文登教育集团课堂用书
聚骄公司全心专业设计

FOCUS 聚焦图书
中国最值得信赖的考研品牌

2011版考研数学

复习指南

高分

市面上唯一一本由陈文灯、黄先开教授亲自执笔的全程辅导用书
涵盖文登培训课堂讲义全部精华

陈文灯　黄先开　编著

(理工类)

(附赠60元文登网校课程)

世界图书出版公司

文登教育集团课堂用书
聚骄公司全心专业设计

FOCUS 聚焦图书
中国最值得信赖的考研品牌

2011版考研数学

复习 高分 指南

市面上唯一一本由陈文灯、黄先开教授亲自执笔的全程辅导用书
涵盖文登培训课堂讲义全部精华

陈文灯 黄先开 编著

(理工类)

(附赠60元文登网校课程)

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

数学复习指南. 理工类 / 陈文灯，黄先开编著. —17 版. —北京：世界图书出版公司北京公司，2002. 3
ISBN 978—7-5062-5211-2

Ⅰ. 数... Ⅱ. ①陈... ②黄... Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-解题 Ⅳ. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 014886 号

数学复习指南(理工类)

(2011 版)

主　　编：陈文灯　黄先开
责任编辑：张中兴
装帧设计：余曙敏

出　　版：世界图书出版公司北京公司
发　　行：世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号　邮编 100010)
销　　售：各地新华书店
印　　刷：三河市文昌印刷装订厂

开　　本：787×1092 毫米　1/16
印　　张：49.5
字　　数：798 千字
版　　次：2010 年 2 月第 17 版　2010 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5062-5211-2/O · 332　　**定价：56.80 元**

服务热线：010—88861708

天道酬勤

——我的考研数学满分之路

（文/丁智：北京邮电大学应届毕业，报考清华大学自动化系。数学一：150 分，专业课：120 分，总分：400 分）

抱最大的希望，付最大的努力，做最坏的打算。

——丁智

考研已经过去三个月了，那使人压抑得喘不过气来的硝烟也已经渐渐散去，但考研留下的回忆却是刻骨铭心、永远难以忘怀的，现在回头想想，感慨良多。

现代社会的竞争如此激烈，本科所学习的知识已远远不能满足社会发展的需要，因此继续深造已成为每个有志青年的必然选择。我是从大三下学期就决定报考清华大学自动化系模式识别与智能系统专业，"人生难得几回搏"，这是我和家人的梦想，也是我最后一次机会。

下面主要讲一下我考试中发挥得比较好的数学学习体会。

(1)通读大纲。大纲发布后，首先通读大纲，了解数学(一)对各类知识点的要求。数学由于其自身学科的特点，一直都是"拉分"的科目，即高分考生和低分考生之间的分差比较大，数学成绩往往决定着考研的成功与否。对于英语和政治，大部分理科考生的分数都集中在 55 分到 70 分之间，相对来说对总分的贡献不如数学那么明显，因而经常听到"得数学者得天下 "的说法，这种说法可能并不怎么正确，但却充分说明了数学的重要性。

(2)通读教材。暑假期间，我利用上文登辅导班的间隙通读了教材，几本比较经典的教材有陈文灯老师在课堂上推荐的同济大学的《高等数学》和浙江大学的《概率论和数理统计》，此外同济大学的《线性代数》也相当不错。有很多同学认为读教材是浪费时间，只是埋头做题，结果题目做了很多，但效果并不好。我认为知识点是不变的，变的只是出题的方式和角度，只有对基本概念、基本定理有充分的理解、把握和运用，以不变应万变才是取胜之道。我将教材精读了三遍，定理的证明及课后的习题也已熟练掌握，为考高分打下了坚实基础。在其后遇到模棱两可的问题时，也经常重翻课本。当然，对于像我一样数学成绩一般的学生来说，上数学强化班是非常必要的。我非常感谢陈文灯老师，他的讲解深入浅出，言简意赅，总是一句话就能抓住题目的关键，使我获益良多，极大地增强了考研的信心。

