

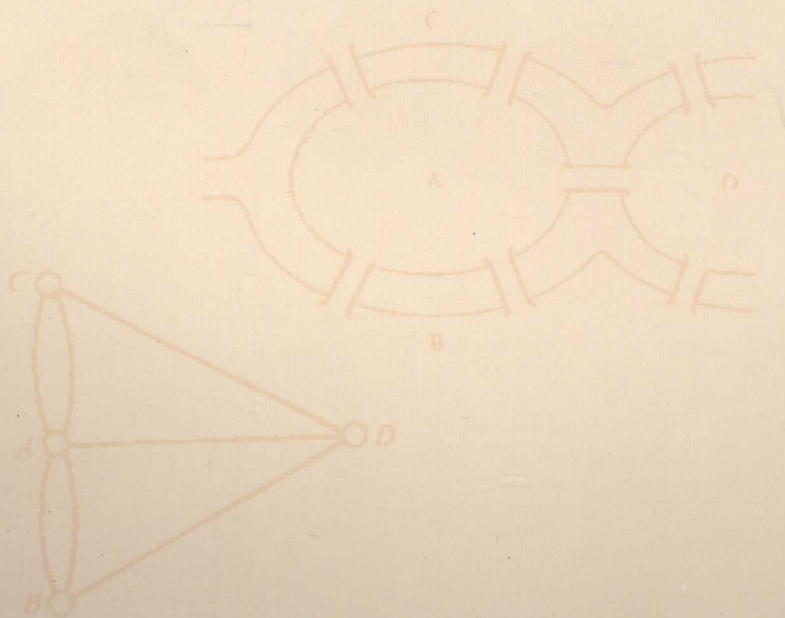
教育部研究生工作办公室推荐研究生教学用书
“十一五”国家重点图书

中国科学技术大学 *精品* 教材

图论及其应用

第3版

徐俊明 编著



中国科学技术大学出版社

0157.5

21=3

0157.5
21=3

中国科学技术大学 精品 教材

图论及其应用

TULUN JIQI YINGYONG

第3版

徐俊明 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书着眼于有向图, 将无向图作为特例, 在一定的深度和广度上系统地阐述了图论的基本概念、理论和方法以及基本应用. 全书内容共分 7 章, 包括 Euler 回与 Hamilton 圈, 树与图空间, 平面图, 网络流与连通度, 匹配与独立集, 染色理论, 图与群以及图在矩阵论、组合数学、组合优化、运筹学、线性规划、电子学以及通讯和计算机科学等多方面的应用. 每章分为理论和应用两部分, 章末有小结和参考文献. 各章内容之间联系紧密, 许多著名的定理给出最新最简单的多种证明. 每小节末都有大量习题, 书末附有记号和名词索引.

本书既可作为高校数学系、应用数学系、计算机科学系、电子学系、自动化系、管理科学系和相关的研究所的研究生和高年级本科生选修课教材, 也可用作高校和研究所从事相关专业的教师 and 研究人员以及图论工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

图论及其应用/徐俊明编著. — 3版. — 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2010.3
(中国科学技术大学精品教材)

“十一五”国家重点图书

教育部研究生工作办公室推荐研究生教学用书

ISBN 978-7-312-02248-7

I. 图… II. 徐… III. 图论 — 高等学校 — 教材 IV. O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 140425 号

中国科学技术大学出版社出版发行

安徽省合肥市金寨路 96 号, 230026

网址 <http://press.ustc.edu.cn>

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

开本: 710 × 960 1/16 印张: 21 插页: 2 字数: 400 千

1998 年 1 月第 1 版 2010 年 3 月第 3 版

2010 年 3 月第 6 次印刷

印数: 10001—12000 册

定价: 33.00 元

总序

2008 年是中国科学技术大学建校五十周年. 为了反映五十年来办学理念 and 特色, 集中展示学校教材建设的成果, 学校决定组织编写出版代表学校教学水平的精品教材系列. 在各方的共同努力下, 共组织选题 281 种, 经过多轮、严格的评审, 最后确定 50 种入选精品教材系列.

1958 年学校成立之时,教员大部分都来自中国科学院的各个研究所.作为各个研究所的科研人员,他们到学校后保持了教学的同时又作研究的传统.同时,根据“全院办校,所系结合”的原则,科学院各个研究所在科研第一线工作的杰出科学家也参与学校的教学,为本科生授课,将最新的科研成果融入到教学中.五十年来,外界环境和内在条件都发生了很大变化,但学校以教学为主、教学与科研相结合的方针没有变.正因为坚持了科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合的方针,并形成了优良的传统,才培养出了一批又一批高质量的人才.

