

高等学校教材

高等数学

(第二版)

上册

同济大学数学教研室主编

高等教育出版社

高等学校教材

高等数学

(第二版)

上册

同济大学数学教研室 主编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书第二版是由同济大学数学教研室, 参照1980年高等学校工科数学教材编审委员会审订的《高等数学教学大纲》修订而成的。第一章函数、极限、连续各节几乎重写, 其余各章作了不少更动, 并对习题也作了补充。本书修订稿仍由陆子芬教授任主审, 参加一起审稿的还有盛霖、孙玉麟等同志。

原线性代数、概率论两章未列入本书第二版, 编者参照《工程数学教学大纲》修订后, 将各用《工程数学——线性代数》和《工程数学——概率论》名义出版单行本。

本书分上、下两册。上册内容为函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数, 书末还附有积分表和习题答案。

本书说理浅显, 叙述详细, 例题较多, 便于教学, 可作为高等工业院校教材, 也可作为工程技术人员的自学用书或参考书。

责任编辑 丁鹤龄

(京) 112号

高等学校教材

高 等 数 学

(第 二 版)

上 册

同济大学数学教研室 主编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷二厂印装

*

开本850×1168 1/32 印张15 字数358 000

1978年3月第1版 1982年5月第2版 1993年4月第19次印刷

印数2 030 256—2 060 563

ISBN 7-04-001252-9/O·402

定价 5.55 元

第二版前言

这次我们参照高等学校工科数学教材编审委员会 1980 年审订的《高等数学教学大纲(草案)》对本书第一版进行了修改。凡是大纲的内容(包括加 * 号及 ** 号的),如果第一版中还没有写进去,这次都补写了。此外也增加了少量超大纲的内容。大纲中加 * 号的内容以及超大纲的内容,一般说来我们在书中都用 * 号标明,并注意到在没有 * 号的部分不引用有 * 号的内容,以便取舍。

除了增加的内容外,这次还改写了第一版中的部分内容,特别是第一章的改动很大,其它各章也都有改动。此外也精简了部分内容,习题部分也作了修改。

第一版中最后两章——线性代数和概率论,在 1980 年审订的大纲中属于工程数学部分。这两章的内容经修改后将作为两本单行本出版,不包括在本书第二版中。

第二版仍由上海海运学院陆子芬教授主审。浙江大学盛骤、孙玉麟同志等也参加了审稿。对他们提出的宝贵意见,我们表示衷心感谢。

编 者

一九八一年十一月

第一版前言

本书分上、下两册。上册包括一元函数微积分学、空间解析几何与向量代数,下册包括多元函数微积分学、级数、微分方程、线性代数和概率论。各章配有习题,书末附有习题答案。

本书可作为高等学校工科高等数学课程的试用教材或教学参考书。

参加本书编写工作的有同济大学王福楹、王福保、蔡森甫、邱伯驹,上海交通大学王嘉善,上海纺织工学院巫锡禾,上海科技大学蔡天亮,上海机械学院王敦珊、周继高,上海铁道学院李鸿祥等同志。

本书由上海海运学院陆子芬教授主审。参加审稿的还有大连工学院刘锡琛,合肥工业大学万迪生、何继文,成都电讯工程学院冯潮清,西北工业大学王德如,浙江大学盛骤、孙玉麟,太原工学院徐永源、张宝玉,上海海运学院朱幼文、卢启兴等同志。