(3)适量做题。大四上学期开学后，课业负担不很重。9 月至 11 月是考研数学复习中最重要和最累的阶段，即在该阶段内要有针对性地适量做题，这个阶段基本就决定了你的考试水平。我推荐陈文灯老师的《考研数学复习指南》(世界图书出版公司出版)和《考研数学题型集粹与练习题集》(现为《考研数学高分题型精讲精练》)。这两本书经过多年的实践考验和不断修正，已经集考研之大成，成为每个考研学子的必备书。这两本书并不是看一遍两遍就可以的，对于大学数学成绩一般的学生来说，至少应该看三遍，尤其是一些理解得不太透彻的地方，需要反复地研读、揣摩、练习。第一遍是最吃力的，我大约用了一个半月的时间。看第二遍、第三遍的时候速度会快得多，尽管有很多以前不会做的题现在还是不会，但对题目的感觉强了很多，这样做能为下一轮的复习打下坚实的基础。题目做得越多，往往越能一眼抓住问题的关键所在，有的放矢。在第一遍复习过程

中我把曾经做错的和不会做的习题都抄在一个笔记本上，并且随身携带、经常复习，了解自己错误的根源所在，搞清楚问题是出在理解得不透彻还是思维出现了误区。开始的时候一天能抄30道错题，那自然是非常郁闷的，后来随着水平的提高，一天只有十几道了。这是一个蛹化蝶的过程，很漫长，也很痛苦，希望大家一定要坚持住。

(4)做模拟试题和真题。到了12月份的冲刺阶段，主要任务是做模拟试题和真题。我一般规定自己每天在150分钟的时间内完成一套试题。每次都当成真正的考试，认真地在答题纸上做一遍，做完整套试卷以后严格按照标准答案批改，给自己打分，并将所犯错误抄在一个专门的错题集上。将错题再认真地做一遍，这样一天做一套模拟试卷，周末专门拿出一整天来研究错题，查漏补缺。我做的是陈老师出的《模拟考场15套》，全部认真做完。有些题即使做了十遍还是出错，这确实挺打击我的信心，人的惯性思维是很难改变的，需要有持之以恒的精神和永不服输的态度。

真题的作用是不容忽视的，经过十几年的考试，相当多的题目模式已经定了下来，很多考研题目都是类似的。考研真题经过千锤百炼，在思想性上有较高的参考价值，需要多加揣摩。尤其是近几年的考题，反映了命题者出题的方式和思路，更需要注意。关于考试时的做题习惯问题，这需要平时的积累。在平时答题时，要注意培养好的习惯，如需根据题意注意是否需要分类讨论，分类讨论的结果最后记住要做一个总结，不定积分的结果不要忘记加一个常数，与实际有关的题不要忘记加单位等等。这些看上去微不足道的地方，都可能导致你的失分，如果是填空题，那就一分得不了了，被扣这样的分数是很冤枉的。随着“考研热”年年升温，竞争也越来越激烈，特别是名牌大学的热门专业，就像今年我报考的清华自动化系仅招收41人，报考的人将近800，录取比例是20：1，其中的热门专业更是远高于这个比例。一分的差距可能决定你录取与否，为了自己的理想，应该每分必争，不放弃任何成功的机会。

最后，谈谈关于考试的心态调整问题。考研与高考不同，并不是每个人都考。随着考研日期的一天天逼近，看到已保研和找到工作的同学整日悠闲自在，自己却早出晚归，累得头昏脑胀，心理不平衡是难免的。但转念一想，世上没有免费的午餐，只有付出才会有收获，“走自己的路，让别人说去吧”，心情自然就会平复下来。还有一些同学复习的效果不怎么好，就怨天尤人，对自己失去信心，最终放弃了考研，放弃了改变自己命运的机会。

其实，考研并没有像大家认为的那么难，基础题还是占多数的，如果将会做的题全都做对，及格还是不成问题的。我的宗旨应该是“抱最大的希望，付最大的努力，做最坏的打算”。要有一定的压力，但不要太大，要将压力转化为动力。尽自己的全力，但求无愧吾心。在临场考试中，一定要细心冷静，沉着应对，由易到难，该放弃时就放弃，不要寄希望于超水平发挥，毕竟能超水平发挥的人可谓是少之又少。

