田文化

名校联盟
系列丛书

师者，传道授业解惑也

2011年高考备考用书

师说高考™

SHISHUO GAOKAO

主编 桑田

理数

大纲版

每个老师都希望自己的学生能够青出于蓝，我也不例外。或许正是这种期待，使我对自己格外苛求。说实在的，我想过有一天，别人在夸奖我的学生的时候，会不由自主地赞叹一句："真是名师出高徒啊！"

——桑田

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

特别鸣谢

■北京四中 ■启东中学 ■西安中学 ■衡水中学 ■山东省实验中学

■朔州一中 ■北师大附中 ■北京101中学

封面设计：木头羊工作室

ISBN 978-7-5640-3254-8

9 787564 032548

定价：59.80元

桑田文化

名校联盟
系列丛书
师者，传道授业解惑也
2011年高考备考用书

师说高考

SHISHUO GAOKAO

主编：桑田

本册主编：王学会
本册编委：徐宏芳　于　珍　刘芳玲
陈金社

理数

（大纲版）

北京理工大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

师说高考. 理数 / 桑田主编. —北京 ：北京理工大学出版社，2010.7
ISBN 978-7-5640-3254-8

Ⅰ. ①师… Ⅱ. ①桑… Ⅲ. ①数学课－高中－升学参考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第106038号

丛书主编：桑田
装帧设计：木头羊设计

名校联盟系列丛书

师说高考
SHISHUO
GAOKAO

出版发行/北京理工大学出版社
社　　址/北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编/100081
电　　话/（010）68914775（总编室）　68944990（批销中心）　68911084（读者服务部）
网　　址/http://www.bitpress.com.cn
经　　销/全国各地新华书店
印　　刷/三河宇通印刷装订厂
开　　本/880毫米×1230毫米　1/16
印　　张/22
字　　数/774千字
版　　次/2010年7月第1版　　2010年7月第1次印刷
定　　价/59.80元

目录

CONTENTS

第一章 集合与简易逻辑

第一讲 集合的概念与运算

最新考纲解读

1.了解集合的含义、元素与集合的“属于”关系，理解集合之间包含与相等的含义，能识别给定集合的子集.
2.能用自然语言、图形语言、集合语言(列举法或描述法)描述不同的具体问题.
3.在具体情境中，了解全集与空集的含义.
4.会求两个简单集合的并集与交集，理解在给定集合中一个子集的补集的含义，会求给定子集的补集.

核心知识讲解

1 集合的含义

一般地，________就成为一个集合，简称集，集合用大写的拉丁字母表示.

2 集合中元素的三要素

(1) 确定性：对于一个给定的集合，任何一个对象，或者是这个集合中的元素，或者不是它的元素，这是集合的最基本的特征；

(2) 互异性：集合中的任何两个元素都是能区分的(即互不相同的)，________对象归入任何一个集合时，只能算作这个集合的________元素；

(3) 无序性：在一个集合中，通常不考虑它的元素之间的顺序，也就是说$\{a,b,c\}=\{b,c,a\}$.

3 集合的分类

(1) 有限集：元素的个数是________个；

(2) 无限集：元素的个数是________个；

(3) 空集($\varnothing$)：不含任何元素的集合.

4 常见数集符号

自然数集________，正整数集________或________，整数集________，有理数集________，实数集________，复数集________.

5 集合的表示方法

(1) 列举法：把集合中的所有元素一一列举出来，写在________内，________常用列举法表示.

(2) 描述法：把集合中所有元素的公共属性用文字或数学式子描述出来，写在大括号内. 无限集常用描述法表示，用描述法表示要注意“代表元素”的符号及属性.

此外，集合的表示法还有区间表示和韦恩图表示.

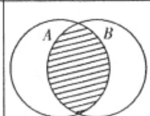
6 如果任取$a\in A$，都有________，则称A是B的子集，记作________.

如果$A\subseteq B$，且存在$b\in B$，但________，则称A是B的真子集，记作________.

7 含有n个元素的集合共有________个子集，其中有2^n-2个________.

8 空集$\varnothing$是任意集合的子集，五个关系$0\in\varnothing$、$\varnothing=\{0\}$、$\varnothing\in\{\varnothing\}$、$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$、$\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$中的第________个关系是正确的.

9 运算的定义和图示

	$A\cap B$	$A\cup B$	$\complement_U A$
定义	$\{x\mid x\in A$且$x\in B\}$	$\{x\mid x\in A$或$x\in B\}$	$\{x\mid x\in U$,但$x\notin A\}$
图示			

知识点答案

1. 某些指定的对象集在一起
2. (2) 相同的，一个
3. (1) 有限　(2) 无数

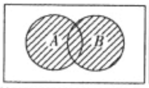
4. N,N^*,N^+,Z,Q,R,C

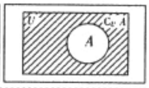
5. 大括号,有限集

6. $a \in B, A \subseteq B, b \notin A, A \subsetneqq B$.

7. 2^n,非空真子集

8. 3、4、5

9. 



10 运算律

(1) 交换律:$A \cap B = B \cap A, A \cup B =$ ________;

(2) 结合律:$A \cap B \cap C =$ ________,

$A \cup B \cup C =$ ________;

(3) 分配律:$A \cap (B \cup C) =$ ________;

(4) 习题结论:$\complement_U(A \cap B) =$ ________,

$\complement_U(A \cup B) =$ ________.

11 交集的性质

(1) ______ (2) ______ (3) ______ (4) ______

12 并集的性质

(1) ______ (2) ______ (3) ______ (4) ______

13 补集的性质

(1) ______ (2) ______ (3) ______

知识点答案

10. (1)$B \cup A$ (2)$A \cap (B \cap C)$;$A \cup (B \cup C)$
(3)$(A \cap B) \cup (A \cap C)$ (4)$(\complement_U A) \cup (\complement_U B)$,$(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$

11. (1)$A \cap \varnothing = \varnothing$ (2)$A \cap A = A$ (3)$A \cap B = B \cap A$ (4)$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$

12. (1)$A \cup \varnothing = A$ (2)$A \cup A = A$ (3)$A \cup B = B \cup A$ (4)$A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$

13. (1)$A \cup \complement_U A = U$ (2)$A \cap \complement_U A = \varnothing$
(3)$\complement_U(\complement_U A) = A$

精题细讲

类型一 集合的基本概念

例 1. 已知 $A = \{a+2, (a+1)^2, a^2+3a+3\}$,若 $1 \in A$,求实数 a 的值.

