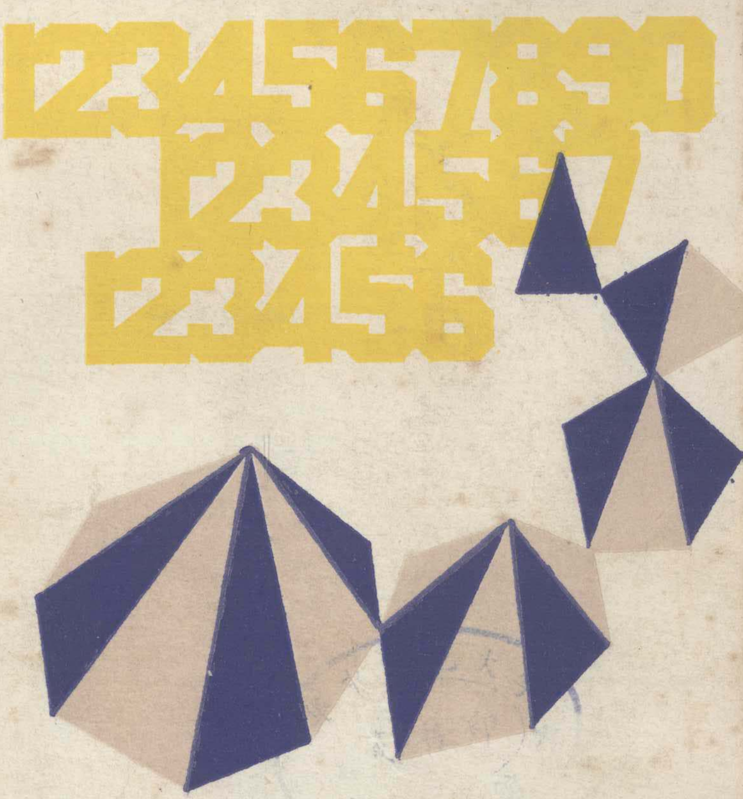
中学生课外读物

ZHONGXUESHENGKEWAIDUWU



中学数学中的变量替换

梁永固 程楚书 编著

梁永固 程楚书 编著

数学中的变量替换

湖南教育出版社

中学数学中的变量替换

梁永固　程楚书 编著
责任编辑：孟实华

湖南教育出版社出版（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行　　解放军干部文化学校印刷厂印刷
1986年9月第1版　　1986年9月第1次印刷
字数：254,000　印张：11.5　印数　1— 10,500
统一书号：7284·734　　定价　1.50元

前　言

变量替换法是中学数学中一个十分重要的数学方法．不但中学数学中许多基础知识的学习需要用到变量替换，而且许多数学习题的解答也少不了它．由于解题时替换式的选择，需要对问题的特点进行深入、细致地考察才能确定，因此通过变量替换法的运用，可以培养我们观察问题、分析问题和灵活运用各种数学知识的能力．学好了变量替换法，就好比掌握了一片打开数学知识宝库的钥匙．为了帮助同学们掌握好这片“钥匙”，全面、系统地掌握中学数学中变量替换的基本理论和各种方法，我们编写了这本小册子．

本书大部分内容不超出中学数学教材的范围．少量超出教材的内容，具有一定自学能力的中学生也能完全看懂．全书分八个部分．首先，从一元三次方程公式解的探求，引出变量替换的概念，接着介绍了学习变量替换的重要性，以及运用变量替换解答数学问题的一般思考方法，然后归类介绍了代数、三角、初等几何、解析几何、微积分初步中的各种变量替换，并配有适量的例题和习题．各部分的习题，书末都附有解答或提示．本书的最后一部分介绍了数学中的“关系、映射、反演”原理(简称 RMI 原理)，变量替换是这个原理的应用．了解 RMI 原理，可以使读者更自觉地、准确地运用变量替换法解决各类数学问题．

本书编写中得到湖南教育学院副院长欧阳录副教授和中国科技大学常庚哲副教授的关怀和指导，欧阳录副教授还欣然为

本书作序，邵阳师范专科学校领导对本书的编写十分关心，我们的同事尹录中、龙际田、彭群钦、邹福元、彭南生等老师看了部分初稿，提出了许多宝贵意见，在此一并致谢。书中的一部分例题和习题，选自国内一些初等数学论著和数学期刊，限于篇幅，书目或篇目未一一列出，在此，谨向这些数学论著和期刊文章的作者表示诚挚的谢意。

