全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

微积分

Calculus

主编 姜天权

副主编 宋秉信 黄锦斌 高尧来

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

微　积　分

Weijifen

主　编　姜天权

副主编　宋秉信　黄锦斌　高尧来

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书是为适应应用型本科院校“微积分”课程的教学要求，根据“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”编写的。内容涵盖了函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、无穷级数、微分方程与差分方程。在保持教学内容的系统性和完整性的前提下，适当降低某些内容的理论难度，加强对微积分中有重要应用背景的概念、理论、方法和实例的介绍。文字表述详尽通畅，浅显易懂，从而使教材易教易学，方便自学。书中有些内容加了※号或用小字体印刷，便于教师灵活掌握。每章均配有习题，书末附习题参考答案。

本书可作为培养应用型人才的高等学校经济管理类相关专业的数学基础课程教材，同时也可作为高职高专和成人教育相关专业的数学基础课程教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

微积分/姜天权主编 .—北京：高等教育出版社，2010.6

ISBN 978-7-04-029226-8

Ⅰ.①微… Ⅱ.①姜… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 081894 号

策划编辑 马 丽 **责任编辑** 崔梅萍 **封面设计** 张申申
责任绘图 郝 林 **版式设计** 余 杨 **责任校对** 王 超
责任印制 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京印刷一厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2010年6月第1版
印 张	23	印 次	2010年6月第1次印刷
字 数	430 000	定 价	32.40元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 29226-00

前　言

本书是根据“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”，为适应应用型本科院校“微积分”课程的教学需要而编写的。作为大学的基础课程，微积分除了提供必要的数学知识外，还承载了培养学生的数学素质与抽象思维的作用；作为应用型本科“微积分”课程，还必须承担培养学生在实际工作中会用数学和用好数学的本领。这些目标的实现无一不与教材息息相关。本书正是根据应用型本科“微积分”课程教学的实际情况所作的有益尝试。在编写本书时，我们注意了以下几点：

1. 注重问题引入。把以往先讲理论后讲应用的思维模式，变为“面向问题的数学教学”，在每章的引言部分提出几个生活和经济工作中的现实问题，启发学生“学而有用”的思考，引发学生的学习兴趣和求知欲望，并将数学建模思想引入书中以培养学生运用数学的意识和运用数学的能力，以期改变学生“学数学对以后的工作没有用、不会用”的观念。

2. 注重知识的实际背景。尽量从实际出发，注意概念与定理的直观描述和实际背景，适当降低了某些内容的理论深度与逻辑推理，增加了联系实际的例题、习题和数学模型，削弱了过难过繁的计算技巧。介绍了计算机软件用于微积分计算的知识。在文字表述上努力做到简明通畅、浅显易懂，增加知识的生动性、趣味性，以期克服学生认为高等数学“书难学、题难做”的心理障碍，提高学习数学的主动性与积极性。

3. 注重计算机软件的应用。随着计算机技术的发展，利用计算机软件求导数、积分以及计算机作图都变得非常方便。面对科学技术的发展，大学数学的教学除了提供基本的数学知识和必要的运算技能外，更重要的是锻炼学生的抽象思维能力和逻辑推理能力。因此，本书在编写过程中每一章都配有利用计算机软件解决相应的问题的知识，以方便学生利用更多的时间学习概念、定理，掌握如何利用概念、定理解决实际问题。

本书在编写过程中，考虑到不同院校、不同专业对微积分知识的要求不尽相同，我们对某些内容加了※号或用小字印刷，可供教师根据教学条件、教学需要等实际情况灵活掌握。

参加本书编写工作的有姜天权（第一章）、刘晓花（第二、三章）、高尧来（第四、五章）、黄锦斌（第六章）、吴建强（第七章）、宋秉信（第八章）、邹雪霞（MATLAB软件运用的内容）。参加本书编写工作的还有郭中华、张式强、刘建辉、朱辉华等。由姜天权、高尧来对全书进行了修改和定稿。

本书是全国教育科学"十一五"规划课题研究成果。本书在编写过程中参考了部分国内出版的教材，得到了高等教育出版社的大力支持与指导，马丽同志做了大量的工作，编者在此表示衷心感谢。