【解析】

$\because 1 \in A$,

$\therefore a+2=1$,或$(a+1)^2=1$,或 $a^2+3a+3=1$.

(1) 若 $a+2=1$,则 $a=-1$,

当 $a=-1$ 时,$a+2=a^2+3a+3=1$,

$\therefore a=-1$ 不符合题意.

(2) 若$(a+1)^2=1$,则 $a=0$,或 $a=-2$.

当 $a=0$ 时,$a+2=2$,$(a+1)^2=1$,

$a^2+3a+3=3$,符合题意;

当 $a=-2$ 时,$(a+1)^2=a^2+3a+3=1$,

$\therefore a=-2$ 不符合题意;

(3) 若 $a^2+3a+3=1$,则 $a=-1$,或 $a=-2$,

由(1)(2)可知,$a=-1$,$a=-2$ 都不符合题意.

综上可知,实数 a 的值为 0.

【点评】

(1) 求解过程中,每类得出的 a 都必须检验是否满足集合元素的互异性,这一点易被忽视.

(2)① 条件 $m \in A$,若集合 A 是用列举法表示的,则 m 应是集合 A 中的一个元素,若符合 A 是用描述法表示的,则 m 应满足集合中的描述条件.

② 解答过程体现了数学分类思想的灵活运用,分类应注意:不重复、不遗漏、分类的标准一致.

类型二 集合间的基本关系

例 2. 设 $A = \{x \mid x^2-8x+15=0\}$,$B = \{x \mid ax-1=0\}$.

(1) 若 $a = \frac{1}{5}$,试判定集合 A 与 B 的关系;

(2) 若 $B \subseteq A$,求实数 a 组成的集合 C.

【解析】

(1) 由 $x^2-8x+15=0$,得 $x=3$,或 $x=5$.

$\therefore A=\{3,5\}$,

若 $a=\frac{1}{5}$,由 $ax-1=0$,

得$\frac{1}{5}x-1=0$,即 $x=5$,

$\therefore B=\{5\}$. $\therefore B \subsetneqq A$.

(2)$\because A=\{3,5\}$,且 $B \subseteq A$,

故若 $B=\varnothing$,则方程 $ax-1=0$ 无解,有 $a=0$;

若 $B \neq \varnothing$,则 $a \neq 0$,

由 $ax-1=0$,得 $x=\frac{1}{a}$,

$\therefore \frac{1}{a}=3$,或$\frac{1}{a}=5$,即 $a=\frac{1}{3}$,或 $a=\frac{1}{5}$,

故 $C=\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{5}\}$.

【点评】

(1)① 解答题(2)时,易忽视 $B=\varnothing$ 的情况,因为空集是任何集合的子集;

② 讨论方程 $ax-1=0$ 的根时,易漏掉 $a=0$ 的情况.

(2)① 判断两集合的关系常有两种方法:一是化简集合,从表达式中寻找两集合间的关系;二是用列举法表示各集合,从元素中寻找关系;

② 已知两集合间的关系求参数时,关键是将两集合间的关系转化为元素间的关系,进而转化为参数满足的关系.解决这类问题常常合理利用数轴、Venn 图帮助分析;

③ 方程 $ax=b$ 解的确定：

当 $a\neq 0$ 时，方程有唯一实数根 $x=\frac{b}{a}$；

当 $a=b=0$ 时，方程的根有无穷多个，任意实数都是它的根；

当 $a=0$ 且 $b\neq 0$ 时，方程无实数根.

类型三 补集思想

例 3. 已知 $A=\{x\mid x^2+x+a\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid x^2-x+2a-1<0\}$，$C=\{x\mid a\leqslant x\leqslant 4a-9\}$，且 A,B,C 中至少有一个不是空集，求 a 的取值范围.

【解析】

已知集合 A,B,C 中至少有一个不是空集，故其反面为三个集合都是空集.

若 A,B,C 全为空集，

则实数 a 满足 $\begin{cases}1-4a<0,\\1-4(2a-1)\leqslant 0,\\a>4a-9,\end{cases}$

解得 $\frac{5}{8}\leqslant a<3$.

从而所求 a 的取值范围为 $a<\frac{5}{8}$，或 $a\geqslant 3$.

【点评】

对于某些问题，如果从正面求解较困难时，则采用“正难则反”的解题策略. 具体地说，就是将研究对象的全体视为全集，求出使问题反面成立的集合 A，则集合 A 的补集即为所求.

随堂练习

1.（2008 北京）已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid x<-1$ 或 $x>4\}$，那么集合 $A\cap(\complement_U B)$ 等于 （ ）

A. $\{x\mid -2\leqslant x<4\}$　　B. $\{x\mid x\leqslant 3$ 或 $x\geqslant 4\}$

C. $\{x\mid -2\leqslant x<-1\}$　　D. $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$

【解析】

略

【答案】 D

2. 数集 $\{1,2,x^2-3\}$ 中的 x 不能取的数值的集合是 （ ）

A. $\{2,-2\}$　　B. $\{-2,-\sqrt{5}\}$

C. $\{\pm 2,\pm\sqrt{5}\}$　　D. $\{\sqrt{5},-\sqrt{5}\}$

【解析】

由 $x^2-3\neq 1$ 且 $x^2-3\neq 2$ 可得 $x\neq\pm 2$ 且 $x\neq\pm\sqrt{5}$

【答案】 C

3.（2008 山东）满足 $M\subseteq\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，且 $M\cap\{a_1,a_2,a_3\}=\{a_1,a_2\}$ 的集合 M 的个数是 （ ）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

【解析】

$\because M\subseteq\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 且 $M\cap\{a_1,a_2,a_3\}=\{a_1,a_2\}$

$\therefore M$ 中元素必有 a_1,a_2，一定没有 a_3，另外的元素可以取 a_4 或不取 a_4 两种情况.