由于编著者水平有限，缺点和错误在所难免，希望读者多多指正。

编　著　者

1985年5月于邵阳师专

序

变量替换是解决数学问题的一种重要方法。在中学数学的各个分科中，其运用十分普遍，数学上的许多定理的发现和证明，都离不开它的巧妙运用。学习变量替换法，不但有利于提高解题能力，而且有助于培养学生的辨证观点。因此，变量替换自然成为数学教学中的一个重要课题。

本书作者积累了多年的教学经验，参阅了国内外大量有关资料，将中学数学中的各种变量替换方法，系统详尽地加以总结，而且还补充了一些中学数学教材中没有涉及但适合中学生自学的方法和技巧，特别是最后，介绍了数学中的RMI原理，可以使读者了解变量替换法的理论基础，提高钻研数学方法的兴趣。本书的例题和习题是精心选择出来的，本书的文笔是深入浅出的。我认为它是中学生和数学爱好者的一本较好的读物，也值得中学数学教师和师范院校数学专业的学生参考。

近年来，中学生数学课外读物逐渐增加，但以数学习题解答、趣味数学、数学课本学习辅导之类的读物居多，扩大学生知识领域的小册子也不少，但指导学生深入钻研中学数学方法的读物却不多见。在这一点上，本书具有自己的特色，不能不说是一点突破。我深信这样的读物一定会受到广大读者的欢迎。

欧 阳 录

1985年5月于湖南教育学院

目　录

1 为什么要学习变量替换

一、从一元三次方程的公式解法谈起

在中学数学里，大家知道一元二次方程

$$x^2+ax+b=0 \tag{1}$$

可用公式解，它的求解公式是

$$x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}. \tag{2}$$

在中学数学教材里，这个求解公式是利用配方法导出的，其实它也可以用变量替换的方法求出来。

大家知道，最简一元二次方程

$$x^2=a^2(a\geqslant 0)$$

的解是 $x=\pm a$，

如果我们能够把方程(1)化成最简二次方程，就可以把方程(1)的解求出来。

我们对方程(1)作变量替换，令$x=y-\frac{a}{2}$，(1)式变为

$$\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+a\left(y-\frac{a}{2}\right)+b=0,$$

即 $$y^2=\frac{a^2}{4}-b.$$

这是一个最简一元二次方程，它的解是

$$y=\pm\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2},$$

$$\therefore \qquad x=y-\frac{a}{2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2},$$

这就得到了方程(1)的求解公式。

同学们一定会问，高次方程（二次以上的方程）是不是也有求解公式呢？数学史上早已证明，一元三次及四次方程都有求解公式，但五次及五次以上的方程没有公式解。同学们一定很想知道一元三次方程和一元四次方程的公式解法吧！下面我们只介绍一元三次方程的求解公式。这个求解公式的推出主要是“变量替换”的功劳。

设复系数一般一元三次方程为

$$x^3+ax^2+bx+c=0,$$

作变量替换，令 $x=y-\frac{a}{3}$，得

$$\left(y-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(y-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(y-\frac{a}{3}\right)+c=0$$

去括号整理后，得

$$y^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)y+\left(\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\right)=0。$$

令 $\quad p=b-\frac{a^2}{3},\ q=\frac{3a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c,$

则得 $\quad y^3+py+q=0。\qquad\qquad (3)$

对原方程来说，我们已经消去了二次项，变成了不完全的一元三次方程，要解原方程，只须解方程(3)就够了，为此，

再作变量替换，令$y=u+v$，代入(3)得

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0,$$

即 $$(u^3+v^3+q)+(3uv+p)(u+v)=0, \qquad (4)$$

再令$3uv+p=0$，即 $uv=-\dfrac{p}{3}$，

于是，方程(4)变成了如下的方程组：

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q, \\ u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27}. \end{cases}$$

由此，不难看出u^3和v^3是一元二次方程

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0$$

的两个根，解这个方程得

$$z=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},$$

于是 $$u=\sqrt[3]{z_1}=\sqrt[3]{-\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

$$v=\sqrt[3]{z_2}=\sqrt[3]{-\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

∴ $$y=u+v=\sqrt[3]{-\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \qquad (5)$$