审稿同志都认真审阅了原稿,并提出了不少改进意见,对此我们表示衷心感谢。

限于编者水平,同时编写时间也比较仓促,因而教材中一定存在不妥之处,希望广大读者提出批评和指正。

编 者

一九七八年三月

目 录

第二版前言

第一版前言

第一章 函数与极限	1
第一节 变量与函数	1
一、常量与变量(1) 二、函数概念(3) 三、函数的表示法(6)	
四、函数记号(8) 五、函数的几种特性(10) 六、反函数(13)	
习题 1-1(15)	
第二节 初等函数	17
一、幂函数(17) 二、指数函数与对数函数(18) 三、三角函数与反三角函数(20)	
四、复合函数 初等函数(24) 五、双曲函数与反双曲函数(26) 习题 1-2(30)	
第三节 数列的极限	32
习题 1-3(39)	
第四节 函数的极限	39
一、自变量趋向有限值时函数的极限(40) 二、自变量趋向无穷大时函数的极限(45)	
习题 1-4(46)	
第五节 无穷小与无穷大	47
一、无穷小(47) 二、无穷大(48) 习题 1-5(51)	
第六节 极限运算法则	52
习题 1-6(58)	
第七节 极限存在准则 两个重要极限	59
*柯西极限存在准则(65) 习题 1-7(66)	
第八节 无穷小的比较	67
习题 1-8(69)	
第九节 函数的连续性与间断点	69
一、函数的连续性(69) 二、函数的间断点(72) 习题 1-9(75)	

第十节 连续函数的运算与初等函数的连续性	76
一、连续函数的和、积及商的连续性(76) 二、反函数与复合函数的连续性(77) 三、初等函数的连续性(79) 习题 1-10(80)	
第十一节 闭区间上连续函数的性质	81
一、最大值和最小值定理(81) 二、介值定理(82) *三、一致连续性(84) 习题 1-11(85)	
第二章 导数与微分	87
第一节 导数概念	87
一、变化率问题举例(87) 二、导数的定义(90) 三、求导数举例(92) 四、导数的几何意义(96) 五、函数的可导性与连续性之间的关系(98) 习题 2-1(100)	
第二节 函数的和、差、积、商的求导法则	102
一、函数和、差的求导法则(102) 二、常数与函数的积的求导法则(103) 三、函数积的求导法则(106) 四、函数商的求导法则(108) 习题 2-2(110)	
第三节 复合函数的求导法则	112
习题 2-3(118)	
第四节 基本初等函数的导数 初等函数的求导问题	119
一、反函数的导数(119) 二、指数函数的导数(120) 习题 2-4(1)(121) 三、反三角函数的导数(122) 习题 2-4(2)(124) 四、初等函数的求导问题(125) 五、双曲函数与反双曲函数的导数(126) 习题 2-4(3)(127)	
第五节 高阶导数	128
习题 2-5(131)	
第六节 隐函数的导数 由参数方程所确定的函数的导数	132
一、隐函数的导数(132) 二、由参数方程所确定的函数的导数(137) *三、曲线的切线与切点和极点的连线间的夹角(142) 习题 2-6(143)	
第七节 函数的微分	145
一、微分的定义(145) 二、微分的几何意义(148) 三、基本初等函数的微分公式与微分运算法则(149) 习题 2-7(152)	
第八节 微分的应用	154
一、微分在近似计算中的应用(154) 习题 2-8(1)(156) 二、微分在误差估计中的应用(158) 习题 2-8(2)(160)	
第三章 中值定理与导数的应用	162
第一节 中值定理	162
一、罗尔定理(162) 二、拉格朗日中值定理(164) 三、柯西中值定	

理(167) 习题 3-1(169)	
第二节 罗必塔法则	170
习题 3-2(174)	
第三节 泰勒公式	175
习题 3-3(180)	
第四节 函数单调性的判定法	180
习题 3-4(184)	
第五节 函数的极值及其求法	185
习题 3-5(191)	
第六节 最大值、最小值问题	192
习题 3-6(196)	
第七节 曲线的凹凸与拐点	198
习题 3-7(203)	
第八节 函数图形的描绘	204
习题 3-8(209)	
第九节 曲率	210
一、弧微分(210) 二、曲率及其计算公式(211) 三、曲率圆与曲率半径(215) *四、曲率中心的计算公式 渐屈线与渐伸线(217) 习题 3-9(220)	
第十节 方程的近似解	221
一、弦位法(222) 二、切线法(224) 三、综合法(227) 习题 3-10(229)	
第四章 不定积分	230
第一节 不定积分的概念与性质	230
一、原函数与不定积分的概念(230) 二、基本积分表(234) 三、不定积分的性质(236) 习题 4-1(240)	
第二节 换元积分法	241
一、第一类换元法(241) 二、第二类换元法(249) 习题 4-2(256)	
第三节 分部积分法	253
习题 4-3(262)	
第四节 几种特殊类型函数的积分举例	263
一、有理函数的积分举例(263) 二、三角函数的有理式的积分举例(269) 三、简单无理函数的积分举例(271) 习题 4-4(272)	
第五节 积分表的使用	274