由于作者水平有限，书中一定存在很多不足之处，敬请读者批评指正。

编者于广东工业大学华立学院
2009年12月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

引　言

微积分研究的主要对象是变量及变量间的相依关系——函数关系.用函数研究运动与变化,就要用到极限这一必不可少的工具,它是从有限中认识无限,从近似中认识精确,从离散中认识连续,从量变中认识质变的一种重要的思维方法.极限的概念和运算从理论上贯穿于微积分学的始终,同时它也是解决实际问题的有力工具.例如:

问题 1　银行存款的复利计算问题

设有本金 P_0 元,银行年利率为 r,按复利计算,t 年后的本利和为:

$$P=P_0(1+r)^t.$$

若把计息周期缩短,一年按 n 次计息,此时利率为 $\frac{r}{n}$,t 年后的本利和为:

$$P=P_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

由二项展开式知 $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n>1+r$,因而 $P_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}>P_0(1+r)^t(t>0)$,这说明一年计算 n 次的本利和比一年计算一次的本利和要大,且复利计算次数越频繁,计算所得的本利和就越大.那么要问它的变化趋势怎样?是无限增大吗?

问题 2　一把 4 条腿的椅子在不平的地面上能放稳吗?这是生活中的一个简单而有趣的问题.

诸如此类的许多实际问题,用初等数学的知识难以解决,我们将通过本章学习的极限与连续的知识来解决上面提出的问题.

第一节　函　　数

一、集合与区间

1. 集合

在数学中,把具有某种特定性质的事物的总体称为一个**集合**.组成这个集合

的事物称为该集合的元素. 集合的有关概念、表示方法及运算规则等在中学已经讨论过了,这里不再重复.

不含任何元素的集合称为**空集**. 空集记作$\varnothing$.

本书用到的集合主要是数集,即元素都是数的集合. 如无特别声明,以后提到的数都是实数. 几个常用的数集是:全体自然数的集合 $\mathbf{N}$,全体整数的集合 $\mathbf{Z}$,全体有理数的集合 $\mathbf{Q}$,全体实数的集合 $\mathbf{R}$. 它们之间有如下关系:

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}.$$

实数与数轴上的点之间可以建立一一对应的关系. 因此,有时候就把数 x 称为点 x,这时就是指数轴上与数 x 对应的那个点,相应地,数集也可称为(数轴上的)点集.

2. 区间

区间是用得较多的一类数集. 设 a 和 b 为实数,且 $a<b$. 数集

$$\{x\mid a<x<b\}$$

称为**开区间**,记作(a,b),即

$$(a,\ b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

数集

$$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为**闭区间**,记作$[a,b]$,即

$$[a,\ b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

类似地可说明

$$[a,\ b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},$$
$$(a,\ b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

$[a,b)$和$(a,b]$称为**半开区间**.

以上这些区间都称为**有限区间**. 数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 从数轴上看,有限区间是长度为有限的线段(不包含端点,或包含一个端点,或包含两个端点). (图 1-1)

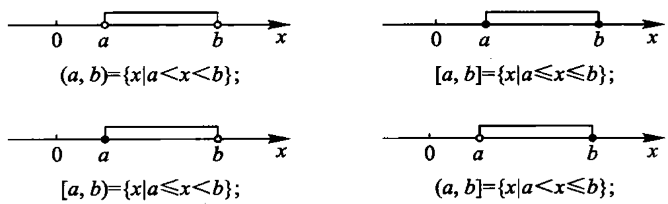

图 1-1

此外还有**无限区间**. 引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大),则无限的半开或开区间表示如下:

$$[a, +\infty) = \{x \mid a \leqslant x\},$$
$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\},$$
$$(a, +\infty) = \{x \mid a < x\},$$
$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}.$$

这些区间在数轴上表现为长度为无限的半直线(图 1－2).

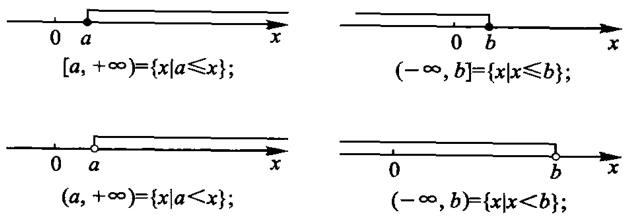

图 1－2

全体实数的集合 **R** 也记作$(-\infty, +\infty)$,它也是无限区间.

要注意的是,记号 $+\infty$, $-\infty$ 只是表示无限的一种记号,它们都不是某个确定的实数,因此也不能参与数的运算.

以后如遇到所作的论述对不同类型的区间都适用,就用“区间 I”代表各种类型的区间.

