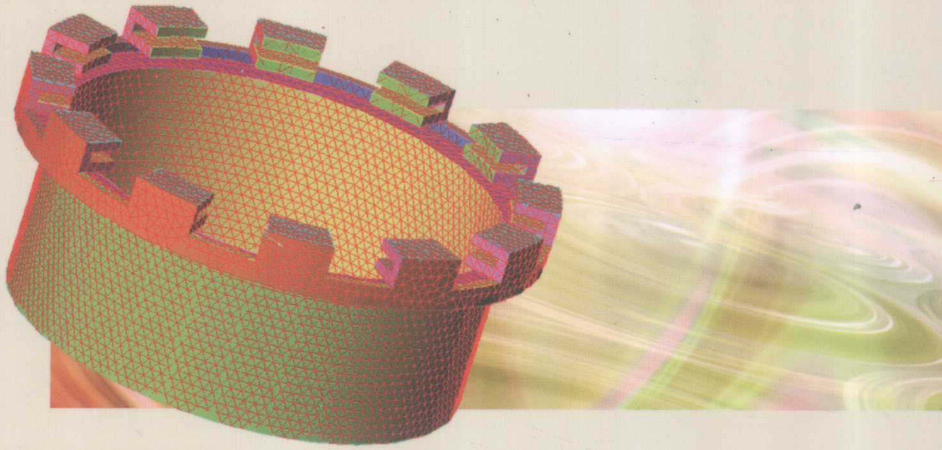
应用有限元分析

梁醒培　王辉　编著



APPLIED FINITE ELEMENT ANALYSIS

清华大学出版社

APPLIED FINITE ELEMENT ANALYSIS

应用有限元分析

梁醒培　王辉　编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书系统地介绍了有限元法的基本理论、特点及编程应用，共分 11 章，内容涉及平面弹性问题，轴对称问题，空间弹性问题，梁、板、壳、温度场问题，热应力、动力问题、非线性问题等的有限元分析；此外，也简单介绍了有限元法的模块化程序（MATLAB）实现过程和商业有限元软件 ABAQUS 的基本操作过程，以便读者在学习完有限元理论部分后能够独立编程或用商业有限元软件分析求解更复杂的工程问题。

本书可供土木、水利、机械、力学、物理等领域的科学技术人员以及相关专业的本科生、研究生和教师参考使用。

图书在版编目（CIP）数据

应用有限元分析/梁醒培，王辉编著．--北京：清华大学出版社，2010.6
ISBN 978-7-302-21830-2

Ⅰ.①应…　Ⅱ.①梁…②王…　Ⅲ.①有限元分析　Ⅳ.①O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 002669 号

责任编辑：石　磊　李　嫚
责任校对：赵丽敏
责任印制：孟凡玉

出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京国马印刷厂
经　销：全国新华书店
开　本：185×230　　**印　张**：16.5　　**字　数**：360 千字
版　次：2010 年 6 月第 1 版　　**印　次**：2010 年 6 月第 1 次印刷
印　数：1～3000
定　价：29.00 元

产品编号：029729-01

前言
Foreword

对于大量的实际工程问题，其数学模型的控制方程、几何形状和边界条件相对复杂，很难找到显式的解析解答。现代计算机技术和数值计算理论的快速发展使得获得复杂工程问题的近似解答成为可能。由于理论基础完备、适应性、灵活性好，有限元法在求解复杂问题方面具有很大的优势。经过几十年的快速发展，有限元法已经成为工程数值计算方面强有力的分析工具，在传热、传质、结构数值计算领域逐渐占据了主导地位。目前，有限元法已经成为工程设计和科研领域不可或缺的一项重要技术和分析手段。

本书作者长期从事结构有限元分析的理论研究、软件开发和工程应用工作，主持开发了有限元分析程序系统和结构优化设计程序系统，特别是20世纪80年代初，作者有幸与赵兴华教授一起从事ADINA程序的引进、消化和推广工作，所负责的课题组编写、编译了一套有限元学习班讲义。在之后的近10年时间内，曾在全国举办过不少有限元法学习班，对如何学习、应用以及推广这门知识和技术有切身体会和较丰富的经验，当时就曾想出版一本有限元法的书，由于多种原因未能付诸实施。到了2004年，为工程力学、土木工程和机械设计专业的研究生讲授有限元课程，又萌生了这一念头，于是，边写边讲草就了一份有限元法讲义，经过5届学生使用，效果良好，经修订写成了本书。