习题 4-5(278)

第五章 定积分279

第一节 定积分概念279

一、定积分问题举例(279) 二、定积分定义(283) 习题 5-1(287)

第二节 定积分的性质 中值定理288

习题 5-2(291)

第三节 微积分基本公式292

一、变速直线运动中位置函数与速度函数之间的联系(293) 二、积分上限的函数及其导数(294) 三、牛顿-莱布尼兹公式(296) 习题 5-3(298)

第四节 定积分的换元法300

习题 5-4(305)

第五节 定积分的分部积分法306

习题 5-5(309)

第六节 定积分的近似计算310

一、矩形法(310) 二、梯形法(311) 三、抛物线法(313) 习题 5-6(318)

第七节 广义积分318

一、积分区间为无穷区间(318) 二、被积函数有无穷间断点(321) 习题 5-7(324)

第六章 定积分的应用325

第一节 定积分的元素法325

第二节 平面图形的面积327

一、直角坐标情形(327) 二、极坐标情形(330) 习题 6-2(333)

第三节 体积334

一、旋转体的体积(334) 二、平行截面面积为已知的立体的体积(337)

习题 6-3(339)

第四节 平面曲线的弧长340

一、直角坐标情形(340) 二、参数方程情形(342) 习题 6-4(343)

第五节 功 水压力344

一、变力沿直线所作的功(344) 二、水压力(347) 习题 6-5(348)

第六节 平均值349

一、函数的平均值(349) 二、均方根(352) 习题 6-6(353)

第七章 空间解析几何与向量代数354

第一节 空间直角坐标系	354
一、空间点的直角坐标(354) 二、空间两点间的距离(356) 习题7-1(357)	
第二节 向量及其加减法 向量与数量的乘法	358
一、向量概念(358) 二、向量的加减法(359) 三、向量与数量的乘法(361) 习题7-2(363)	
第三节 向量的坐标	364
一、向量在轴上的投影与投影定理(364) 二、向量在坐标轴上的分向量与向量的坐标(366) 三、向量的模与方向余弦的坐标表示式(370) 习题7-3(372)	
第四节 数量积 向量积 *混合积	372
一、两向量的数量积(372) 二、两向量的向量积(377) *三、向量的混合积(381) 习题7-4(383)	
第五节 平面及其方程	384
一、平面的点法式方程(384) 二、平面的一般方程(386) 三、两平面的夹角(388) 习题7-5(391)	
第六节 空间的直线及其方程	391
一、空间直线的一般方程(391) 二、空间直线的对称式方程与参数方程(392) 三、两直线的夹角(394) 四、直线与平面的夹角(395) 五、杂例(397) 习题7-6(399)	
第七节 曲面及其方程	400
一、曲面方程的概念(400) 二、旋转曲面(402) 三、柱面(405) 习题7-7(406)	
第八节 空间曲线及其方程	407
一、空间曲线的一般方程(407) 二、空间曲线的参数方程(409) 三、空间曲线在坐标面上的投影(411) 习题7-8(412)	
第九节 二次曲面	413
一、椭球面(413) 二、抛物面(415) 三、双曲面(416) 习题7-9(419)	
附表 积分表	420
习题答案	431