关于复习的时间与效率问题。我认为数学不是拿时间来“堆”的。数学来不得半点马虎，如果开始做错，那下面完全是徒劳的。复习数学需要清醒的意识和缜密的思维，而二者都需要在头脑清楚的时候才能够做到。每个人的兴奋时间不一样，我是在上午比较清醒，所以上午我集中精力学习3小时的数学，花费了时间一定要有所收获。其实我每天的学习时间并不很长，只有8小时左右，否则保证不了效率。我认为考研最重要的不是每天学习了多长时间，而是学到了什么，是否能持之以恒地坚持下去。在下半年的时间里，除特殊情况外，我基本上没有周末和节假日，每天的作息时间非常有规律，不给自己任何偷懒的机会和理由。

希望我的体会能使大家少走一些弯路。考研对每个人来说都是一件很不容易的事情，也是人生的一个重要分岔口，我们应该珍惜并把握住这个机会。

最后，以蒲松龄的自勉联“有志者，事竟成，破釜沉舟，百二秦关终属楚；苦心人，天不负，卧薪尝胆，三千越甲可吞吴”与广大考研的战友们共勉，祝愿大家在2011年的考研过程中，能实现自己的梦想！

前　言

数学统考从 1987 年至今经历了 24 个年头。其间“数学考试大纲”虽然变化不大，但每年的试题均有所创新，不过仔细分析还是万变不离其宗。只要把本书归纳总结的题型、方法和技巧掌握住，研读我们精心设置的典型例题，即可达到触类旁通、融会贯通的境界。

我们要提醒读者的是，数学想要考高分，一定要了解考研数学究竟要考什么？综观一二十年试题可知，主要考查如下四方面：

（1）基础（基本概念、基本理论、基本方法）；

（2）解综合题的能力；

（3）分析问题和解决问题的能力，即解应用题的能力；

（4）解题的熟练程度（通过大题量、大计算量进行考核）。

真正了解了要考查的东西，复习时才能有的放矢。关于数学基础、数学题型与考试目标之间的逻辑关系，我写了四句话，供大家参考、体会：**数学基础树的根，技巧演练靠题型；勤学苦练强磨砺，功到高分自然成。**

本书特点：

（1）对大纲要求的重要概念、公式、定理进行剖析，增强读者对这些内容的理解和记忆，避免犯概念性错误、错用公式和定理的错误。

（2）归纳、总结了二十多个思维定式，无疑这对读者解题会有所帮助，但我们的目的是引导读者去归纳总结，养成习惯。这样应试的时候就能很快找到解题突破口。

（3）用“举题型讲方法”的格式代替传统的“讲方法套题型”的做法，使读者应试时，思路畅通、有的放矢，许多书的跟进也说明这种做法的确很有效。

（4）广泛采用表格法，使读者便于对照、比较，对要点一目了然。

（5）介绍许多新的快速解题方法和技巧。例如，中值定理证明中的辅助函数的做法、不定积分中的凑微分法、不等式证明尤其是定积分不等式的证明方法等，都是我们教学研究的成果，对读者应试能起到“事半功倍”的效果。

（6）创新设计出很多好的例题，以期提高读者识别题型变异的能力。

历经十七载的再版和修订，本书已成为广大考研读者的良师诤友，**同时也有很多教师同行用该书做教学参考**。为了精益求精，恳请朋友们拨冗指正。

陈文灯

目　录

第三篇* 概率论与数理统计

注:带 * 篇、章,数二考生不作要求。

篇要　高数解题的四种思维定势

先赠送给大家四句话，相信在考研中能起到关键作用，请考生务必牢记.

第一句话：在题设条件中若函数 $f(x)$ 二阶或二阶以上可导，"不管三七二十一"，把 $f(x)$ 在指定点展成泰勒公式再说.