$\therefore$ 集合 M 的个数为 2 个

【答案】 B

4.（2008 陕西）已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x=2a,a\in A\}$，则集合 $\complement_U(A\cup B)$ 中元素的个数为 （ ）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【解析】

$A=\{1,2\}$，$\because B=\{x\mid x=2a,a\in A\}$

$\therefore B=\{2,4\}$，$A\cup B=\{1,2,4\}$

$\therefore \complement_U(A\cup B)=\{3,5\}$ 即 $\complement_U(A\cup B)$ 中元素的个数为 2 个

【答案】 B

5. 集合 $S=\{0,1,2,3,4,5\}$，A 是 S 的一个子集，当 $x\in A$ 时，若有 $x-1\notin A$，且 $x+1\notin A$，则称 x 为 A 的一个“孤立元素”，那么 S 中无“孤立元素”的 4 元子集的个数是 （ ）

A. 4 个　　B. 5 个　　C. 6 个　　D. 7 个

【解析】

由题意可知：一个集合中由相邻数字构成的元素都不是“孤立元素”，例如，S 中无“孤立元素”的 4 元子集可分两类：第一类是子集中的 4 个元素为相邻的四个数字，有 $\{0,1,2,3\}$，$\{1,2,3,4\}$，$\{2,3,4,5\}$ 三个；第二类是子集中的 4 个元素为两组，每一组的两个元素为相邻的两个数字，有 $\{0,1,3,4\}$，$\{0,1,4,5\}$，$\{1,2,4,5\}$ 三个，一共有 6 个.

【答案】 C

总结升华

1. 集合中元素具有确定性、互异性和无序性等特征，确定性是集合形成的基础，互异性在解含参数集合题时要重新检验，互异性减少了集合列举的繁杂性.

2. 集合中的元素可以是数、式、点、物…. 这是译读集合语言的出发点. 如集合 $\{x^2+2x=0\}$ 恰含 1 个元素（1 个方程式）、$\{x\mid x^2+2x=0\}$ 恰含 2 个元素（2 个实数根）等.

3. 子集具有传递性：(1) $A\subseteq B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$；

(2)$A \subsetneqq B \subseteq C \Rightarrow A \subsetneqq C$;(3)$A \subseteq B \subsetneqq C \Rightarrow A \subsetneqq C$;(4)$A \subsetneqq B \subsetneqq C \Rightarrow A \subsetneqq C$.

4. 空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集,关系 $\varnothing \in \{\varnothing\}$、$\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$、$\varnothing \subsetneqq \{\varnothing\}$、$\varnothing \subsetneqq \{0\}$ 都是正确的.更一般地,复合性集合 $\{x \mid x \subseteq A\} \neq \{x \mid x \in A\}$.

5. 空集 $\varnothing$ 在解题时有特殊的地位,它是任何集合的子集,应时刻关注对空集的讨论,防止漏掉.

6. 解题时注意区分两大关系:一是元素与集合的从属关系;二是集合与集合的包含关系.

7. 解答集合题目,认清集合的属性(是点集、数集或其他情形)和化简集合是正确求解的两个先决条件.

8. 交、并运算要注意数轴的应用,特别是有关不等式的题目.

9. 记住几个常见结论:$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$;$A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$;$A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$.

10. 对于离散的数集问题或抽象集合问题一般用图示法求解,直观、简捷;对于不等式的解集问题或函数的定义域与值域问题,一般用数轴求解;对于点集问题,一般转化为解析几何问题求解.

11. 注意渗透"数形结合""转化和化归"的数学思想方法.

课后习题演练

一、选择题

1. (2009 山东,1) 集合 $A = \{0,2,a\}$,$B = \{1,a^2\}$.若 $A \cup B = \{0,1,2,4,16\}$,则 a 的值为 ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

【解析】

$\because A \cup B = \{0,1,2,4,16\}$

$\therefore a = 4$ 或 $a = 16$(舍去)

【答案】 D

2. (2009 广东韶关调研) 已知集合 $M = \{x \mid x < 1\}$,$N = \{x \mid 2^x > 1\}$,则 $M \cap N =$ ( )

A. $\varnothing$　　B. $\{x \mid x < 1\}$

C. $\{x \mid x < 0\}$　　D. $\{x \mid 0 < x < 1\}$

【解析】

略

【答案】 D

3. 设 $a,b \in \mathbf{R}$,集合 $\{1,a+b,a\} = \{0,\frac{b}{a},b\}$,则 $(b+a)^{2009}$ 的值为 ( )

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. -2

【解析】

由$\begin{cases} 1+(a+b)+a = 0+\frac{b}{a}+b \\ 1\cdot(a+b)\cdot a = 0\cdot\frac{b}{a}\cdot b \end{cases}$

解得$\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$

$\therefore a+b=0$

【答案】 C

4. 已知集合 $A = \{y \mid y = 2^x, x \in \mathbf{R}\}$,$B = \{y \mid y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$,则 ( )

A. $A \cap B = \{2,4\}$　　B. $A \cap B = \{4,16\}$

C. $A = B$　　D. $A \subsetneqq B$

【解析】

$\because A = \{y \mid y > 0\}$,$B = \{y \mid y \geqslant 0\}$,$\therefore A \subsetneqq B$

【答案】 D

5. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 + x - 6 = 0\}$,$B = \{x \mid mx + 1 = 0\}$,若 $B \subsetneqq A$,则实数 m 的取值集合 M 是 ( )

A. $\{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{3}\}$　　B. $\{0,1\}$

C. $\{-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\}$　　D. $\{0\}$

【解析】

$\because A = \{-3,2\}$

当 $m = 0$ 时,$B = \varnothing$,此时 $B \subsetneqq A$

当 $m \neq 0$,$mx + 1 = 0$ 的解为 $-\frac{1}{m}$

$\because B \subsetneqq A$,$\therefore -\frac{1}{m} = -3$ 或 $-\frac{1}{m} = 2$

$\therefore m = \frac{1}{3}$ 或 $-\frac{1}{2}$

综上得 m 的取值集合 m 是$\{0,-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\}$

【答案】 A

6. 已知 $\mathbf{R}$ 为实数集,$M = \{x \mid 0 < x < 2\}$,$N = \{x \mid y = \sqrt{x-1}\}$,则 $M \cap \complement_{\mathbf{R}} N =$ ( )