学校非常重视基础课教学和专业基础课教学的传统,也是她特别成功的原因之一。当今社会,科技发展突飞猛进、科技成果日新月异,没有扎实的基础知识,很难在科学技术研究中作出重大贡献。建校之初,华罗庚、吴有训、严济慈等老一辈科学家、教育家就身体力行,亲自为本科生讲授基础课。他们以渊博的学识、精湛的讲课艺术、高尚的师德,带出一批又一批杰出的年轻教员,培养了一届又一届优秀学生。这次入选校庆精品教材的绝大部分是本科生基础课或专业基础课的教材,其作者大多直接或间接受到过这些老一辈科学家、教育家的教诲和影响,因此在教材中也贯穿着这些先辈的教育教学理念与科学探索精神。

改革开放之初,学校最先选派青年骨干教师赴西方国家交流、学习,他们在带回先进科学技术的同时,也把西方先进的教育理念、教学方法、教学内容等带回到中国科学技术大学,并以极大的热情进行教学实践,“科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合”的方针得到进一步深化,取得了非常好的效果,培养的学生得到全社会的认可。这些教学改革影响深远,直到今天仍然受到学生的欢迎,并辐射到其他高校。在入选的精品教材中,这种理念与尝试也都有充分的体现。

中国科学技术大学自建校以来就形成的又一传统是根据学生的特点,用创新的精神编写教材。五十年来,进入我校学习的都是基础扎实、学业优秀、求知欲强、勇于探索和追求的学生,针对他们的具体情况编写教材,才能更加有利于培养他们的创新精神。教师们坚持教学与科研的结合,根据自己的科研体会,借鉴目前国外相关专业有关课程的经验,注意理论与实际应用的结合,基础知识与最新发展的结合,课堂教学与课外实践的結合,精心组织材料、认真编写教材,使学生在掌握扎实的理论基础的同时,了解最新的研究方法,掌握实际应用的技术。

这次入选的 50 种精品教材,既是教学一线教师长期教学积累的成果,也是学校五十年教学传统的体现,反映了中国科学技术大学的教学理念、教学特色和教学改革成果.该系列精品教材的出版,既是向学校 50 周年校庆的献礼,也是对那些在学校发展历史中留下宝贵财富的老一代科学家、教育家的最好纪念.

侯建國

2008 年 8 月

第 3 版前言

我十分欣喜地获悉《图论及其应用》一书被选为中国科学技术大学校庆五十周年精品教材。这是各级领导、同行专家学者和广大读者对本书的厚爱,也是对我的鼓励和鞭策。借此机会,我向他们表示真诚的谢意。中国科学技术大学出版社对本书的出版极为重视,付出了大量的人力和物力,在本书的修订过程中又给予了大力的支持和具体的帮助,我向他们表示感谢。

我们也很高兴的看到,在过去的十几年里,图的理论和应用发展很快,图论的重要性越来越突现。国内许多高等院校已将图论列为信息科学和应用数学专业的本科生必修课程。尤为可喜的是,国内图论研究队伍中年轻学者越来越多,研究水平越来越高。做为长期从事图论研究的工作者来说,编写一本适合国内高年级本科生和低年级研究生图论教材是自己义不容辞的责任。

借此书再版的机会,在保持原有特色和基本结构框架的原则下,在第 2 版的基础上对该书进行了小规模修订。具体修改的内容如下:

1. 进一步规范图论术语和记号。强调图是一个数学概念,“所谓图是指一个集并具有二元关系的数学结构”,强调几何图形,邻接矩阵和关联矩阵,图的群只是图的三种表示,其目的是利用不同的数学工具,从不同的角度进一步揭示图的结构性质和它的数学本质。强调图论是数学的重要分支,是本科生和研究生加强数学修养和训练的必要组成部分。

2. 适当增加一些内容。如,第 1 章添加“直径”一节;在染色理论一章添加“整数流与面染色”理论。增加介绍构图方法,如线图方法和笛卡尔乘积方法,介绍了线图和笛卡尔乘积图的性质。调整和增减了部分习题,添加了一些新的研究成果和参考文献。改写每章后面的“小结”为“小结与进一步阅读的建议”,使其更加有指导性和可读性。

3. 删去某些至今没有什么研究进展,只用到图论术语,没有更多理论的简单应用,如:收款台的设置问题,排课表问题和储藏问题。

第 2 版前言

我十分欣喜地获悉《图论及其应用》一书被国务院学位委员会审定批准为教育部研究生工作办公室推荐的研究生教学用书. 这是各级领导、同行专家学者和广大读者对我的鼓励和鞭策. 借此机会, 我向他们表示真诚的谢意.