【例 1】 设 C 为实数，函数 $f(x)$ 满足下列两个等式：

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = C, \quad \lim_{x\to\infty} f'''(x) = 0.$$

求证：$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0, \lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = 0.$

【证明】 由泰勒公式有

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) + \frac{1}{6}f'''(\xi_1), \quad x < \xi_1 < x+1, \qquad ①$$

$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) - \frac{1}{6}f'''(\xi_2), \quad x-1 < \xi_2 < x. \qquad ②$$

由 ①＋② 得，$f''(x) = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) + \frac{1}{6}f'''(\xi_2) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1).$　③

由 ①－② 得，$2f'(x) = f(x+1) - f(x-1) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1) - \frac{1}{6}f'''(\xi_2).$　④

当 $x \to \infty$ 时，$\xi_1 \to \infty, \xi_2 \to \infty$，于是有

$$\lim_{x\to\infty} f''(x) = 2C - 2C + \frac{1}{6}\times 0 - \frac{1}{6}\times 0 = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} 2f'(x) = C - C - \frac{1}{6}\times 0 - \frac{1}{6}\times 0 = 0.$$

因此　$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0, \lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = 0.$

【例 2】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶导数连续，$f(0) = f(1) = 0$，并且当 $x \in (0,1)$ 时，$|f''(x)| \leqslant A$.

求证：$|f'(x)| \leqslant \frac{A}{2}, x \in [0,1]$.

【证明】 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数，则 $f(x)$ 可展成一阶泰勒公式，即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x - x_0)^2, \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}.$$

取 $x = 0, x_0 = x$，则

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0 - x) + f''(\xi_1)\frac{(0-x)^2}{2!}, \quad 0 < \xi_1 < x \leqslant 1; \qquad ①$$

取 $x = 1, x_0 = x$，则

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1 - x) + f''(\xi_2)\frac{(1-x)^2}{2!}, \quad 0 \leqslant x < \xi_2 < 1. \qquad ②$$

②－① 得

$$f'(x)=f(1)-f(0)+\frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2-f''(\xi_2)(1-x)^2]$$

$$\xlongequal{f(0)=f(1)=0}\frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2-f''(\xi_2)(1-x)^2].$$

又 $\quad |f''(x)|\leqslant A, x\in(0,1)$，则

$$|f'(x)|\leqslant\frac{A}{2}[x^2+(1-x)^2]=\frac{A}{2}(2x^2-2x+1).$$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$2x^2-2x+1\leqslant 1$. 故 $|f'(x)|\leqslant\frac{A}{2}$.

【例 3】 试证：若偶函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有连续的二阶导数，且 $f(0)=1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[f(\frac{1}{n})-1\right]$ 绝对收敛.

【证明】 因 $f(x)$ 为偶函数，故 $f'(x)$ 为奇函数. $f'(0)=0$. 又

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2),$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=1+\frac{f''(0)}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故

$$u_n=f\left(\frac{1}{n}\right)-1=\frac{f''(0)}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

从而

$$|u_n|=\left|f(\frac{1}{n})-1\right|\sim\frac{|f''(0)|}{2n^2}.$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f''(0)|}{2n^2}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

【例 4】 设函数 $f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)\geqslant 0, x\in(-\infty,+\infty)$，函数 u 在区间 $[0,a](a>0)$ 上连续. 证明：

$$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t\geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right].$$

【证明】 令 $x_0=\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t$，将 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处展成一阶泰勒公式：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2.$$

由于 $f''(x)\geqslant 0$， 则 $f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

令 $x=u(t)$， 则 $f[u(t)]\geqslant f(x_0)+f'(x_0)[u(t)-x_0]$.

上式两边在 $[0,a]$ 上对 t 积分，得

$$\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t\geqslant\int_0^a f(x_0)\mathrm{d}t+\int_0^a f'(x_0)[u(t)-x_0)]\mathrm{d}t$$

$$=af(x_0)+f'(x_0)\left[\int_0^a u(t)\mathrm{d}t-ax_0)\right]=af(x_0).$$

故

$$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t\geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right].$$

【另证】 因 $f''(x)\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 为凸函数. 因此，具有性质：

$$f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)(\text{其中 }\lambda\geqslant 0,\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1).$$

由 u 在$[0,a]$上连续，从而可积. 将$[0,a]$分成 n 等分，有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{u(\xi_i)}{a}\frac{a}{n}=\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t.$$

由 f 的凸性及连续性，有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{u(\xi_i)}{a}\frac{a}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f[u(\xi_i)]=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(u(\xi_i))}{a}\frac{a}{n}.$$

对上式两边令 $n\to\infty$ 取极限，由可积性可得

$$f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right)\leqslant\frac{1}{a}\int_0^a f(u(t))\mathrm{d}t.$$

第二句话：在题设条件或欲证结论中有定积分表达式时，则“不管三七二十一”先用积分中值定理对该积分式处理一下再说.