3. 邻域

设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta > 0$. 数集

$$\{x \mid |x-a| < \delta\}$$

称为点 a 的 **δ 邻域**,记作 $U(a,\delta)$,即

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\}.$$

点 a 叫做 $U(a,\delta)$ 的**中心**,δ 叫做 $U(a,\delta)$ 的**半径**.

因为 $|x-a| < \delta$ 相当于

$$-\delta < x-a < \delta \text{ 即 } a-\delta < x < a+\delta,$$

所以

$$U(a, \delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}.$$

由此看出,$U(a,\delta)$ 也就是开区间 $(a-\delta, a+\delta)$,这个开区间以点 a 为中心,而长度为 2δ(图 1－3(a)).

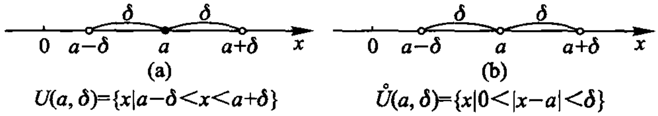

图 1－3

若把 $U(a,\delta)$ 的中心去掉，所得到的邻域称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\},$$

这里 $0<|x-a|$ 表示 $x\neq a$（图 1-3(b)）.

当不需特别辨明邻域的半径时，也可把 $U(a,\delta)$ 简记为 $U(a)$.

二、函数概念

函数是描绘变量间相互依赖关系的一种数学模型.

在同一个问题中，往往同时有几个变量在变化着. 这些变量并不是孤立变化的，而是按照一定的规律相互联系着. 比如，在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，落下的距离为 s. 假定开始下落的时刻为 $t=0$，则变量 s 与 t 之间的相依关系由数学模型 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 给定，其中 g 是重力加速度. 又如，在一个确定的地点，某一天昼夜间的气温 T 是随着时间 t 的变动而变化的. 对这一天从 0 点到 24 点之间的任一时刻 t_0，气温 T 都有一个确定的值 T_0 与之对应，尽管这个对应规律很难用一个表达式精确表示出来. 现实世界中广泛存在着变量之间的这种类型的相依关系，正是函数概念的客观背景.

定义　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集. 如果对于每个 $x\in D$，变量 y 按照一定的对应法则 f 总有唯一确定的值和它相对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x).$$

数集 D 称为这个函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量.

与自变量 x 对应的因变量 y 的值称为函数在 x 点的函数值. 比如，当 x 取值 $x_0\in D$ 时，y 的对应值就是 $f(x_0)$. 当 x 取遍定义域 D 的所有值时，对应的全体函数值所成的集合

$$W=\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数的值域.

从上述定义可以看到，定义域和对应法则是函数的两个要素. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的；否则，就是不同的.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际背景确定的. 例如，某一天昼夜温度 T 随时间 t 变化的规律 $T=T(t)$ 的定义域是 $D=[0,24]$.

不考虑函数的实际背景，而抽象地研究用等式表达的函数，这时我们约定：函数的定义域就是使表达式有意义的一切实数所组成的集合. 例如，函数

$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域是开区间$(-1,1)$；函数$y=\sqrt{1-x^2}$的定义域是闭区间$[-1,1]$.

在平面直角坐标系中，点集

$$G=\{(x,\ y)\mid y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数$y=f(x)$的**图形**. 函数图形提供了一种几何直观，对理解函数的性质是十分有用的.

通常表示函数的方法有

表格法：把自变量的值与对应的函数值列成表格；

图像法：在坐标系中用图形表示函数关系；

公式法：自变量和因变量之间的关系用数学表达式（也称为解析表达式）来表示.

根据函数的解析表达式形式的不同，函数也可分为

显函数：函数由x的解析表达式直接表示，如$y=2x^2+5$；

隐函数：函数的自变量x与因变量y的对应关系由方程$F(x,\ y)=0$来确定，如$3x^2+2y+5=0$；

分段函数：函数在其定义域的不同范围内具有不同的解析表达式.

中学数学已经讨论过许多函数，如常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数，这些函数在以后的讨论中将反复出现. 下面举几个函数的例子.

例1　常数函数　$y=2$的定义域$D=(-\infty,+\infty)$，值域$W=\{2\}$，它的图形是一条平行于x轴的直线（图1-4）.

