



面向21世纪课程教材  
Textbook Series for 21st Century

# 数学分析

第四版 下册

华东师范大学数学系 编



高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

面向 21 世纪课程教材  
Textbook Series for 21st Century

# 数学分析

S h u x u e F e n x i

第四版 下册

华东师范大学数学系 编



高等教育出版社·北京  
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

## 内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材。内容包括数项级数、函数列与函数项级数、幂级数、傅里叶级数、多元函数的极限与连续、多元函数微分学、隐函数定理及其应用、含参量积分、曲线积分、重积分、曲面积分、向量函数的微分学等。

本次修订认真总结了前三版的编写经验,特别对第三版的内容进行了细致的分析,听取了部分使用学校的意见,对第三版的部分内容作了适当调整:实数理论基本定理出现的先后次序作了一些变化;增加了内闭一致收敛的概念,调整了与之有关的内容;适当增加了一些技巧性要求较高的例题,以方便学生学习。第四版仍然保持了教材前三版“内容选取适当,深入浅出,易出易教”的特点。

本书可作为高等学校数学类专业的教材使用。

## 图书在版编目(CIP)数据

数学分析. 下册 / 华东师范大学数学系编. —4 版.

北京:高等教育出版社,2010.6

ISBN 978-7-04-029567-2

I. ①数… II. ①华… III. ①数学分析-高等学校-教材 IV. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 067245 号

---

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a> <a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	<a href="http://www.landaco.com">http://www.landaco.com</a> <a href="http://www.landaco.com.cn">http://www.landaco.com.cn</a>
印 刷	山东鸿杰印务集团有限公司	畅想教育	<a href="http://www.widedu.com">http://www.widedu.com</a>
开 本	787×960 1/16	版 次	2001 年 6 月第 1 版 2010 年 6 月第 4 版
印 张	24	印 次	2010 年 6 月第 1 次印刷
字 数	440 000	定 价	32.50 元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 29567-00

# 目 录

<b>第十二章 数项级数</b> .....	1
§ 1 级数的收敛性 .....	1
§ 2 正项级数 .....	6
一 正项级数收敛性的一般判别原则 .....	6
二 比式判别法和根式判别法 .....	9
三 积分判别法 .....	14
四 拉贝判别法 .....	15
§ 3 一般项级数 .....	18
一 交错级数 .....	18
二 绝对收敛级数及其性质 .....	19
三 阿贝尔判别法和狄利克雷判别法 .....	23
<b>第十三章 函数列与函数项级数</b> .....	28
§ 1 一致收敛性 .....	28
一 函数列及其一致收敛性 .....	28
二 函数项级数及其一致收敛性 .....	33
三 函数项级数的一致收敛性判别法 .....	34
§ 2 一致收敛函数列与函数项级数的性质 .....	39
<b>第十四章 幂级数</b> .....	47
§ 1 幂级数 .....	47
一 幂级数的收敛区间 .....	47
二 幂级数的性质 .....	51
三 幂级数的运算 .....	53
§ 2 函数的幂级数展开 .....	55
一 泰勒级数 .....	55
二 初等函数的幂级数展开式 .....	57
* § 3 复变量的指数函数·欧拉公式 .....	64
<b>第十五章 傅里叶级数</b> .....	67
§ 1 傅里叶级数 .....	67
一 三角级数·正交函数系 .....	67
二 以 $2\pi$ 为周期的函数的傅里叶级数 .....	69

三 收敛定理	70
§ 2 以 $2l$ 为周期的函数的展开式	77
一 以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数	77
二 偶函数与奇函数的傅里叶级数	79
§ 3 收敛定理的证明	84
<b>第十六章 多元函数的极限与连续</b>	92
§ 1 平面点集与多元函数	92
一 平面点集	92
二 $\mathbf{R}^2$ 上的完备性定理	95
三 二元函数	97
四 $n$ 元函数	99
§ 2 二元函数的极限	100
一 二元函数的极限	101
二 累次极限	104
§ 3 二元函数的连续性	108
一 二元函数的连续性概念	108
二 有界闭域上连续函数的性质	110
<b>第十七章 多元函数微分学</b>	115
§ 1 可微性	115
一 可微性与全微分	115
二 偏导数	116
三 可微性条件	118
四 可微性几何意义及应用	120
§ 2 复合函数微分法	126
一 复合函数的求导法则	126
二 复合函数的全微分	131
§ 3 方向导数与梯度	133
§ 4 泰勒公式与极值问题	136
一 高阶偏导数	136
二 中值定理和泰勒公式	142
三 极值问题	145
<b>第十八章 隐函数定理及其应用</b>	154
§ 1 隐函数	154
一 隐函数的概念	154
二 隐函数存在性条件的分析	155
三 隐函数定理	156
四 隐函数求导举例	159