【例 5】设 $f(x)$ 在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内二阶可导，且 $f(0)=f(\frac{1}{2})$，$2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(2)$.

证明：存在一个 $\xi\in(0,2)$，使 $f''(\xi)=0$.

【证明】$f(2)=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{\text{积分中值定理}}2(1-\frac{1}{2})f(\eta)=f(\eta)$，$\frac{1}{2}\leqslant\eta\leqslant1$.

于是 $f(x)$ 在$[\eta,2]$上满足罗尔定理，即存在一个 $\xi_1\in(\eta,2)$，使

$$f'(\xi_1)=0. \quad ①$$

又 $f(x)$ 在$[0,\frac{1}{2}]$上满足罗尔定理，于是存在一个 $\xi_2\in(0,\frac{1}{2})$，使

$$f'(\xi_2)=0. \quad ②$$

由 ①，② 可知 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$. 再对 $f'(x)$ 在$[\xi_2,\xi_1]$上使用罗尔定理，于是 $\exists\xi\in(\xi_2,\xi_1)\subset(0,2)$，使 $f''(\xi)=0$.

【例 6】设 $f(x)$ 在$[0,1]$上是非负、单调递减的连续函数，且 $0<a<b<1$. 证明：

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

【证明】由积分中值定理

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=af(\xi_1)\geqslant af(a),\quad \xi_1\in[0,a],$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(\xi_2)\leqslant(b-a)f(a),\quad \xi_2\in[a,b].$$

于是
$$\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant f(a)\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

故
$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

【另证】$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow b\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant a\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

令 $F(x)=b\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$，则

$$F'(x)=bf(x)-\int_x^b f(t)\mathrm{d}t+xf(x)=\int_x^b f(x)\mathrm{d}t-\int_x^b f(t)\mathrm{d}t+2xf(x)$$

$$=\int_x^b[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t+2xf(x)\geqslant 0,(\text{由于 } f(x)\geqslant f(t)\geqslant 0).$$

所以 $F(x)$ 单调递增. 又 $F(0)=0$,故

$$F(a)>F(0)=0,\text{即 } b\int_0^a f(x)\mathrm{d}x-a\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0,$$

亦即 $$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant \frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

第三句话:在题设条件中函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f(a)=0$ 或 $f(b)=0$ 或 $f(a)=f(b)=0$,则"不管三七二十一"先用拉格朗日中值定理处理一下再说.

$$f(x)\xlongequal{f(a)=0}f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a),\quad a<\xi<x.$$

或 $$f(x)\xlongequal{f(b)=0}f(x)-f(b)=f'(\xi)(x-b),\quad x<\xi<b.$$

若 $f(a)=f(b)=0$,则 $\begin{cases}f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi_1)(x-a), & a<\xi_1<x,\\ f(x)=f(x)-f(b)=f'(\xi_2)(x-b), & x<\xi_2<b.\end{cases}$

【例 7】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数,且 $f(a)=f(b)=0$,$M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$,试证:

$$\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M.$$

【证明】 $f(x)\xlongequal{f(a)=0}f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi_1),a<\xi_1<x,$ 则

$$|f(x)|=(x-a)|f'(\xi_1)|\leqslant(x-a)M.$$

同理 $$|f(x)|\leqslant(b-x)M.$$

于是 $$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)M\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)M\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{4}M.$$

故 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}M.$$

即 $$\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M.$$

【例 8】 已知在 $[0,a]$ 上 $|f''(x)|\leqslant M$,且 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取最大值,试证:

$$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma.$$

【证明】 设 $f(c)=\max\limits_{x\in(0,a)}\{f(x)\}$,则 $f'(c)=0$.(费尔马定理)