本书在内容的选取、结构和形式的安排、叙述的方式等方面都融入了作者的经验和体会，有很强的实用性和针对性，力求以尽量简单的方式阐明有限元法的基本原理，同时也要保证内容的完整和实用性。为此，本书也努力结合功能强大、易学的MATLAB编程工具，运用模块化的编程思想，编写了实用的有限元程序，方便读者自行扩展。

本书系统地阐述了有限元法的基本理论、特点及编程应用，内容包括平面弹性问题，轴对称弹性问题，空间弹性问题，梁、板、壳、温度场和热应力问题，动力学问题，非线性问题等的有限元分析。此外，也简单介绍了有限元的模块化程序(MATLAB)实现过程和商业有限元软件ABAQUS的基本操作过程，以便读者在学习完有限元理论部分后能够独立编程或用商业有限元软件分析求解更复杂的工程问题。

本书第3,5,10,11章及附录由王辉完成,其余由梁醒培完成。

在本书即将付印之际,非常感谢周丰峻院士对本书写作的支持以及对作者的鼓励和指导。

感谢清华大学出版社的石磊编辑、李嫚编辑对本书写作的支持与帮助。

在本书写作过程中,参考了许多文献资料,在此向有关作者一并表示感谢。另外,有限元法发展迅速,成果丰富,相比之下本书所含内容有限,作者向没有反映其成果的所有作者表示歉意。

限于作者的学术和知识水平,书中难免会有不足和不当之处,敬请读者和同行专家多提宝贵意见。

梁醒培

2009年4月

目 录
Foreword

第1章 Chapter

绪 论

有限元法作为一种求解偏微分方程的数值计算方法，具有通用性和实用性强、易于推广应用的优点，所以，自它问世以来，在其理论和应用研究方面都得到了快速和持续不断的发展。目前，有限元法已经成为工程设计和科研领域的一项重要分析技术和手段。

1.1 有限元法的发展简况

有限元法基本思想的提出可以追溯到1943年Courant的工作，他第一次应用定义在三角形区域上的分片连续函数和最小位能原理，求出了St. Venant扭转问题的近似解。随后，一些应用数学家、物理学家和工程师也都涉足过有限元法的研究。现代有限元法的第一个成功尝试，是Tumer、Clough[1]等人于1960年分析飞机结构时得到的，他们第一次用三角形单元求得了平面应力问题的解答。1960年Clough[2]第一次提出了“有限单元法”的名称。后来的研究奠定了有限元法的理论基础，并且证明基于多种变分原理都可以建立有限元的求解方程。1960年以后，随着计算机技术的发展和广泛应用，有限元法得到了迅速发展，其中包括各种非线性问题、多物理场耦合问题、多尺度问题等。由于有限元法的功能和潜力所在，在20世纪70年代，国外就研制开发了商品化的有限元软件。

与此同时，有限元法从固体力学也扩展到了流体力学、传热学、电磁学等领域，目前市场上流行的许多有限元软件，除了力学分析功能外，还具有流体力学、传热学、电磁学计算功能，以及基于有限元法的结构优化功能。

早期的有限元法基本上是一种纯粹的数值计算技术，计算过程复杂，数据准备工作量大，计算结果不直观、不易分析整理。为了简化数据准备工作，有限元网格剖分技术一直备受人们关注，在有限元技术发展的同时，也就出现了多种参数化网格剖分方法和80年代前后的所谓数据自动生成技术。这种参数化网格剖分方法和数据自动生成技术，虽然给使用有限元软件带来了很大的方便，但是，有限元计算的数据准备工作仍然费时费力。有限元法前、后处理技术的发展促进了其推广应用，所以，纵观有限元技术近年来的发展历程，最为显著的特点之一就是前、后处理技术的高度智能化和与CAD的集成化[4]。这是因为，①计算机和图形技术的发展为前、后处理技术的发展提供了可能性；②要推广有限元技术就必须