§ 2 隐函数组 .....	163
一 隐函数组的概念 .....	163
二 隐函数组定理 .....	163
三 反函数组与坐标变换 .....	166
§ 3 几何应用 .....	170
一 平面曲线的切线与法线 .....	170
二 空间曲线的切线与法平面 .....	171
三 曲面的切平面与法线 .....	173
§ 4 条件极值 .....	176
<b>第十九章 含参量积分</b> .....	<b>185</b>
§ 1 含参量正常积分 .....	185
§ 2 含参量反常积分 .....	192
一 一致收敛性及其判别法 .....	192
二 含参量反常积分的性质 .....	196
§ 3 欧拉积分 .....	202
一 $\Gamma$ 函数 .....	203
二 B 函数 .....	205
三 $\Gamma$ 函数与 B 函数之间的关系 .....	206
<b>第二十章 曲线积分</b> .....	<b>209</b>
§ 1 第一型曲线积分 .....	209
一 第一型曲线积分的定义 .....	209
二 第一型曲线积分的计算 .....	211
§ 2 第二型曲线积分 .....	214
一 第二型曲线积分的定义 .....	214
二 第二型曲线积分的计算 .....	216
三 两类曲线积分的联系 .....	220
<b>第二十一章 重积分</b> .....	<b>223</b>
§ 1 二重积分的概念 .....	223
一 平面图形的面积 .....	223
二 二重积分的定义及其存在性 .....	225
三 二重积分的性质 .....	228
§ 2 直角坐标系下二重积分的计算 .....	230
§ 3 格林公式·曲线积分与路线的无关性 .....	236
一 格林公式 .....	236
二 曲线积分与路线的无关性 .....	240
§ 4 二重积分的变量变换 .....	245
一 二重积分的变量变换公式 .....	245

二 用极坐标计算二重积分 .....	249
§ 5 三重积分 .....	255
一 三重积分的概念 .....	255
二 化三重积分为累次积分 .....	256
三 三重积分换元法 .....	260
§ 6 重积分的应用 .....	265
一 曲面的面积 .....	265
二 质心 .....	268
三 转动惯量 .....	270
四 引力 .....	272
* § 7 $n$ 重积分 .....	274
* § 8 反常二重积分 .....	279
一 无界区域上的二重积分 .....	279
二 无界函数的二重积分 .....	284
* § 9 在一般条件下重积分变量变换公式的证明 .....	285
<b>第二十二章 曲面积分</b> .....	293
§ 1 第一型曲面积分 .....	293
一 第一型曲面积分的概念 .....	293
二 第一型曲面积分的计算 .....	293
§ 2 第二型曲面积分 .....	296
一 曲面的侧 .....	296
二 第二型曲面积分的概念 .....	297
三 第二型曲面积分的计算 .....	299
四 两类曲面积分的联系 .....	302
§ 3 高斯公式与斯托克斯公式 .....	305
一 高斯公式 .....	305
二 斯托克斯公式 .....	307
* § 4 场论初步 .....	312
一 场的概念 .....	312
二 梯度场 .....	312
三 散度场 .....	314
四 旋度场 .....	316
五 管量场与有势场 .....	318
* <b>第二十三章 向量函数微分学</b> .....	321
§ 1 $n$ 维欧氏空间与向量函数 .....	321
一 $n$ 维欧氏空间 .....	321
二 向量函数 .....	323

---

三	向量函数的极限与连续 .....	324
§ 2	向量函数的微分 .....	328
一	可微性与可微条件 .....	328
二	可微函数的性质 .....	331
三	黑赛矩阵与极值 .....	334
§ 3	反函数定理和隐函数定理 .....	337
一	反函数定理 .....	337
二	隐函数定理 .....	340
三	拉格朗日乘数法 .....	343
习题答案	.....	347
索 引	.....	366
人名索引	.....	370