中国科学技术大学出版社极为重视该书的出版, 组织了大量的人力和物力对该书进行重新排版和绘图. 我借重新排版的机会, 对原版进行了小规模修订. 修订本基本上保持了原版本的原貌, 修正了一些勘误, 改写了定理 4.2 和定理 4.3 的证明, 使其更为简洁. 采纳了部分读者的意见, 对个别图论记号进行了改进. 例如, 群 Γ 关于集 S 的 Cayley 图 $D_S(\Gamma)$ 改为 $C_\Gamma(S)$. 由于版面的需要, 第 2 版删去了原版中少量较容易或者较难的习题. 第 2 版增加了部分最新的参考文献, 供读者进一步阅读时参考.

徐俊明

2003 年 1 月 17 日

中国科学技术大学

第 1 版前言

图论(Graph Theory)的产生和发展历经了二百多年的历史,大体上可以划分为三个阶段.

第一阶段是从1736年到19世纪中叶.这时的图论处于萌芽阶段,多数问题是围绕着游戏产生的,最有代表性的工作是著名的瑞士数学家L. Euler于1736年的Königsberg七桥问题.他的那篇论文被公认为图论历史上第1篇论文.

第二阶段从19世纪中叶到1936年.这个时期中图论问题大量出现,如四色问题(1852年)和Hamilton问题(1856年).同时出现了以图为工具去解决其它领域中一些问题的成果.最有代表性的工作是Kirchhoff(1847年)和Cayley(1857年)分别用树的概念去研究电网络方程组问题和有机化合物的分子结构问题.“图”(Graph)这个词第一次出现是在1878年的英国《自然》杂志中.进入本世纪30年代,出现了一大批精彩的新理论和结果,如Menger定理(1927年),Kuratowski定理(1930年)和Ramsey定理(1930年)等等.这些理论和结果为图论的发展奠定了基础.1936年,匈牙利数学家D. König写出了第一本图论专著《有限图与无限图的理论》.图论作为数学的一个新分支已基本形成.

1936年以后是第三阶段.由于生产管理、军事、交通运输、计算机和通讯网络等方面许多离散性问题的出现,大大促进了图论的发展.进入70年代以后,特别是大型电子计算机的出现,使大规模问题的求解成为可能.图的理论及其在物理化学、运筹学、计算机科学、电子学、信息通讯、社会科学及经济管理等几乎所有学科领域中各方面应用的研究都得到“爆炸性发展”.主要有以下三个原因:

1. 图论提供了一个自然的结构,由此而产生的数学模型几乎适合于所有科学(自然科学和社会科学)领域,只要这个领域研究的主题是“对象”和“对象”之间的关系.

2. 图论已形成自己丰富的词汇语言,它能简洁地表示出各个领域“对象—关系”结构复杂而又难懂的概念.图论思想和方法越来越被许多科学领域所接受,

仅需要对概念和定理的深刻理解,而且还需要智慧和技巧,不做习题是很难学会和掌握图论的思想和方法的.即使不能全做,阅读一下这些结论也是很有用处的.较难的习题用黑体标出.

阅读本书只需要具备集合论和线性代数的基本知识. 对于研究生和高年级本科生来讲, 这些知识都已具备.

根据编者以往的经验,作为数学系一学期的课程,每周四学时可以讲完本书的全部内容.作为非数学系的选修课程,每周三学时可以讲完前六章第一部分(部分定理的证明及2.4节,3.3节,6.3和6.4节可以不讲)及部分应用内容(视其选修对象而定),也可以安排一些自习内容.