提高它的智能化和集成化程度，简化使用过程。

最早引进并在国内推广的有限元软件是 SAP(1979 年)和 ADINA(1980 年)[3]，目前国内市场上流行的商品化有限元软件很多，如 ANSYS，ABAQUS 等，这些软件可谓功能齐全，又各有特点，可以用来解决一般性的通用问题，但是，对于某些具有探索性的，或特殊性的问题，还是显得功能欠缺，或者处理起来非常费力。所以，根据特殊需要研究、开发具有某种特殊功能的专用软件仍然是必要的。

从人才和技术角度讲，我国在有限元法方面的资源是十分丰厚的，并开发出了许多通用与专用有限元软件，但是，至今未有能在市场上与国外同类软件抗衡的软件，这是非常遗憾的。有限元软件的开发不仅需要有限元的理论基础，还需要计算数学、图形学、计算机技术等综合知识。综合各方面的资源，培育和开发国产的有限元软件，无论从技术或市场角度都是十分必要的。

经过半个世纪的发展，有限元法已经相当成熟，作为一种通用的数值计算方法，已经渗透到许多科研和工程应用领域。基于其良好的理论基础、通用性和实用性，可以预计，随着现代力学、计算数学、计算机技术、CAD 技术等的发展，有限元法必将得到进一步的发展和完善，并在国民经济建设和科学技术领域发挥更大的作用。

1.2 有限元法的基本思路及其求解步骤

经典的解析法是从连续体的微分方程入手，寻求满足微分方程和定解条件的适合全域的解析解，一旦得到解析解，就可知道域内任意点的解。但是，对于大多数问题，特别是实际问题，很难甚至无法用解析法得到解析解，其主要原因是要寻找在整个求解域上满足控制方程、在边界上满足边界条件的场函数往往是很困难的。比如，要对图 1-1 所示的焊接接头进行应力分析，就很难用解析法得到问题的解析解，而用有限元法就可以很方便地完成其应力分析，因为有限元法抛弃寻找一个满足整个求解域的场函数的思路，把求解域划分为有限个四边形，每个四边形被称为一个单元，单元的角点就是节点；对每一个单元通过插值方法，用其节点上的位移建立该单元的位移函数；每个单元都有与其对应的位移函数表达式，这样，就可以用全部单元域之和代替整个求解域，并用全部单元的位移函数之和代替满足整个求解域的位移函数。然后，通过对单元进行力学特性分析，建立单元节点力与单元节点位移的关系，并将结构的外载荷等效移植到节点上，再在节点上建立力的平衡方程，解之即可得到节点上的位移，有了节点位移就可求得各个单元的应力。这就是先以节点位移为未知量，再通过求解力的平衡方程获得节点位移，然后再按单元计算应力。

需要指出的是，有限元法的单元力学特性分析、外载荷向节点的等效移植、节点力的平衡方程建立及其求解，以及单元应力的计算都有统一的标准化格式，易于计算机编程和程序实现。

从上述过程可以看到，有限元法和经典里茨法(Ritz)的主要区别是，里茨法是在整个求

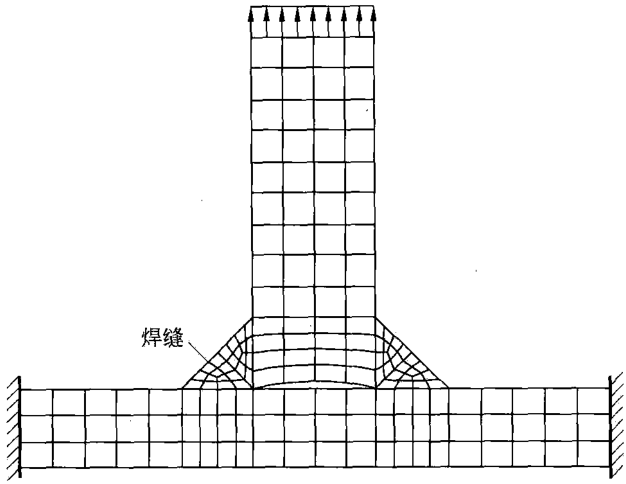


图 1-1

解域上建立近似函数,而有限元法是在单元域上建立近似函数(单元位移函数),而且建立单元位移函数时不需要考虑边界条件,另外用一个个单元可以比较容易地逼近复杂的几何边界,所以有限元法可以处理复杂的连续介质问题。