# 第十二章 数项级数

## §1 级数的收敛性

初等数学知识告诉我们,有限个实数  $u_1, u_2, \dots, u_n$  相加,其和一定存在并且是一个实数,而无限个实数相加会出现什么结果呢?例如,在第二章提到《庄子·天下篇》“一尺之棰,日取其半,万世不竭”的例中,把每天截下那一部分的长度“加”起来:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots,$$

这就是“无限个数相加”的一个例子.从直观上可以看到,它的和是1.再如下面由“无限个数相加”的表达式

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$$

中,如果将它写作

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots,$$

其结果无疑是0,如写作

$$1 + [(-1) + 1] + [(-1) + 1] + \dots = 1 + 0 + 0 + 0 + \dots,$$

其结果则是1,因此两个结果完全不同.由此提出这样的问题:“无限个数相加”是否存在“和”;如果存在,“和”等于什么?可见,我们对有限和的认识是无法完全移植到“无限和”的,需要建立“无限和”自身的理论。

**定义1** 给定一个数列  $\{u_n\}$ ,对它的各项依次用“+”号连接起来的表达式

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

称为常数项无穷级数或数项级数(也常简称级数),其中  $u_n$  称为数项级数(1)的  
通项或一般项.

数项级数(1)也常写作  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  或简单写作  $\sum u_n$ .

数项级数(1)的前  $n$  项之和,记为

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \quad (2)$$

称它为数项级数(1)的第  $n$  个部分和,也简称部分和.

**定义 2** 若数项级数(1)的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于 $S$  (即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ), 则称数项级数(1)收敛, 称 $S$ 为数项级数(1)的和, 记作

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad \text{或} \quad S = \sum u_n.$$

若 $\{S_n\}$ 是发散数列, 则称数项级数(1)发散.

**例 1** 讨论等比级数(也称为几何级数)

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \quad (3)$$

的收敛性( $a \neq 0$ ).

**解**  $q \neq 1$  时, 级数(3)的第 $n$ 个部分和

$$S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

因此,

(i) 当 $|q| < 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q}$ . 此时级数(3)收敛, 其和为 $\frac{a}{1 - q}$ .

(ii) 当 $|q| > 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ , 级数(3)发散.

(iii) 当 $q = 1$  时,  $S_n = na$ , 级数发散.

当 $q = -1$  时,  $S_{2k} = 0, S_{2k+1} = a, k = 0, 1, 2, \cdots$ , 级数发散.

总之,  $|q| < 1$  时, 级数(3)收敛;  $|q| \geq 1$  时, 级数(3)发散.  $\square$

**例 2** 讨论数项级数

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots \quad (4)$$

的收敛性.

**解** 级数(4)的第 $n$ 个部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

因此级数(4)收敛, 且

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = 1. \quad \square$$

由于级数(1)的收敛或发散(简称敛散性)是由它的部分和数列 $\{S_n\}$ 来确定, 因而也可把级数(1)作为数列 $\{S_n\}$ 的另一种表现形式. 反之, 任给一个数列

$\{a_n\}$ , 如果把它看作某一数项级数的部分和数列, 则这个数项级数就是

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) + \cdots \quad (5)$$

这时数列  $\{a_n\}$  与级数 (5) 具有相同的敛散性, 且当  $\{a_n\}$  收敛时, 其极限值就是级数 (5) 的和.

基于级数与数列的这种关系, 读者不难根据数列极限的性质推出下面有关级数的一些定理.

**定理 12.1** (级数收敛的柯西准则) 级数 (1) 收敛的充要条件是: 任给正数  $\varepsilon$ , 总存在正整数  $N$ , 使得当  $m > N$  以及对任意的正整数  $p$ , 都有

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p}| < \varepsilon. \quad (6)$$

根据定理 12.1, 我们立刻可写出级数 (1) 发散的充要条件: 存在某正数  $\varepsilon_0$ , 对任何正整数  $N$ , 总存在正整数  $m_0 (> N)$  和  $p_0$ , 有

$$|u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}| \geq \varepsilon_0. \quad (7)$$

由定理 12.1 立即可得如下推论, 它是级数收敛的一个必要条件.