A. $\{x \mid 0 < x < 1\}$　　B. $\{x \mid 0 < x < 2\}$

C. $\{x \mid x < 1\}$　　D. $\varnothing$

【解析】

$\because N = \{x \mid x \geqslant 1\}$,

$\therefore M \cap \complement_{R} N = \{x \mid 0 < x < 1\}$

【答案】 A

7. 已知集合 $M = \left\{x \mid x = m + \frac{1}{6}, m \in \mathbf{Z}\right\}$,$N = \left\{x \mid x = \frac{n}{2} - \frac{1}{3}, n \in \mathbf{Z}\right\}$,$P = \left\{x \mid x = \frac{p}{2} + \frac{1}{6}, p \in \mathbf{Z}\right\}$,则 M、N、P 满足的关系是 ( )

A. $M = N \subsetneqq P$　　B. $M \subsetneqq N = P$

C. $M \subsetneqq N \subsetneqq P$　　D. $N \subsetneqq P = M$

【解析】

$\because M = \{x \mid x = \frac{6m+1}{6} = \frac{3\cdot 2m+1}{6}, m \in \mathbf{Z}\}$

$N=\{x \mid x=\frac{3n-2}{6}=\frac{3(n-1)+1}{6}, n\in \mathbf{Z}\}$

$P=\{x \mid x=\frac{3P+1}{6}, P\in \mathbf{Z}\}$

$\therefore M \subsetneqq N=P$

【答案】 B

8\. 已知集合 $A=\{2,3,4\}$，$B=\{2,4,6,8\}$，$C=\{(x,y) \mid x\in A, y\in B$，且 $\log_x y\in \mathbf{N}^*\}$，则 C 中元素个数是 ( )

A. 9 B. 8 C. 3 D. 4

【解析】

① 当 $x=2$ 时，y 分别取 2,4,6,8

若使 $\log_x y\in \mathbf{N}^*$，只有 3 个，$\log_2 2, \log_2 4, \log_2 8$

② 当 $x=3$ 时，若使 $\log_x y\in \mathbf{N}^*$ 不存在

③ 当 $x=4$ 时，若使 $\log_x y\in \mathbf{N}^*$，只有 $\log_4 4$

∴ 集合 C 中元素的个数为 3 个

【答案】 C

二、填空题

9\. (2008 上海春) 已知集合 $A=\{x \mid x<-1$，或 $2\leqslant x<3\}$，$B=\{x \mid -2\leqslant x<4\}$，则 $A\cup B=$ ________.

【解析】

略

【答案】 $\{x \mid x<4\}$

10\. 设 $A=\{x \mid x=2k, k\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{x \mid x=2k-1, k\in \mathbf{Z}\}$，$C=\{x \mid x=2(k+1), k\in \mathbf{Z}\}$，$D=\{x \mid x=2k+1, k\in \mathbf{Z}\}$. 其中相等的集合是________.

【解析】

略

【答案】 $A=C, B=D$

11\. $P=\{(x,y) \mid y=-\sqrt{25-x^2}, x,y\in \mathbf{R}\}$，$Q=\{(x,y) \mid y=x+b, x,y\in \mathbf{R}\}$，若 $P\cap Q\neq \varnothing$，则实数 b 的取值范围是________.

【解析】

数形结合

【答案】 $-5\sqrt{2}\leqslant b\leqslant 5$

三、解答题

12\. 设集合 $A=\{x^2, 2x-1, -4\}$，$B\{x-5, 1-x, 9\}$，若 $A\cap B=\{9\}$，求 $A\cup B$.

【解析】

由 $9\in A$，可得 $x^2=9$，或 $2x-1=9$，解得 $x=\pm 3$，或 $x=5$.

当 $x=3$ 时，$A=\{9,5,-4\}$，B 中元素分别为 $-2, -2, 9$，不满足集合元素的互异性，故舍去；

当 $x=-3$ 时，$A=\{9,-7,-4\}$，$B=\{-8,4,9\}$，$A\cap B=\{9\}$ 满足题意，故 $A\cup B=\{-7,-4,-8,4,9\}$；

当 $x=5$ 时，$A=\{25,9,-4\}$，$B=\{0,-4,9\}$，此时 $A\cap B=\{-4,9\}$ 与 $A\cap B=\{9\}$ 矛盾，故舍去.

综上所述，$A\cup B=\{-8,-4,4,-7,9\}$.

13\. 已知 $A=\{x \mid x^2-2x+a\leqslant 0\}$，$B=\{x \mid x^2-3x+2\leqslant 0\}$，且 $A\subsetneqq B$，求实数 a 的取值范围.

【解析】

由已知可得 $B=\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$，

对于 A，分以下三种情况：

(1) $\Delta<0\Rightarrow a>1$，此时 $A=\varnothing$，满足 $A\subsetneqq B$；

(2) $\Delta=0\Rightarrow a=1$，此时 $A=\{1\}$，满足 $A\subsetneqq B$；

(3) $\Delta>0\Rightarrow a<1$，

此时 $A=\{x \mid 1-\sqrt{1-a}\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{1-a}\}$，

要满足 $A\subsetneqq B$，只需 $\begin{cases}1+\sqrt{1-a}\leqslant 2\\ 1-\sqrt{1-a}\geqslant 1\end{cases}$ 且两者等号不同时成立，解得 a 无解.

综上可得 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

第二讲
含绝对值的不等式及有理不等式的解法

最新考纲解读

1.熟练掌握含绝对值的不等式，一元二次不等式，高次不等式及分式不等式的解法.

2.熟练掌握含参数的一元二次不等式的解法.

3.通过图象了解一元二次不等式与相应的一元二次函数，一元二次方程的联系.

核心知识讲解

1 含绝对值的不等式的解法

(1) 利用绝对值的定义：$|x|=$ ________.

(2) 利用绝对值的性质：

① $|x|<a(a>0)\Leftrightarrow$ ________；

② $|x|<a(a>0)\Leftrightarrow$ ________.

③ $|ax+b|>c(c>0)\Leftrightarrow$ ________;

④ $|ax+b|<c(c>0)\Leftrightarrow$ ________;

⑤ $|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow$ ________;

⑥ $|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow$ ________.

(3) ________ 法:适合于含多个绝对值符号的不等式.

(4) 平方法:$|f(x)|>|g(x)|\Leftrightarrow$ ________

注:若用平方法,不等式两边必须都是非负数.