对 $f'(x)$ 在 $[0,c]$ 与 $[c,a]$ 内分别用拉格朗日中值定理,有

$$f'(c)-f'(0)=f''(\xi_1)c,\quad 0<\xi_1<c,$$

$$f'(a)-f'(c)=f''(\xi_2)(a-c),\quad c<\xi_2<a.$$

于是 $$|f'(0)|=|f''(\xi_1)c|\leqslant Mc,$$

$$|f'(a)|=|f''(\xi_2)(a-c)|\leqslant M(a-c).$$

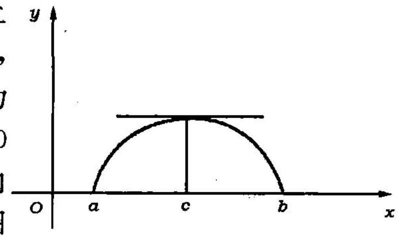
故 $$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Mc+M(a-c)=Ma.$$

【例 9】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的 $f''(x)$,且 $f''(x)<0$,$f(a)=f(b)=0$,则在 (a,b) 上

$f(x)>0$，且

$$\int_a^b\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>\frac{4}{b-a}.$$

【证明】 由 $f''(x)<0$ 可知，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹函数（图形上凸）；由凹函数性质知，$f(x)$ 大于连接 $(a,f(a))$，$(b,f(b))$ 线段上点的纵坐标．而此线段所在直线即为 $y=0$（x 轴），所以在 (a,b) 上 $f(x)>0$．再由 $f''(x)<0$ 知，$f'(x)$ 是严格单调减少的，从而知 $f(x)$ 在 (a,b) 内有惟一的极大值点，记为 $x=c$．此时 $f'(c)=0$，如右图所示，而在 (a,c) 上，$f'(x)>0$，在 (c,b) 上 $f'(x)<0$．由拉格朗日中值定理，当 $x\in[a,c]$ 时，



$$f(x)=f'(\xi_1)(x-a)+f(a),\quad \xi_1\in(a,x).$$

由 $f'(x)$ 严格递减，$f'(\xi_1)<f'_+(a)$，注意到 $f(a)=0$，有

$$f(x)<f'_+(a)(c-a),x\in[a,c].$$

当 $x\in[c,b]$ 时，同理可得

$$f(x)<[-f'_-(b)](b-c),x\in[c,b].$$

于是
$$\frac{1}{f(x)}>\frac{1}{(c-a)f'_+(a)},x\in[a,c],$$

$$\frac{1}{f(x)}>\frac{1}{(b-c)(-f'_-(b))},x\in[c,b].$$

则
$$\int_a^b\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x=-\int_a^b\frac{f''(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_a^c\frac{-f''(x)}{f(x)}\mathrm{d}x+\int_c^b\frac{-f''(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$$

$$>\int_a^c\frac{-f''(x)}{(c-a)f'_+(a)}\mathrm{d}x+\int_c^b\frac{-f''(x)}{(b-c)(-f'_-(b))}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{(c-a)f'_+(a)}[f'_+(a)-f'(c)]+\frac{1}{(b-c)(-f'_-(b))}[f'(c)-f'_-(b)]$$

$$=\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{b-a}{(c-a)(b-c)}>(b-a)\frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}=\frac{4}{b-a}.$$

第四句话：对定限或变限积分，若被积函数或其主要部分为复合函数，则“不管三七二十一”先做变量替换使之成为简单形式 $f(u)$ 再说．

【例 10】 求下列函数的导数（设 $f(u)$ 是 u 的连续函数）：

(1) $F(y)=\int_0^y f(x-y)\mathrm{d}x$，求 $F'(y)$；　(2) $F(x)=\int_0^{x^2}tf(x-t)\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$；

(3) $F(x)=\int_0^1 f(te^x)\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$；　(4) $F(x)=\int_0^{x^2}xf(x+t)\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$．

【解】 (1) $F(y)\xlongequal{令 u=x-y}\int_{-y}^0 f(u)\mathrm{d}u$，则 $F'(y)=-f(-y)\cdot(-1)=f(-y)$．

(2) $F(x)\xlongequal{令 u=x-t}\int_x^{x-x^2}(x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)=-x\int_x^{x-x^2}f(u)\mathrm{d}u+\int_x^{x-x^2}uf(u)\mathrm{d}u$，