**推论** 若级数 (1) 收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

当一个级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的一般项  $u_n$  不收敛于零时, 由推论可知该级数发散. 因此, 上述推论常用来判断级数的发散. 但推论只是级数收敛的必要条件, 不是充分条件, 即当一般项  $u_n \rightarrow 0$  时, 不能得出该级数收敛的结论. 请看下例.

**例 3** 证明调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

是发散的.

**证** 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

无法用推论推出调和级数发散. 但令  $p = m$  时, 有

$$\begin{aligned} \left| u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{2m} \right| &= \left| \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m} \right| \\ &\geq \left| \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \cdots + \frac{1}{2m} \right| \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

因此由定理 12.1, 取  $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ , 对任何正整数  $N$ , 只要  $m > N$  和  $p = m$  就有 (7) 式成

!

立,所以调和级数是发散的.  $\square$

**例 4** 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}{n^{n+\frac{1}{n}}}$  的敛散性.

**解** 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}{n^{n+\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}{n^n n^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}}{n^{\frac{1}{n}}} = 1 \neq 0,$

所以由推论得知该级数发散.  $\square$

**例 5** 应用级数收敛的柯西准则证明级数  $\sum \frac{1}{n^2}$  收敛.

**证** 由于

$$\begin{aligned} & |u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p}| \\ &= \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(m+p)^2} \\ &< \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \cdots + \frac{1}{(m+p-1)(m+p)} \\ &= \frac{1}{m} - \frac{1}{m+p} \\ &< \frac{1}{m}, \end{aligned}$$

因此,对任给正数  $\varepsilon$ ,取  $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ ,使当  $m > N$  及对任意正整数  $p$ ,由上式就有

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p}| < \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

依定理 12.1 推得级数  $\sum \frac{1}{n^2}$  是收敛的.  $\square$

从例 5 的证明过程可知,  $\sum \frac{1}{n(n+1)}$  也是收敛级数.

**定理 12.2** 若级数  $\sum u_n$  与  $\sum v_n$  都收敛,则对任意常数  $c, d$ ,级数  $\sum (cu_n + dv_n)$  亦收敛,且

$$\sum (cu_n + dv_n) = c \sum u_n + d \sum v_n.$$

由定理 12.1,级数  $\sum u_n$  的敛散性取决于:对任给正数  $\varepsilon$ ,是否存在充分大的正数  $N$ ,使得当  $n > N$  及对任意正整数  $p$  恒有(6)式成立.由此可见,一个级数是否收敛与级数前面有限项的取值无关.从而我们可得到以下定理:

**定理 12.3** 去掉、增加或改变级数的有限个项并不改变级数的敛散性.

由此定理知道,若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛,其和为  $S$ ,则级数

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots \quad (8)$$

也收敛,且其和  $R_n = S - S_n$ . (8)式称为级数  $\sum u_n$  的第  $n$  个余项(或简称余项),它表示以部分和  $S_n$  代替  $S$  时所产生的误差.

**定理 12.4** 在收敛级数的项中任意加括号,既不改变级数的收敛性,也不改变它的和.

证 设  $\sum u_n$  为收敛级数,其和为  $S$ . 记

$$v_1 = u_1 + \cdots + u_{n_1}, \quad v_2 = u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}, \cdots,$$

$$v_k = u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}, \cdots.$$

现在证明  $\sum u_n$  加括号后的级数  $\sum_{k=1}^{\infty} (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k$  也收敛,且其和也是  $S$ . 事实上,设  $\{S_n\}$  为收敛级数  $\sum u_n$  的部分和数列,则级数  $\sum v_k$  的部分和数列  $\{S_{n_k}\}$  是  $\{S_n\}$  的一个子列. 由于  $\{S_n\}$  收敛,且  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ . 故由子列性质,  $\{S_{n_k}\}$  也收敛,且  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k} = S$ , 即级数  $\sum v_k$  收敛,且它的和也等于  $S$ .  $\square$

注意:从级数加括号后的收敛,不能推断它在未加括号前也收敛. 例如

$$(1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$$

收敛,但级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

却是发散的.