编者衷心感谢上海交通大学应用数学系李乔教授和中国科技大学数学系李炯生教授对编者的指导和帮助及对编写本书的始终不渝的鼓励和支持。真诚感谢中国科学院系统科学研究所田丰教授和北方交通大学数学系刘彦佩教授对编者的关心和指导。非常感谢中国科学技术大学出版社、教务处和数学系对本书出版的支持。编者感谢中国科学技术大学历届选修此课程的同学们对学习这门课程表现出的极大热忱和对讲义提出的宝贵意见。

衷心希望同行专家、各位师友和读者批评指教。

徐俊明

1997年4月1日

中国科学技术大学

目次

总序	i
第3版前言	iii
第2版前言	v
第1版前言	vii
第1章 图的基本概念	1
1.1 图与图的图形表示	1
1.2 图的同构	7
1.3 图的顶点度和运算	14
1.4 路与连通	21
1.5 回与圈	26
1.6 Euler 图	32
1.7 Hamilton图	38
1.8 距离与直径	45
1.9 图的矩阵表示	53
应用	60
1.10 本原方阵的本原指数	60
小结与进一步阅读的建议	70

第5章 匹配与独立集	192
5.1 匹配	192
5.2 独立集	207
应用	212
5.3 人员安排问题	212
5.4 最优安排问题	219
5.5 货郎担问题	228
小结与进一步阅读的建议	234
第6章 染色理论	236
6.1 点染色	237
6.2 边染色	244
应用	251
6.3 面染色与整数流	251
6.4 地图染色和四色猜想	256
小结与进一步阅读的建议	261
第7章 图与群	263
7.1 图的群表示	264
7.2 可迁图	269
7.3 群的图表示	277
应用	284
7.4 超级计算机系统互连网络的设计	284
小结与进一步阅读的建议	294
图论常用记号	296
参考文献	298
索引	313

第 1 章 图的基本概念

在自然界和人类社会的实际生活中, 用图形来描述某些对象(或事物)之间具有某种特定关系常常感到特别方便. 例如用工艺流程图来描述某项工程中各工序之间的先后关系, 用竞赛图来描述某循环比赛中各选手之间的胜负关系, 用网络图来描述某通讯系统中各通讯站之间信息传递关系, 用交通图来描述某地区内各城市之间的铁路连接关系, 用原理电路图来描述某电器内各元件导线连接关系, 等等. 图形中的点表示对象(如上例中的工序、选手、通讯站等), 两点之间的有向或无向连线表示两对象之间具有某种特定的关系(如上例中的先后关系、胜负关系、传递关系、连接关系等). 事实上, 任何一个包含了某种二元关系的系统都可以用图形来模拟. 由于人们感兴趣的是两对象之间是否有某种特定关系, 所以图形中两点间连接与否甚为重要, 而连接线的曲直长短则无关重要. 由此数学抽象产生了图的概念. 研究图的基本概念和性质、图的理论及其应用构成了图论的主要内容.

本章介绍图的基本概念、术语、记号和若干初等结果, 它是本书的基础. 然后介绍图在矩阵论中的应用.

提请读者注意的是, 大多数图论学者在他们的著作, 论文和演讲中都习惯使用自己的一套术语和记号. 甚至“图”这个词的意义也是不统一的. 为了在有关图论的讨论中避免歧义, 每个人都得预先说明清楚他所使用的图论语言. 本书将采用大多数学者所采用的术语和记号, 书末附有索引.

1.1 图与图的图形表示

设 V 是非空集. V 上的一个二元关系 e 是 V 上的元素对, 即 $e \in V \times V$. 集 V 和

定义在 V 上的二元关系集 R 的有序二元组 (V, R) 称为**数学结构**.

所谓图 (graph) 是指一个数学结构 (V, E, ψ) , 其中 V 是非空集, E 是定义在 V 上 (可以重复) 的二元关系集, 而 ψ 是 E 到 $V \times V$ 的函数, $\psi(E)$ 可以是重集. 若 $\psi(E)$ 中元素全是有序对, 则 (V, E, ψ) 称为有向图 (digraph), 记为 $D = (V(D), E(D), \psi_D)$. 若 $\psi(E)$ 中元素全是无序对, 则 (V, E, ψ) 称为无向图 (undirected graph), 记为 $G = (V(G), E(G), \psi_G)$.

例 1.1.1 $D = (V(D), E(D), \psi_D)$ 是有向图, 其中

$$\begin{aligned} V(D) &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \\ E(D) &= \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9\}, \end{aligned}$$

而 ψ_D 定义为

$$\begin{aligned}\psi_D(a_1) &= (x_1, x_2), \quad \psi_D(a_2) = (x_3, x_2), \quad \psi_D(a_3) = (x_3, x_3), \\ \psi_D(a_4) &= (x_4, x_3), \quad \psi_D(a_5) = (x_4, x_2), \quad \psi_D(a_6) = (x_4, x_2), \\ \psi_D(a_7) &= (x_5, x_2), \quad \psi_D(a_8) = (x_2, x_5), \quad \psi_D(a_9) = (x_3, x_5).\end{aligned}$$