知识点答案

1. (1) $\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$

(2)① $-a<x<a$ ② $x>a$ 或 $x<-a$

③ $ax+b>c$ 或 $ax+b<-c$

④ $-c<ax+b<c$

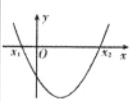
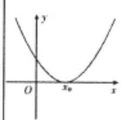
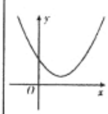
⑤ $f(x)>g(x)$ 或 $f(x)<-g(x)$

⑥ $-g(x)<f(x)<g(x)$

(3) 零点分段

(4) $f^2(x)>g^2(x)$

2 一元二次不等式的解法

判别式 / 图像 / 解集 / 不等式		$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ 的图像				
$ax^2+bx+c>0$	解集	$(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$		R
$ax^2+bx+c\geqslant 0$	解集		R	
$ax^2+bx+c\leqslant 0$	解集	$[x_1,x_2]$		
$ax^2+bx+c<0$	解集			$\varnothing$

3 解高次不等式常用的方法是________

4 分式不等式的解法

(1) $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow$ ________;

(2) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0\Leftrightarrow$ ________.

5 有关一元二次不等式恒成立问题

(1) $ax^2+bx+c>0(x\in\mathbf{R},a\neq 0)$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ ________;

$ax^2+bx+c<0(x\in\mathbf{R},a\neq 0)$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ ________;

(2) 分离参数法 $m>f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ ________;

$m<f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ ________.

知识点答案

2. $\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq x_0\}$;$(\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty)$;$\mathbf{R}\{x_0\}$;$\varnothing$;$(x_1,x_2)$;$\varnothing$

3. 数轴标根法(穿根法)

4. (1) $f(x)g(x)>0$ (2) $\begin{cases}g(x)\neq 0\\ f(x)g(x)>0\end{cases}$

5. (1) $\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$;$\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}$ (2) $m>f(x)_{\max}$;$m<f(x)_{\min}$

精题细讲

类型一 不含参数的不等式解法

例 1. 解不等式:

(1) $2x^3-x^2-15x>0$;

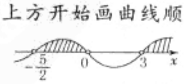
(2) $(x+4)(x+5)^2(2-x)^3<0$.

(3) $|x^2-3|>2x$.

(4) $\dfrac{3x-5}{x^2+2x-3}\leqslant 2$.

【解析】

(1) 原不等式可化为 $x(2x+5)(x-3)>0$. 把方程 $x(2x+5)(x-3)=0$ 的三个根 $x_1=0$,$x_2=-\dfrac{5}{2}$,$x_3=3$ 顺次标在数轴上. 然后从右上方开始画曲线顺次经过三个根,其解集如图的阴影部分所示.



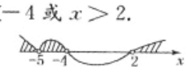
∴ 原不等式的解集为 $\{x\mid -\dfrac{5}{2}<x<0$ 或 $x>3\}$.

(2) 原不等式等价于

$(x+4)(x+5)^2(x-2)^3>0\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x+5\neq 0,\\ (x+4)(x-2)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -5,\\ x<-4 \text{ 或 } x>2.\end{cases}$

作图如图.



∴ 原不等式的解集为

$\{x\mid x<-5$ 或 $-5<x<-4$ 或 $x>2\}$.

【点评】

如果多项式 $f(x)$ 可分解为 n 个一次式的积,则一元高次不等式 $f(x)>0$[或 $f(x)<0$]可用"数轴标根法"求解,但要注意处理好有重根的情况.

用“标根法”解不等式时应注意①各一次项中 x 的系数必为正；②对于偶次或奇次重根可参照(2)的解法转化为不含重根的不等式，也可直接用“标根法”，但注意“奇穿偶不穿”.

(3) **解法一：**(定义法)①当 $x^2-3\geqslant 0$，即 $x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant-\sqrt{3}$ 时，$x^2-3>2x$，即 $x^2-2x-3>0$，则 $x>3$ 或 $x<-1$. ∴ $x>3$ 或 $x\leqslant-\sqrt{3}$；②当 $x^2-3<0$，即 $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ 时，$-x^2+3>2x$，即 $x^2+2x-3<0$，则 $-3<x<1$. 因此，$-\sqrt{3}<x<1$.

综上所述，原不等式的解集为 $\{x \mid x>3$，或 $x<1\}$.

解法二：(两边平方法)①当 $x\geqslant 0$ 时，原不等式可化为

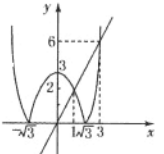
$(x^2-3)^2>4x^2$. 即 $x^4-10x^2+9>0$，

从而，得 $x>3$ 或 $x<-3$ 或 $-1<x<1$，故 $x>3$ 或 $0\leqslant x<1$；

② 当 $x<0$ 时，显然满足原不等式.

∴ 原不等式的解集为 $\{x \mid x>3$，或 $x<1\}$.

解法三：(图像法)令 $y_1=|x^2-3|$，$y_2=2x$，分别如图的坐标系中画出 $y_1=|x^2-3|$ 和 $y_2=2x$ 的图像，如图. 解方程 $|x^2-3|=2x$ 可得 $x_1=1$，$x_2=3$. ($\because x\geqslant 0$)



故满足 $y_1>y_2$ 的不等式即原不等式的解集为 $\{x \mid x>3$，或 $x<1\}$.

解法四：(利用等价转化)原不等式可化为

$x^2-3>2x$ 或 $x^2-3<-2x$.

∴ $x>3$ 或 $x<-1$ 或 $-3<x<1$.

∴ 原不等式的解集为 $\{x \mid x>3$，或 $x<1\}$.

【点评】

比较上述各种解法，解法一、解法二分类讨论，不重不漏，全面周到；解法三形象、直观；解法四较为简捷、直接.

(4) 将原不等式化为 $\dfrac{3x-3}{x^2+2x-3}-2\leqslant 0$ 即 $\dfrac{2x^2+x-1}{x^2+2x-3}\geqslant 0$ 不等式等价于 $\begin{cases}(x^2+2x-3)(2x^2+x-1)\geqslant 0\\ x^2+2x-3\neq 0\end{cases}$

即 $\begin{cases}(x+3)(x-1)(2x-1)(x+1)\geqslant 0\\ x\neq 1 \text{ 且 } x\neq-3\end{cases}$

解得原不等式的解集为 $\{x \mid x<-3$ 或 $-1\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$ 或 $x>1\}$

【点评】

本题容易出现的错解是：直接将不等式的两边同乘以分母 x^2+2x-3，错误原因是没有考虑 x^2+2x-3 的取值的正负性.