**例 6** 判别级数  $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1} + \cdots$  的敛散性.

解 考虑加了括号后的级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1}\right) + \cdots,$$

其一般项  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} = \frac{2}{n-1}$ . 由例 3 及定理 12.2 知道,级数  $\sum_{n=2}^{\infty} u_n =$

$2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散,从而根据定理 12.4,原级数发散.  $\square$

## 习 题

1. 证明下列级数的收敛性,并求其和:

$$(1) \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 16} + \cdots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} + \cdots;$$

$$(2) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \cdots;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n});$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}.$$

2. 证明:若级数  $\sum u_n$  发散,  $c \neq 0$ , 则  $\sum cu_n$  也发散.

3. 设级数  $\sum u_n$  与  $\sum v_n$  都发散, 试问  $\sum (u_n + v_n)$  一定发散吗? 又若  $u_n$  与  $v_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 都是非负数, 则能得出什么结论?

4. 证明:若数列  $\{a_n\}$  收敛于  $a$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a$ .

5. 证明:若数列  $\{b_n\}$  有  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ , 则

(1) 级数  $\sum (b_{n+1} - b_n)$  发散;

(2) 当  $b_n \neq 0$  时, 级数  $\sum \left( \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = \frac{1}{b_1}$ .

6. 应用第 4, 5 题的结果求下列级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n-1)(a+n)};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}.$$

7. 应用柯西准则判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum \frac{\sin 2^n}{2^n}; \quad (2) \sum \frac{(-1)^{n-1} n^2}{2n^2+1};$$

$$(3) \sum \frac{(-1)^n}{n}; \quad (4) \sum \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}.$$

8. 证明级数  $\sum u_n$  收敛的充要条件是:任给正数  $\varepsilon$ , 存在某正整数  $N$ , 对一切  $n > N$  总有

$$|u_N + u_{N+1} + \dots + u_n| < \varepsilon.$$

9. 举例说明:若级数  $\sum u_n$  对每个固定的  $p$  满足条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} + \dots + u_{n+p}) = 0,$$

此级数仍可能不收敛.

10. 设级数  $\sum u_n$  满足:加括号后级数  $\sum_{k=1}^{\infty} (u_{n_k+1} + \dots + u_{n_{k+1}})$  收敛 ( $n_1 = 0$ ), 且在同一括号中的  $u_{n_k+1}, u_{n_k+2}, \dots, u_{n_{k+1}}$  符号相同, 证明  $\sum u_n$  亦收敛.

## §2 正项级数

### 一 正项级数收敛性的一般判别原则

若数项级数各项的符号都相同, 则称它为同号级数. 对于同号级数, 只需研

究各项都是由正数组成的级数——称为正项级数. 如果级数的各项都是负数, 则它乘以 $-1$ 后就得到一个正项级数, 它们具有相同的敛散性.

由于级数与其部分和数列具有相同的敛散性, 所以首先得到如下定理.

**定理 12.5** 正项级数 $\sum u_n$ 收敛的充要条件是: 部分和数列 $\{S_n\}$ 有界, 即存在某正数 $M$ , 对一切正整数 $n$ 有 $S_n < M$ .

**证** 由于 $u_i > 0$  ( $i=1, 2, \dots$ ), 所以 $\{S_n\}$ 是递增数列. 而单调数列收敛的充要条件是该数列有界(单调有界定理(定理 2.9)). 这就证明了本定理的结论.  $\square$

**定理 12.6**(比较原则) 设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 是两个正项级数, 如果存在某正数 $N$ , 对一切 $n > N$ 都有

$$u_n \leq v_n, \quad (1)$$

则

(i) 若级数 $\sum v_n$ 收敛, 则级数 $\sum u_n$ 也收敛;

(ii) 若级数 $\sum u_n$ 发散, 则级数 $\sum v_n$ 也发散.

**证** 因为改变级数的有限项并不影响原有级数的敛散性, 因此不妨设不等式(1)对一切正整数都成立.

现分别以 $S'_n$ 和 $S''_n$ 记级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 的部分和. 由(1)式推得, 对一切正整数 $n$ , 都有

$$S'_n \leq S''_n. \quad (2)$$

若 $\sum v_n$ 收敛, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S''_n$ 存在, 则由(2)式对一切 $n$ 有 $S'_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S''_n$ , 即正项级数 $\sum u_n$ 的部分和数列 $\{S'_n\}$ 有界, 由定理 12.5 级数 $\sum u_n$ 收敛. 这就证明了(i); (ii)为(i)的逆否命题, 自然成立.  $\square$

**例 1** 考察 $\sum \frac{1}{n^2 - n + 1}$ 的收敛性.

**解** 由于当 $n \geq 2$ 时, 有

$$\frac{1}{n^2 - n + 1} \leq \frac{1}{n^2 - n} = \frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{1}{(n-1)^2}.$$

因为正项级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$ 收敛(§ 1 例 5), 故由定理 12.6, 级数 $\sum \frac{1}{n^2 - n + 1}$ 也收敛.  $\square$

在实际使用上, 比较原则的下述极限形式有时更为方便.

