleftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$;

2) $|x|<a \Longleftrightarrow -a<x<a$.

(7) 不等式组的解法

首先分别求出每个不等式的解集，然后求出所有不等式解集的交集（常借助于数轴直观进行）.

解不等式时所采用的化归途径常为：超越不等式转化为代数不等式；无理不等式转化为有理不等式；分式不等式转化为

整式不等式；多元不等式化为一元不等式；高次不等式化为低次不等式等. 换元法和图象法是重要而常用的方法，应掌握娴熟，运用自如. 值得注意的是解无理不等式和对数不等式时，千万别忘了使不等式各部分有意义的范围，否则必将导致失误.

7. “不等式”中的思想方法

（1）辩证思想. 众所周知，

$$\begin{cases} f(x) \geqslant a \\ f(x) \leqslant a \end{cases} \Longrightarrow f(x) = a.$$

在求函数最值时，广泛采用如下原理：若 $f(x) \geqslant a$，当取等号的条件具备时，那么 $[f(x)]_{\min} = a$；若 $f(x) \leqslant a$，当取等号的条件具备时，那么 $[f(x)]_{\max} = a$. 这都体现了不等向相等的转化. 我们在研究和解决不等式问题时，也常发挥“小正数”的特殊功能，使相等向不等转化.

例 已知 x、y、z 都是小于 1 的正数，且 $x+y+z=2$. 求证：$xy+yz+zx>1$.

证 令 $\alpha=1-x$，$\beta=1-y$，$\gamma=1-z$，于是，由 $x<1$，$y<1$，$z<1$ 知

$$\alpha>0, \beta>0, \gamma>0,$$

且 $$\alpha+\beta+\gamma=3-(x+y+z)=3-2=1,$$

$$x=1-\alpha,\ y=1-\beta,\ z=1-\gamma,$$

所以 $$\begin{aligned} & xy+yz+zx \\ &=(1-\alpha)(1-\beta)+(1-\beta)(1-\gamma)+(1-\gamma)(1-\alpha) \\ &=3-2(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \\ &=1+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha>1. \end{aligned}$$

综观上述两个方面，“相等”和“不等”这两个对立面，相互联系，相互转化，相互为用，充分体现了“相等”和“不等”的辩证统一关系.

(2) 函数思想

方程、不等式都是函数的特定状态，三者之间有着深刻而自然的内在联系. 应用函数的性质（定义域、值域、有界性、单调性等）及函数的图象，证明或求解不等式，充分体现了函数思想在研究不等式问题中的作用.

(3) 构造与代换的思想

构造是一种技巧. 构造函数或构造图形证明不等式，是构造思想在不等式的论证中的应用. 在不等式的论证与解法的研究中，常采用代数代换或三角代换方法（实际使用时有整体代换与局部代换之分）. 代换方法常能化难为易、化繁为简.

(4) 分类思想

分类既是一种逻辑方法，也是重要的数学思想，它反映在整个中学数学的各个分科里. 不等式中的分类问题是十分广泛的. 按变元的性质考虑，有对主变元分类和对参变量分类之分. 按不等式的研究课题考虑，有论证中的分类和解法中的分类. 分类的需要往往是由概念、公式、定理、法则等引起的. 例如因消除绝对值符号而引起分类；因讨论指数函数、对数函数的底数的取值而引起分类；由某些分段表达的公式而引起分类；由不等式的性质引起的分类；等等. 在研究不等式问题时，常用的分类方法有：1）"零点"分类法；2）性质分类法；3）公式分类法；4）图形分类法等. 值得注意的是，较复杂的分类问题，可分级逐级进行. 先选择某一标准作第一级分类，再按另一标准作第二级分类，依此类推. 比如，解不等式：

$$(a-2)x>3ax+b-1,$$

将原式化为

$$2(a+1)x<1-b$$

后，可先以 -1 作标准对 a 作第一级分类；当 $a=-1$ 时，再以