例 1.1.2 $H = (V(H), E(H), \psi_H)$ 是有向图, 其中

$$\begin{aligned} V(H) &= \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}, \\ E(H) &= \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9\}, \end{aligned}$$

而 ψ_H 定义为

$$\begin{aligned}\psi_H(b_1) &= (y_1, y_2), \quad \psi_H(b_2) = (y_3, y_2), \quad \psi_H(b_3) = (y_3, y_3), \\ \psi_H(b_4) &= (y_4, y_3), \quad \psi_H(b_5) = (y_4, y_2), \quad \psi_H(b_6) = (y_4, y_2), \\ \psi_H(b_7) &= (y_5, y_2), \quad \psi_H(b_8) = (y_2, y_5), \quad \psi_H(b_9) = (y_3, y_5).\end{aligned}$$

例 1.1.3 $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ 是无向图, 其中

$$\begin{aligned} V(G) &= \{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3\}, \\ E(G) &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}, \end{aligned}$$

而 ψ_G 定义为

$$\begin{aligned}\psi_G(e_1) &= x_1y_1, \psi_G(e_2) = x_1y_2, \psi_G(e_3) = x_1y_3, \\ \psi_G(e_4) &= x_2y_1, \psi_G(e_5) = x_2y_2, \psi_G(e_6) = x_2y_3, \\ \psi_G(e_7) &= x_3y_1, \psi_G(e_8) = x_3y_2, \psi_G(e_9) = x_3y_3.\end{aligned}$$

之所以采用“图”这个词,是因为集 V 上的二元关系 $\psi(E)$ 可以用图形表示. V 中每个元素用平面上的点(为清晰起见,点往往被画成小圆圈)来表示. $\psi_D(E)$ 中的每个元素 (x,y) 用一条从 x 到 y 的有向直(或者曲)线段来表示; $\psi_G(E)$ 的每个元素 xy 用一条连接 x 和 y 的无向直(或者曲)线段来表示.这样的图形称为该图的**图形表示**(diagrammatic representation).例如,图 1.1 所示的两个图形都是例 1.1.1 中所定义的有向图 D .例 1.1.2 中所定义的有向图 H 和例 1.1.3 中所定义的无向图 G 的图形表示分别如图 1.2 (a) 和 (b) 所示.

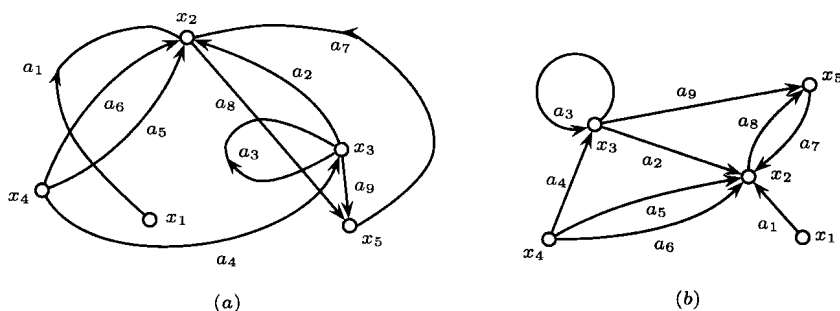


图 1.1 有向图 D 的两种图形表示

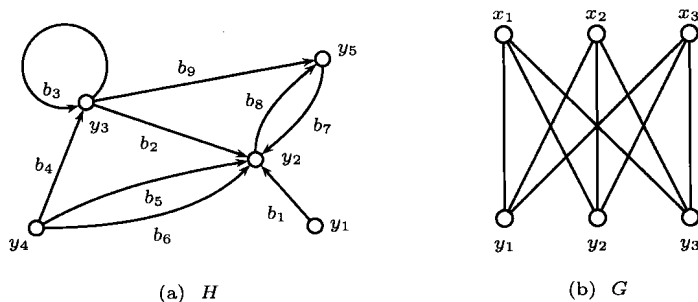


图 1.2 有向图 H 和无向图 G 的图形表示

因为表示 V 中元素的点相对位置和表示 $\psi(E)$ 中元素的线段的曲直长短是无关紧要的,所以图形表示并不是唯一的.例如,图 1.1 中所示的图形就是例 1.1.1 中定义的有向图 D 的两种图形表示.也正是利用了这一特点,图的图形表示可以画得非常精美.因为图的图形表示已描述出 V 和 $\psi(E)$ 中元素之间所具有的关联关系,所