其实,有限元法是基于变分原理的里茨法的另一种形式,1963—1964 年,Besseling 等人[1,2],对此给予了证明。对于已经知道微分方程和边界条件,但是变分泛函尚未找到或者根本不存在的问题,采用伽辽金(Galerkin)法同样可以建立有限元求解方程。关于有限元法的理论基础可参考有关文献[5～13]。

以节点位移为未知量的有限元法称为位移有限元法,这是当前应用最广泛的方法。位移有限元法的求解过程可以概括如下。

1. 离散化

进行有限元分析的第一步是离散化,离散化就是将结构(求解域)划分为有限个单元,让全部单元的集合与原结构近似等价。所以,在划分单元时,二者在几何形体上越逼近越好,特别是在位移和应力急剧变化的地方。比如,齿轮齿根处的应力对齿根处的圆弧形状就非常敏感,圆弧形状的稍微改变就可能引起应力较大的变化,所以,此处的单元形状要尽可能地与实际情况逼近,而且单元网格应该适当加密。

2. 选择单元位移函数

在有限元法中,需要用单元节点位移通过插值方法建立单元位移函数(也称为单元位移模式),即用单元节点位移来描述单元位移。单元位移函数应该满足一定的要求,其合理与否,直接关系到有限元分析的计算精度、效率和收敛性,所以,单元位移函数的选择是至关重要的。所谓建立一种新单元,其核心内容就是单元位移函数。一般而言,单元位移函数多取

为多项式形式。

3. 单元特性分析

在单元位移函数确定之后，就可以进行单元特性分析，这个过程一般是指：

(1) 依照应变与位移之间的几何关系，根据所选择的单元位移函数，建立单元应变与单元节点位移之间的关系式。据此式，在求出节点位移后，可以求得单元应变。

(2) 依照物理关系，即胡克(Hooke)定律，建立单元应力与单元节点位移之间的关系式。据此式，在求出节点位移后，可以求得单元应力。

(3) 根据虚位移原理或最小势能原理，建立单元刚度方程，即建立单元节点力与单元节点位移之间的关系式，此步核心是计算单元刚度矩阵。

4. 外载荷处理

把结构离散为有限个单元，并经过单元特性分析以后，将各个单元联系在一起的是节点，此时所关心的焦点将集中在节点上，因此需要将外载荷(体力、面力等)等效移植到节点上。

5. 建立节点上的力平衡方程

按照有限元法的统一格式，形成如下形式的以节点位移为未知量的代数方程组

$$[K]\{\delta\} = \{F\} \tag{1.1}$$

其中，$[K]$为由各个单元的刚度矩阵组装成的总体刚度矩阵，$\{\delta\}$为待求的节点位移列阵，$\{F\}$为按节点编号顺序形成的节点载荷列阵。

说明：*本书用白体字符加“[]”表示矩阵，加“{}”表示列阵。*

6. 处理边界条件、解算节点位移

式(1.1)表示的是在节点上的力的平衡方程，但是，它还未满足位移边界条件，按照实际位移边界条件，对式(1.1)进行整理以后，解之，可得单元节点位移。

有了节点位移，就可根据单元特性分析中建立的关系式，求应力、应变、内力等，还可借助后处理功能，从计算结果中挑选所需的应力、应变等，也可以以彩色云图或图表的形式显示计算结果。

1.3 有限元程序的结构简介

对一个题目或一个实际工程问题进行有限元分析，大体上分为三个主要步骤或阶段，即有限元建模、有限元求解、计算结果分析与整理。与之相对应，从程序结构上讲，有限元程序也分为三大部分，即前处理、求解器和后处理，见图 1-2。

前处理主要完成几何模型的建立、确定材料参数和载荷、定义约束条件、网格剖分等，最后按一定格式形成有限元分析所需要的有限元计算数据。前处理完成的工作一般称为有限元建模。在前处理中，可以用图形显示所建立的几何模型、单元网格、约束条件等，以便用可