第一章 函数与极限

初等数学研究的对象基本上是不变的量，而高等数学则是以变量为研究对象的一门数学。所谓函数关系就是变量之间的依赖关系。极限方法则是研究变量的一种基本方法。本章将介绍变量、函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质。

第一节 变量与函数

一、常量与变量

在观察自然现象或技术过程时，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不起变化，也就是保持一定的数值，这种量叫做常量；还有一些量在过程中是变化着的，也就是可以取不同的数值，这种量叫做变量。

例如，把一个密闭容器内的气体加热时，气体的体积和气体的分子个数保持一定，它们是常量；而气体的温度和压力则是变量，它们取得越来越大的数值。

一个量是常量还是变量，要根据具体情况作出具体分析。例如，就小范围地区来说，重力加速度可以看作常量，但就广大地区来说，重力加速度则是变量。

通常用字母 a, b, c 等表示常量，用字母 x, y, t 等表示变量。

任何一个变量，总有一定的变化范围。例如，某天的最高温度是 14°C 、最低温度是 4°C ，那末，这一天的气温 T 的变化范围就是 4°C 到 14°C ，即变量 T 的变化范围是 4 至 14。

如果变量的变化是连续的，常用区间来表示变量的变化范围。

下面我们引进各种区间的名称和记号.

设 a 与 b 是两个实数, 且 $a < b$. 那末, 满足不等式

$$a \leq x \leq b$$

的一切实数 x 的全体叫做闭区间, 记为 $[a, b]$; 满足不等式

$$a < x < b$$

的一切实数 x 的全体叫做开区间, 记为 (a, b) ; 满足不等式

$$a < x \leq b \text{ 或 } a \leq x < b$$

的一切实数 x 的全体叫做半开区间, 分别用记号 $(a, b]$ 或 $[a, b)$ 表示. 在以上各种情形中, a 和 b 叫做区间的端点, 而 $b - a$ 叫做区间的长度.

在数轴上来说, 区间是指介于某两个点之间的线段上点的全集. 这两点就是区间的端点. 闭区间 $[a, b]$ 与开区间 (a, b) 在数轴上表示出来, 分别如图 1-1(a) 与 (b) 所示.

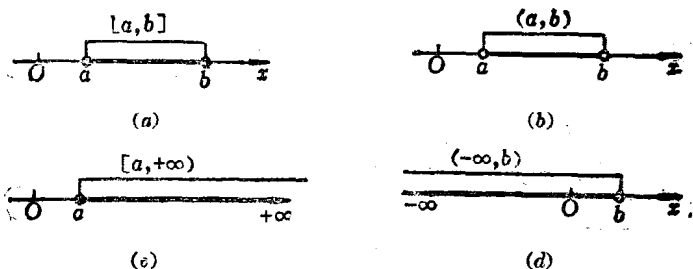


图 1-1

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点的场合, 我们就简单地叫做“区间”, 且也使用“圆括弧”来表示.

除了上述那些有限区间外, 还有一类区间叫做无限区间:

$[a, +\infty)$ 表示不小于 a 的实数的全体 (图 1-1(c)), 有时也写作 $a \leq x < +\infty$;

$(-\infty, b)$ 表示小于 b 的实数的全体 (图 1-1(d)), 有时也写作 $-\infty < x < b$;

$(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数,有时也写作 $-\infty < x < +\infty$.

注意, $+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读作“正无穷大”与“负无穷大”, 它们不是数, 仅仅是记号.

以后, 我们还要用到与区间有关的邻域概念.

设 a 与 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$. 满足不等式

$$|x-a| < \delta$$

的实数 x 的全体叫做点 a 的 δ 邻域, 点 a 叫做这邻域的中心, δ 叫做这邻域的半径. 上述绝对值不等式与不等式

$$- \delta < x - a < \delta$$

等价, 因此有

$$a - \delta < x < a + \delta.$$



图 1-2

从而, 满足不等式 $|x-a| < \delta$

的实数 x 的全体就是开区间 $(a-\delta, a+\delta)$. 所以说, 点 a 的 δ 邻域也就是以点 a 为中心, 而长度为 2δ 的开区间(图 1-2).