类型二　含参数的不等式的解法

例 2.　解不等式 $ax^2+2x+1>0$.

【解析】

(Ⅰ) 当 $a=0$ 时，$2x+1>0$，此时原不等式的解集是 $(-\dfrac{1}{2},+\infty)$.

(Ⅱ) 当 $a\neq 0$ 时，由 $\Delta=4-4a=0$ 得 $a=1$.

当 $a<0$ 时 $\Delta>0$，

方程 $ax^2+2x+1=0$ 的根为，

$x_1=\dfrac{-1-\sqrt{1-a}}{a}$，$x_2=\dfrac{-1+\sqrt{1-a}}{a}$

∴ 原不等式的解集为 $\{x \mid \dfrac{-1-\sqrt{1-a}}{a}<x<\dfrac{-1+\sqrt{1-a}}{a}\}$.

当 $0<a<1$ 时 $\Delta>0$，

原不等式的解集为 $\{x \mid x<\dfrac{-1-\sqrt{1-a}}{a}$ 或 $x>\dfrac{-1+\sqrt{1-a}}{a}\}$

当 $a\geqslant 1$ 时 $\Delta\leqslant 0$，

原不等式的解集为 $\mathbf{R}$.

综上所述得，

当 $a<0$ 时，解集为

$\{x \mid \dfrac{-1-\sqrt{1-a}}{a}<x<\dfrac{-1+\sqrt{1-a}}{a}\}$；

当 $a=0$ 时，解集为 $\{x \mid x>-\dfrac{1}{2}\}$；

当 $0<a<1$ 时，解集为 $\{x \mid x<\dfrac{-1-\sqrt{1-a}}{a}$ 或 $x>\dfrac{-1+\sqrt{1-a}}{a}\}$；

当 $a\geqslant 1$ 时，解集为 $\mathbf{R}$.

【点评】

从不等式的结构形式看，可以是一元一次不等式，也可以是一元二次不等式，其中为二次不等式时，又要考虑“开口方向”和“判别式的正负”问题，注意到 $\Delta=4-4a$，可以从中找到讨论点是“$a=0$”和“$a=1$”.

类型三　不等式恒成立问题

例 3.　设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数，是否存在这样的实数 a，使得不等式 $f(1-ax-x^2)<f(2-a)$ 对于任意 $x\in[0,1]$ 都成立？若存在，

试求出实数 a 的取值范围;若不存在,请说明理由.

【解析】

由于 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数,所以不等式 $f(1-ax-x^2)<f(2-a)$ 对于任意 $x\in[0,1]$ 都成立 $\Leftrightarrow$ 不等式 $1-ax-x^2<2-a$ 对于任意 $x\in[0,1]$ 都成立,即不等式 $x^2+ax-a+1>0$ 在 $x\in[0,1]$ 上恒成立.

解法一:令 $g(x)=x^2+ax-a+1$,只需 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值大于 0 即可.

$$g(x)=x^2+ax-a+1=(x+\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}-a+1.$$

① 当 $-\frac{a}{2}<0$,即 $a>0$ 时,$f(x)_{\min}=f(0)=1-a>0\Rightarrow a<1$ 故 $0<a<1$;

② 当 $0\leqslant-\frac{a}{2}\leqslant1$,即 $-2\leqslant a\leqslant0$ 时,$f(x)_{\min}=f(-\frac{a}{2})=-\frac{a^2}{4}-a+1>0\Rightarrow-2-2\sqrt{2}<a<-2+2\sqrt{2}$,故 $-2\leqslant a\leqslant0$;

③ 当 $-\frac{a}{2}>1$,即 $a<-2$ 时,$f(x)_{\min}=f(1)=2>0$,满足,故 $a<-2$.

故存在实数 a,使得不等式 $f(1-ax-x^2)<f(2-a)$ 对于任意 $x\in[0,1]$ 都成立,其取值范围是 $(-\infty,1)$.

解法二:由 $1-ax-x^2<2-a$ 得 $(1-x)a<x^2+1$,

$\because x\in[0,1]$,$\therefore 1-x\geqslant0$,

$\therefore$① 当 $x=1$ 时,$0<2$ 恒成立,此时 $a\in\mathbf{R}$;

② 当 $x\in[0,1)$ 时,$a<\frac{x^2+1}{1-x}$ 恒成立. 求当 $x\in[0,1)$ 时,函数 $y=\frac{x^2+1}{1-x}$ 的最小值.

令 $t=1-x(t\in(0,1])$,

所以 $y=\frac{x^2+1}{1-x}=\frac{(1-t)^2+1}{t}=t+\frac{2}{t}-2$,

而函数 $y=t+\frac{2}{t}-2$ 在 $(0,1]$ 上是减函数,

所以当且仅当 $t=1$,即 $x=0$ 时,$y_{\min}=1$,

故要使不等式在 $[0,1)$ 上恒成立,只需 $a<1$,

由 ①② 得 $a<1$.

故存在实数 a,使得不等式 $f(1-ax-x^2)<f(2-a)$ 对于任意 $x\in[0,1]$ 都成立,其取值范围是 $(-\infty,1)$.

【点评】

本题首先利用函数的单调性,将抽象函数符号去掉,然后转化为二次不等式恒成立问题.

解法一是转化为二次函数的最值问题.

解法二是利用分离参数法.