在复数范围内，$\sqrt[3]{z_1}$及$\sqrt[3]{z_2}$都有三个值，即u和v都有三个值，这样，每一个u和每一个v的值配合可得$u+v$的9个值，而根据代数基本定理，原方程只有三个根。这就是说，$u+v$的9个值中只有三个是方程(3)的根，即满足条件

$$uv = -\frac{p}{3}$$

的三个和$u+v$才是方程(3)的根。

求出y的值以后，只要利用$x=y-\frac{a}{3}$就可以求出原方程的三个根了。

公式(5)叫做卡尔丹(1501—1576，意大利数学家)公式。这个公式的求出，主要是通过两次巧妙的变量替换：一次是令$x=y-\frac{a}{3}$，另一次是令$y=u+v$，把原一元三次方程的求解问题，化为方程组(5)的求解问题。而方程组(5)的解是容易求出来的。把方程组(5)的解求出来后，由原变换$x=y-\frac{a}{3}$，$y=u+v$的逆变换$(u+v)-\frac{a}{3}=x$，就把原方程的解求出来了。

这种化繁为简、变难为易，促使未知向已知转化，把含原问题中的未知量的某个式子，看作新的未知量，用新变量替换原变量，把原来的数学问题，转化为含新变量的新问题，通过新问题的求解来获得原数学问题的解的方法，叫做变量替换法。

由于在数学中的未知量常称为“元”，所以变量替换法又称为换元法。

二、变量替换在中学数学中的重要性

在中学数学中，变量替换的应用是十分广泛的。学好变量

替换，对于学好中学数学具有十分重要的意义。

中学数学中许多基础知识的学习，都要用到变量替换。例如，代数中的分解因式；解方程和方程组；解不等式和不等式组；几何中的尺规作图；三角中的证明恒等式，解三角方程；解析几何中的一般二次曲线的讨论；微积分初步中极限的计算，不定积分和定积分的计算等。因此，学好了变量替换，就为学好中学数学基础知识创造了非常有利的条件。

下面举例说明。

例1 设$a\geqslant\frac{1}{8}$，求证

$$\sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}=1.$$

这个题目，看起来似乎十分复杂，不知如何着手进行证明。但是，我们如果仔细观察，就会发现等式左端的两个加式中都含有相同的根式$\sqrt{\frac{8a-1}{3}}$。假如令$x=\sqrt{\frac{8a-1}{3}}$，这两个加式就去掉了一层根号，变得简单一些；进一步考虑，我们还会发现，通过这个替换，两个三次根号下的代数式都变成了完全立方式，因而问题的证明就变得十分简单了。

证 令 $x=\sqrt{\frac{8a-1}{3}}$，则 $a=\frac{3x^2+1}{8}$，

$$\therefore\quad \sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{3x^2+1}{8}+\frac{x^2+3}{8}\cdot x}+\sqrt[3]{\frac{3x^2+1}{8}-\frac{x^2+3}{8}\cdot x}$$

$$=\frac{1+x}{2}+\frac{1-x}{2}=1.$$

利用变量替换解题还可以沟通中学数学各分科之间或某一分科各部分知识之间的关系，培养我们综合运用所学数学知识的能力．

例2 当正数x为何值时，函数$y=\dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ 取极大值？极大值是多少？

解 令 $x=\mathrm{tg}\theta \quad (0<\theta<\frac{\pi}{2})$，

则 $$y=\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\mathrm{tg}\theta}{(1+\mathrm{tg}^2\theta)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\mathrm{tg}\theta}{\left(\dfrac{1}{\cos^2\theta}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\sin\theta\cos^2\theta,$$

于是 $y^2=\sin^2\theta\cos^4\theta=\frac{1}{2}\cdot 2\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta\cdot\cos^2\theta.$

$\because \quad 2\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta=2,$

$\therefore \quad \sqrt[3]{2\sin^2\theta\cos^2\theta\cos^2\theta}\leqslant\frac{2\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta}{3}=\frac{2}{3},$

因而 $2\sin^2\theta\cos^4\theta\leqslant\frac{8}{27},$

$\therefore \quad y^2\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{8}{27}=\frac{4}{27}.$

当 $2\sin^2\theta=\cos^2\theta$ 时，y^2 取极大值，此时，y 取极大值 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

由 $2\sin^2\theta=\cos^2\theta$，解得 $x=\mathrm{tg}x\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\ (\because x>0)$，

故当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，y取极大值$\frac{2\sqrt{3}}{9}$。

例 2 是一个求代数函数极值的问题，如只用代数知识来解，由于$(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$不好处理，解起来比较困难。在上面的解法中，我们作了变量替换，把问题转化为求三角函数的极值问题，通过这个替换，沟通了代数与三角的联系。

由于运用变量替换解题，替换式的选择没有一般的方法，需要我们对题目进行深入的考察，并根据其数形特点选择出适当的替换式，所以运用变量替换解题，可以培养我们分析、灵活运用数学知识等多方面的能力。