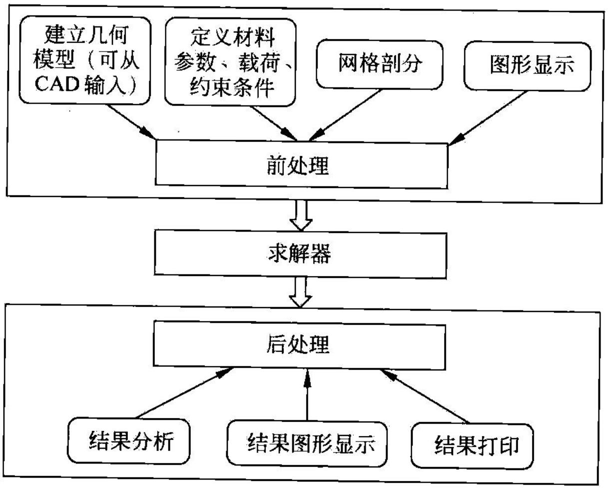


图　1-2

视化的方法检查所建立的有限元模型。

几何模型可以在前处理中直接建立，这是传统的建模方法，也可以把 CAD 系统中建成的模型转换到前处理中，这是近年来出现的建模方法。

求解器是有限元程序的核心部分，它主要完成有限元模型的力学计算，即根据前处理形成的有限元计算数据，计算单元刚度矩阵，计算节点载荷，组装总体刚度矩阵，将载荷等效简化到节点上，形成总体有限元平衡方程，求解节点位移，计算应力、应变、内力等。

后处理可以根据计算者的要求对计算结果进行检查、分析、整理、打印输出等。求解器求得的计算结果都是以数据形式给出的，而且数据量非常大，以人工方式从庞大的数据中找出关键数据、分析位移、应力等的变化规律等是一件令人厌烦的、不容易做的工作。采用后处理可以进行数据检索、响应量合成、绘制变形图、绘制应力图、绘制曲线图等，这样不但可以快速简便地进行数据整理，还可以以可视化的方式分析、观察计算结果。

进行有限元求解时，求解器要做的工作是由计算机完成的，所以，对于计算者来讲，进行有限元分析的工作量主要体现在前、后处理方面，因此，前处理和后处理功能的发展和提高给有限元分析带来了很大方便，使完成有限元分析的时间大为缩短。

参考文献

[1]　Turner M J, Clough R W, Martin H C, Topp L C. Stiffness and deflection analysis of complex structures [J]. J. Areo. Sci. ,1956,23: 805-823

[2]　Clough R W. The finite element method in plane stress analysis. Proc. 2nd ASME Conference on economic computation, Pittsburgh, Pa. ,Sept,1960

[3] 赵兴华，徐福娣，梁醒培. ADINA 程序述评[J]. 机械强度，1982(4)：1-4
[4] 梁醒培，李鸿宝，王锡山，吴蕙等. 国家"九五"重点科技攻关计划专题《机械 CAE 系统产业化开发》项目验收技术报告. 郑州机械研究所，2000
[5] 王勖成，邵敏. 有限单元法基本原理和数值方法 [M]. 北京：清华大学出版社，1999
[6] 监凯维奇 O C. 有限元法 [M]. 北京：科学出版社，1985
[7] 赵经文，王宏钰. 结构有限元分析 [M]. 北京：科学出版社，2001
[8] 谢贻权，何福宝. 弹性和塑性力学中的有限元法[M]. 北京：机械工业出版社，1981
[9] Melosh R J. Basis for the derivation of matrices for direct stifness method [J]. AIAAJ.，1963，1：1631-1637
[10] Jones R E. Ageneralization of the direct stiffness method of structure analysis [J]. AIAAJ.，1964，2：821-826
[11] Cook R D，Malkus D S，Plesha M E，et al.. 有限元分析的概念与应用(第四版) [M]. 关正西，强洪夫译. 西安：西安交通大学出版社，2007
[12] Chamdrupatla T R，Belegundu A D. 工程中的有限元方法(第三版)[M]. 曾攀译. 北京：清华大学出版社，2006
[13] Bathe K J. 工程分析中的有限元法[M]. 付子智译. 北京：机械工业出版社，1991