随堂练习

1. 若 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid2\leqslant2^{2-x}<8\}$,$B=\{x\in\mathbf{R}\mid\log_2x>1\}$,则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)$ 的元素的个数为 ( )

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

【答案】 C

2. 不等式 $|x-1|+|x-2|\leqslant3$ 的最小整数解是 ( )

A. 0　B. -1　C. 1　D. 2

【答案】 A

3. 若不等式 $(a-2)x^2+2(a-2)x-4<0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,则 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,2]$　B. $[-2,2]$

C. $(-2,2]$　D. $(-\infty,-2)$

【答案】 C

4. 已知不等式 $ax^2+bx+c\geqslant0$ 的解集是 $\{x\mid-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant2\}$,则不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集是 ( )

A. $\{x\mid-2<x<\frac{1}{3}\}$　B. $\{x\mid x<-2$ 或 $x>\frac{1}{3}\}$

C. $\{x\mid-3<x<\frac{1}{2}\}$　D. $\{x\mid x<-3$ 或 $x>\frac{1}{2}\}$

【答案】 C

5. 设不等式 $|x-1|-|2x+1|<-3$ 的解集为 P,全集 $U=\mathbf{R}$,则 $\complement_UP=$ ( )

A. $(-5,1)$　B. $(-5,1]$

C. $[-5,1)$　D. $[-5,1]$

【答案】 D

总结升华

1. 解不等式的基础是一元一次不等式(组)、一元二次不等式(组),而解不等式的关键是同解变形,变形规律是:无理 → 有理;分式 → 整式;高次 → 低次;二次 → 一次. 在此过程中,要注意逻辑连接词"或""且"的运用,以及解集的"交""并"的运算,在较复杂的情况下,可画数轴求"交""并"集,以免出错.

2. 解一元二次方程不等式时,若二次项系数含有字母,应对二次项系数的符号进行分类讨论,若二次

项系数为负,可两边同乘以 -1,转化为正的,但此时不等号要改变方向.若相应二次方程根的大小不确定,应先讨论根的大小,再写出解集.

3. 解分式不等式时,不要直接去分母(当分母符号不确定时),要移项,化右边为零.若是解含等号的分式不等式,要注意分母的根不能写在解集里.

4. 在解含参数的不等式时,往往要分类讨论,分类时要标准明确,不重不漏.

5. 用穿根法来解分式不等式、高次不等式比较方便,但在穿根时要注意把不等式整理成标准形式,即各因式中未知数 x 的系数化为1.

6. 解各种类型的不等式都有其"通法",也有"巧法",切不可偏爱"巧法"而忽视"通法",否则将是本末倒置.

课后习题演练

一、选择题

1. 不等式 $(x^3-4x^2+4x)(3+2x-x^2)>0$ 的解集为 ( )

A. $\{x\mid x<-1$ 或 $1<x<3\}$

B. $\{x\mid 0<x<3$ 且 $x\neq 2\}$

C. $\{x\mid -1<x<0$ 或 $x>3\}$

D. $\{x\mid x<-1$ 或 $0<x<2$ 或 $2<x<3\}$

【解析】

略

【答案】 D

2. 不等式 $\frac{x-1}{x}\geqslant 2$ 的解集为 ( )

A. $[-1,0)$　　B. $[-1+\infty)$

C. $(-\infty,-1]$　　D. $(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$

【解析】

略

【答案】 D

3. 不等式组 $\begin{cases}x^2-1<0\\x^2-3x<0\end{cases}$ 的解集为 ( )

A. $\{x\mid -1<x<1\}$　　B. $\{x\mid 0<x<3\}$

C. $\{x\mid 0<x<1\}$　　D. $\{x\mid -1<x<3\}$

【解析】

略

【答案】 C

4. 若 $0<a<1$,则不等式 $(x-a)(x-\frac{1}{a})>0$ 的解集为 ( )

A. $\{x\mid a<x<\frac{1}{a}\}$　　B. $\{x\mid x>\frac{1}{a}$,或 $x<a\}$

C. $\{x\mid \frac{1}{a}<x<a\}$　　D. $\{x\mid x<\frac{1}{a}$,或 $x>a\}$

【解析】

略

【答案】 B

5. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数,又有 $f(-3)=0$,则不等式 $xf(x)<0$ 的解集为 ( )

A. $(-3,0)\cup(0,3)$

B. $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$

C. $(-3,0)\cup(3,+\infty)$

D. $(-\infty,-3)\cup(0,3)$

【解析】

数形结合法

【答案】 A

6. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的导数为 $f'(x)$,$f'(0)>0$,对于任意实数 x,有 $f(x)\geqslant 0$,则 $\frac{f(1)}{f'(0)}$ 的最小值为 ( )

A. 3　　B. $\frac{5}{2}$　　C. 2　　D. $\frac{3}{2}$

【解析】

$f'(x)=2ax+b$

依题可知 $f'(0)=b>0$

$\because$ 对于任意实数 x,有 $f(x)\geqslant 0$

$\therefore \begin{cases}a>0\\\Delta\leqslant 0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a>0\\b^2-4ac\leqslant 0\end{cases}$

即 $b\leqslant 2\sqrt{ac}$

$\frac{f(1)}{f'(0)}=\frac{a+b+c}{b}=\frac{a+c}{b}+1\geqslant\frac{2\sqrt{ac}}{b}+1\geqslant\frac{b}{b}+1=2$

$\therefore \frac{f(1)}{f'(0)}$ 的最小值为 2

【答案】 C

二、填空题

7. 不等式 $ax^2+ax-4<0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,则 a 的取值范围为________.

【解析】

$(-16,0]$

【答案】 由 $a=0$ 或 $\begin{cases}a<0\\\Delta<0\end{cases}$ 可得

8. 不等式 $|x+2|>\frac{3x+14}{5}$ 的解集是________.

【解析】

略

【答案】 $(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$

9. 当关于 x 的不等式 $a^2-4+4x-x^2>0$ 成立时，不等式 $|x^2-4|<1$ 成立，则正数 a 的取值范围是________.

【解析】

由 $a^2-4+4x-x^2>0$ 得

$x^2-4x+4<a^2$

即 $(x-2)^2<a^2$

$\because a$ 是正数 $\quad\therefore |x-2|<a$

$\therefore 2-a<x<2+a$

$|x^2-4|<1$ 的解集为 $\{x\mid\sqrt{3}<x<\sqrt{5}$ 或 $-\sqrt{5}<x<-\sqrt{3}\}$

设 $A=\{x\mid 2-a<x<2+a\}$

$B=\{x\mid\sqrt{3}<x<\sqrt{5}$ 或 $-\sqrt{5}<x<-\sqrt{3}\}$

依题意知 $A\subseteq B$

$\therefore\begin{cases}2-a\geqslant\sqrt{3}\\2+a\leqslant\sqrt{5}\\a>0\end{cases}$ 解得

$0<a\leqslant\sqrt{5}-2$

【答案】 $0<a\leqslant\sqrt{5}-2$

三、解答题

10. 解不等式 $|5x-6|<x^2$.