在运用变量替换解题的过程中，还能使我们认识到各种数学知识不是孤立、静止的，而是不断运动变化的，并且具有普遍联系的规律性，这有利于培养我们的辩证唯物主义观点。

以上几个方面，充分说明了变量替换法是中学数学中一个十分重要的数学方法，在解题中尤为重要。学好它，就好比掌握了一片打开数学知识宝库的钥匙。

三、选择变量替换式的几种思考方法

既然变量替换法在中学数学中如此重要，那么，同学们一定要问，究竟什么样的数学问题适宜运用变量替换法？在用变量替换法解题时，又怎样选择恰当的替换式呢？回答这个问题是很困难的，只有通过大量的练习，才能总结出一些规律性的结论来。本书后文，将结合例题介绍一些中学数学中适宜用变量替换法求解的数学题的类型，及其选择变量替换式的方法。这里，我们先提出几条如何运用变量替换法解题、如何恰当选择

变量替换式的思考方法，供同学们参考。

在我们考虑怎样作变量替换时，往往可以从以下几个方面去思考：

（一）把问题化成可直接应用公式或已知结论的形式。

有些问题，乍看起来，不能用数学教科书上的公式来解，但作出适当的变量替换后，就可以归结到利用某个公式来解了。

例1　求方程　$ax^4+bx^2+c=0$　（1）

的根。

乍看起来，这个问题的求解，在数学教科书上没有可利用的公式，但如果我们作变换：

$$y=x^2, \tag{2}$$

那末（1）式变成

$$ay^2+by+c=0. \tag{3}$$

（3）式就可以用数学教科书上的一元二次方程的求根公式来解了。从（3）式，得到

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \tag{4}$$

（4）式代入（2）式，得

$$x^2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

这是一个简单的二次方程，可解得

$$x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

这就是方程（1）的四个复根。

对于某些数学问题，如果一时用不上公式，我们应该深入

分析问题的条件和特点，考虑是否可以作出一个适当的变量替换，把问题化成可以直接应用公式的形式。

例2 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$。

分析：这是一个求函数极限的问题，很明显，利用极限的基本运算法则是不能解决这个问题的。我们知道，在中学数学教材中介绍了两个重要的极限公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

能不能利用这两个公式来求本题的极限呢？第一个公式是显然用不上的，第二个公式好象也用不上。但如果我们令$\operatorname{tg}x=1+\frac{1}{y}$，那么当$x\to\frac{\pi}{4}$时，$y\to\infty$，这时，$\operatorname{tg}2x=\dfrac{2\left(1+\frac{1}{y}\right)}{1-\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2}}$，

因此原极限化为$\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{2\left(1+\frac{1}{y}\right)}{1-\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2}}}$，就可以利用上述第二个求极限的公式了。具体解法如下：

解 令 $\operatorname{tg}x=1+\frac{1}{y}$，

则 $$\operatorname{tg}2x=\frac{2\left(1+\frac{1}{y}\right)}{1-\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2}}=\frac{2\left(1+\frac{1}{y}\right)}{-\left(\frac{2}{y}+\frac{1}{y^{2}}\right)}=\frac{2y\left(1+\frac{1}{y}\right)}{-\left(2+\frac{1}{y}\right)}$$

且有 $x\to\frac{\pi}{4}$时，$y\to\infty$，

于是 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}2x}=\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{2y\left(1+\frac{1}{y}\right)}{-\left(2+\frac{1}{y}\right)}}$

$$=\lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{\frac{2\left(1+\frac{1}{y}\right)}{-\left(2+\frac{1}{y}\right)}}=e^{-1}.$$

有些问题，虽然不能通过变量替换直接利用公式，但我们可以考虑通过适当的替换，把问题转化为利用某些已知的结论。请看例3。

例3 求证：$\dfrac{a-b}{1+ab}+\dfrac{b-c}{1+bc}+\dfrac{c-a}{1+ca}$

$$=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(1+ab)(1+bc)(1+ca)}.$$

分析：这个问题似乎很难与教本上的公式、结论联系起来，但如果我们熟悉高中数学中的这样一个问题：若$\triangle ABC$为非直角三角形，则有

$$\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C=\mathrm{tg}A\cdot\mathrm{tg}B\cdot\mathrm{tg}C.$$

将这个命题推广，可以得到如下的一般结论：
恒等式

$$\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C=\mathrm{tg}A\cdot\mathrm{tg}B\cdot\mathrm{tg}C$$

成立的充要条件是

$$A+B+C=n\pi\qquad(n\in Z)$$

（这个推广命题的证明不难，这里从略）。如果巧妙地利用这个结论，例3的证明就不困难了。

证 由于 $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma=\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma$
成立的充要条件是