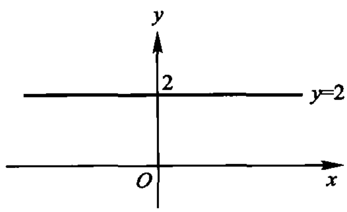

图1-4

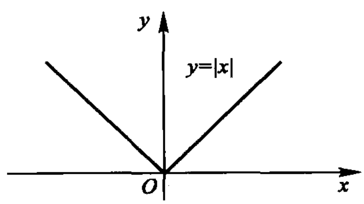

图1-5

例2　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

它的定义域$D=(-\infty,+\infty)$，值域$W=[0,+\infty)$，它的图形如图1-5所示.

例3　符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

它的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域 $W = \{-1, 0, 1\}$，图形如图 1-6 所示.

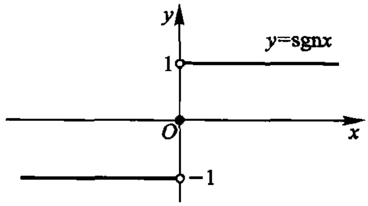

图 1-6

例 4　**取整函数** $y = [x]$. 表示不超过 x 的最大整数，例如 $[\pi] = 3$，$[-3.5] = -4$，$[\sqrt{2}] = 1$. 它的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域为整数集 $\mathbf{Z}$（图 1-7）.

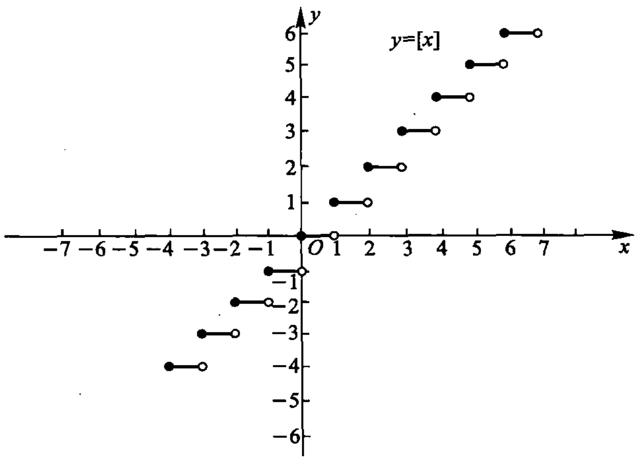

图 1-7

三、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数的定义域为 D，数集 $X \subset D$，若存在正数 M，使得对一切 $x \in X$，都有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

就称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**；如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**.

例如函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界，因为无论 x 取任何实数，$|\sin x| \leqslant 1$ 都成立. 函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 内是无界的，因为可以取无限靠

近于零的数，使该函数的绝对值$\left|\frac{1}{x}\right|$大于任何预先给定的正数 M. 但是$y=\frac{1}{x}$在$[1,+\infty)$上是有界的，例如，可以取 $M=1$ 而使得$\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 时对于$[1,+\infty)$上的一切 x 值都成立.

函数有界的定义也可以这样表述：如果存在常数 M_1 和 M_2 使得对于任一 $x\in X$，都有 $M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$，就称 $f(x)$ 在 X 上有界，并分别称 M_1 和 M_2 为 $f(x)$ 在 X 上的一个下界和一个上界.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是**单调增加的**；如果对于区间 I 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是**单调减少的**.

单调增加函数的图形是沿 x 轴正方向逐渐上升的，如图 1-8；单调减少函数的图形是沿 x 轴正方向逐渐下降的，如图 1-9.

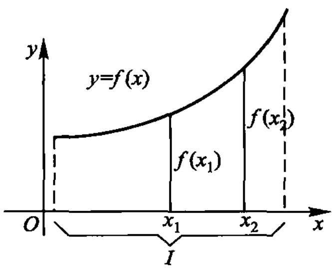

图 1-8

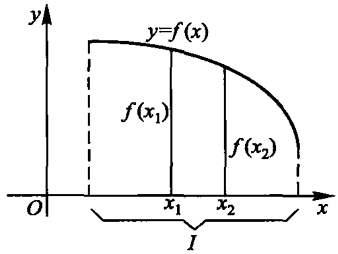

图 1-9

例如，$f(x)=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$内是单调增加的，在$(-\infty,0]$内是单调减少的；在$(-\infty,+\infty)$内不是单调的. 而 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$）. 如果对于任一 $x\in D$，

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**；如果对于任意 $x\in D$，

$$f(-x)=f(x)$$