【解析】

分类求解如下：由于实数 1、2 把数轴分成 $(-\infty,1]$、$(1,2]$、$(2,+\infty)$ 三部分，所以

(1) 当 $x\leqslant 1$ 时，原不等式等价于

$\begin{cases}-(x-1)-(x-2)>x+3\\x\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow x<0$；

(2) 当 $1<x\leqslant 2$ 时，原不等式等价于

$\begin{cases}x-1-(x-2)>x+3\\1<x\leqslant 2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x<-2\\1<x\leqslant 2\end{cases}\Rightarrow$ 无解；

(3) 当 $x>2$ 时，原不等式等价于

$\begin{cases}x-1+x-2>x+3\\x>2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>6\\x>2\end{cases}\Rightarrow x>6$，

综合(1)(2)(3)得原不等式的解集为 $\{x\mid x<0$ 或 $x>6\}$.

【答案】 $(-\infty,-6)\cup(1,2)\cup(3,+\infty)$

11. 解关于 x 的不等式：

(1) $x^2+ax+4>(a\in\mathbf{R})$；

(2) $x^2-(a+\frac{1}{a})x+1<0(a\neq 0)$；

(3) $mx^2+(m-2)x-2>0(m\in\mathbf{R})$.

【解析】

(1) $\because\Delta=a^2-16$，

$\therefore$ 当 $\Delta<0$，即 $-4<a<4$ 时，解集为 $\mathbf{R}$；

当 $\Delta=0$，即 $a=\pm4$ 时，解集为 $\{x\mid x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq-\frac{a}{2}\}$；

$\{x\mid x<\frac{-a-\sqrt{a^2-16}}{2}$，

或 $x>\frac{-a+\sqrt{a^2-16}}{2}\}$.

(2) 原不等式可化为 $(x-a)(x-\frac{1}{a})<0$.

当 $a<\frac{1}{a}$，即 $a<-1$ 或 $0<a<1$ 时，解集为 $\{x\mid a<x<\frac{1}{a}\}$；

当 $a=\frac{1}{a}$，即 $a=\pm1$ 时，解集为 $\varnothing$；

当 $a>\frac{1}{a}$，即 $-1<a<0$ 或 $a>1$ 时，解集为 $\{x\mid\frac{1}{a}<x<a\}$.

(3) 当 $m=0$ 时，原不等式可化为 $-2x-2>0$，即 $x<-1$；当 $m\neq 0$ 时，分两种情形：当 $m>0$ 时，原不等式化为 $(mx-2)(x+1)>0$，

即 $(x-\frac{2}{m})(x+1)>0$，

不等式的解集为 $\{x\mid x>\frac{2}{m}$ 或 $x<-1\}$；

当 $m<0$ 时，原不等式化为 $(x-\frac{2}{m})(x+1)<0$，由于 $\frac{2}{m}$ 与 -1 无法比较大小，故又分三种情形：

当 $\frac{2}{m}>-1$，即 $m<-2$ 时，

原不等式的解集为 $\{x\mid -1<x<\frac{2}{m}\}$；

当 $\frac{2}{m}<-1$，即 $-2<m<0$ 时，

原不等式的解集为 $\{x\mid\frac{2}{m}<x<-1\}$；

当 $\frac{2}{m}=-1$，即 $m=-2$ 时，

原不等式化为 $(x+1)^2<0$，解集为 $\varnothing$.

综上所述：当 $m<-2$ 时，

解集为 $\{x\mid -1<x<\frac{2}{m}\}$；

当 $-2<m<0$ 时，解集为 $\{x\mid\frac{2}{m}<x<-1\}$；

当 $m=-2$ 时，解集为 $\varnothing$；

当 $m=0$ 时，解集为 $\{x\mid x<-1\}$；

当 $m>0$ 时，解集为 $\{x\mid x<-1$，或 $x>\frac{2}{m}\}$.

第三讲
逻辑连接词和四种命题

最新考纲解读

1.了解命题、简单命题、复合命题的概念.
2.理解“或”、“”“且”、“非”的含义,并能用他们表示复合命题,掌握真值表.
3.理解四种命题及相互关系.
4.理解并掌握反证法及应用.

核心知识讲解

1 逻辑连接词

(1) ________ 的语句叫命题.

(2) ________、________、________ 这些词叫做逻辑连接词.

或:两个简单命题中至少一个成立.

且:两个简单命题都成立.

非:对一个命题的否定.

(3) ________ 叫做简单命题;由 ________ 和 ________ 构成的命题叫做复合命题. 复合命题一般有三种类型:①p 或 q;②q 且 p;③ 非 p.

(4) ________ 叫做真值表.

① 非 p 形式复合

命题真值表

p	非 p
真	
假	

②p 且 q 形式复合

命题真值表

p	q	p 且 q
真	真	
真		假
	真	假
假	假	

③p 或 q 形式复合

命题真值表

p	q	p 或 q
真	真	
真	假	
假	真	
	假	假

2 四种命题

(1) 一般地,用 p 或 q 分别表示原命题的条件和结论,用 $\neg p$ 或 $\neg q$ 分别表示 p 和 q 的否定,于是四种命题的形式就是:

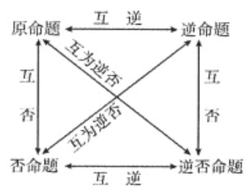
原命题:若 p 则 q($p\Rightarrow q$);

逆命题:若________ 则________ (________);

否命题:若________ 则________ (________);

逆否命题:若________ 则________ (________).

(2) 四种命题的关系



注意:

① 一个命题和它的逆否命题同真假,而与它的其他两个命题的真假无此规律.

② 要严格区别命题的否定与否定命题之间的差别.

“否命题”是对原命题的条件和结论同时否定,而命题的否定只是否定命题的结论.

3 反证法的步骤及应用

(1) 反证法的证题步骤:反设 — 归谬 — 结论.

(2) 反证法的理论根据是原命题与其逆否命题同真同假,当直接证明有困难时,可考虑用反证法,并常用于下列诸情形之一:

① 所给的命题中题设的信息量很少或由其输出的信息量很少的一类命题.

② 当命题的结论以否定的形式出现时,如出现“不大于”“不存在”“不可能”“不都是”等的词语.