**推论** 设

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (3)$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (4)$$

是两个正项级数, 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l, \quad (5)$$

则

- (i) 当  $0 < l < +\infty$  时, 级数(3)、(4)同时收敛或同时发散;
- (ii) 当  $l=0$  且级数(4)收敛时, 级数(3)也收敛;
- (iii) 当  $l=+\infty$  且级数(4)发散时, 级数(3)也发散.

**证** 对于(i), 当  $0 < l < +\infty$  时, 对任意正数  $\varepsilon$  ( $\varepsilon < l$ ), 存在某正数  $N$ , 当  $n > N$  时, 恒有

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \varepsilon$$

或

$$(l - \varepsilon)v_n < u_n < (l + \varepsilon)v_n. \quad (6)$$

由定理 12.6 及(6)式可得级数(3)和(4)具有相同的敛散性.

对于(ii), 当  $l=0$  时, 由(6)式右半部分及比较原则可得: 若级数(4)收敛, 则级数(3)也收敛.

对于(iii), 若  $l=+\infty$ , 即对任给的正数  $M$ , 存在相应的正数  $N$ , 当  $n > N$  时, 都有

$$\frac{u_n}{v_n} > M$$

或

$$u_n > Mv_n.$$

于是由比较原则知道, 若级数(4)发散, 则级数(3)也发散. □

### 例 2 级数

$$\sum \frac{1}{2^n - n}$$

是收敛的.

因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n - n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^n - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{n}{2^n}} = 1$$

以及等比级数  $\sum \frac{1}{2^n}$  收敛, 所以根据推论, 级数  $\sum \frac{1}{2^n - n}$  也收敛. □

### 例 3 级数

$$\sum \sin \frac{1}{n} = \sin 1 + \sin \frac{1}{2} + \cdots + \sin \frac{1}{n} + \cdots$$



是发散的.

$$\text{因为} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

根据推论以及调和级数  $\sum \frac{1}{n}$  发散, 所以级数  $\sum \sin \frac{1}{n}$  也发散.  $\square$

## 二 比式判别法和根式判别法

根据比较原则, 可以利用已知收敛或者发散级数作为比较对象来判别其他级数的敛散性. 本段所介绍的两个方法是以等比级数作为比较对象而得到的.

**定理 12.7** (达朗贝尔判别法, 或称比式判别法) 设  $\sum u_n$  为正项级数, 且存在某正整数  $N_0$  及常数  $q$  ( $0 < q < 1$ ).

(i) 若对一切  $n > N_0$ , 成立不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q, \quad (7)$$

则级数  $\sum u_n$  收敛.

(ii) 若对一切  $n > N_0$ , 成立不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \quad (8)$$

则级数  $\sum u_n$  发散.

**证** (i) 不妨设不等式(7)对一切  $n \geq 1$  成立, 于是有

$$\frac{u_2}{u_1} \leq q, \quad \frac{u_3}{u_2} \leq q, \quad \dots, \quad \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq q, \quad \dots$$

把前  $n-1$  个不等式的左边及右边分别相乘后, 得到

$$\frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{u_3}{u_2} \cdot \dots \cdot \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq q^{n-1}$$

或者

$$u_n \leq u_1 q^{n-1}.$$

由于当  $0 < q < 1$  时, 等比级数  $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$  收敛, 根据比较原则可推知级数  $\sum u_n$  收敛.

(ii) 由于  $n > N_0$  时成立不等式(8), 即有

$$u_{n+1} \geq u_n \geq u_{N_0}.$$

于是当  $n \rightarrow \infty$  时,  $u_n$  的极限不可能为零. 由定理 12.1 推论知级数  $\sum u_n$  是发散的.  $\square$

**推论 1** (比式判别法的极限形式) 若  $\sum u_n$  为正项级数, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q, \quad (9)$$