二、函数概念

在同一个自然现象或技术过程中, 往往同时有几个变量在变化着. 这几个变量并不是孤立地在变, 而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 现在我们先就两个变量的情形 (多于两个变量的情形以后在第八章再讲) 举出几个例子.

例 1 考虑圆的面积 A 与它的半径 r 之间的相依关系. 大家知道, 它们之间的关系由公式

$$A = \pi r^2$$

给定. 当半径 r 在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时, 由上式就可以确定圆面积 A 的相应数值.

例 2 自由落体运动. 设物体下落的时间为 t , 落下的距离为 s . 假定开始下落的时刻为 $t=0$, 那末 s 与 t 之间的相依关系由公式

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

给定, 其中 g 是重力加速度. 假定物体着地的时刻为 $t=T$, 那末当时间 t 在闭区间 $[0, T]$ 上任意取定一个数值时, 由上式就可以确定 s 的相应数值.

例 3 设有半径为 r 的圆, 考虑内接于该圆的正 n 边形的周长 S_n . 由图 1-3 容易看出, $S_n = 2nr \sin \alpha_n$, 其中 $\alpha_n = \pi/n$. 所以内接正 n 边形的周长 S_n 与边数 n 之间的相依关系由公式

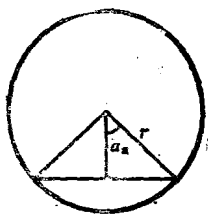


图 1-3

$$S_n = 2nr \sin \frac{\pi}{n}$$

给定. 当边数 n 在 $3, 4, 5, \dots$ 等自然数中任意取定一个数值时, 由上式就可确定周长 S_n 的相应数值.

抽去上面几个例子中所考虑的量的实际意义, 它们都表达了两个变量之间的相依关系, 这种相依关系给出了一种对应法则, 根据这一法则, 当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时, 另一个变量就有确定的值与之对应. 两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 如果当变量 x 在其变化范围内任意取定一个数值时, 量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应, 就叫 y 是 x 的函数.

变量 x 的变化范围叫做这个函数的定义域. 通常 x 叫做自变量, y 叫做因变量.

为了表明 y 是 x 的函数, 我们用记号 $y=f(x)$ 、 $y=\varphi(x)$ 或 $y=F(x)$ 等等来表示. 这里字母“ f ”、“ φ ”、“ F ”表示 y 与 x 之间的对应法则即函数关系, 它们是可以任意采用的. 但如果同时考

察几个不同的函数时,为了避免混淆,就不要用同一个字母来表示不同的函数.

如果自变量取某一数值 x_0 时, 函数有确定的值和它对应, 那末就称函数在 x_0 处有定义. 因此函数的定义域也就是使函数有定义的实数的全体.

函数是由定义域及对应法则所确定的. 因此研究函数时必须注意它的定义域. 在实际问题中, 函数的定义域是根据问题的实际意义来确定的. 如例 1 中, 函数的定义域为无限区间 $(0, +\infty)$, 因为半径 r 可以取任何正数. 又如例 3 中, 函数的定义域为不小于 3 的一切自然数, 因为正 n 边形的边数 n 可以是 3、4、5、... 等自然数中的任何一个.

在数学中, 有时不考虑函数的实际意义, 而抽象地研究用算式表达的函数. 这时我们约定: 函数的定义域就是使算式有意义的自变量的一切实数值. 例如函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1, 1]$, 函数 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-1, 1)$.

自变量取定义域内的某一值时, 函数的对应值叫做函数当自变量取该值时的函数值. 如果自变量在定义域内任取一个确定值时, 函数都只有一个确定值和它对应, 这种函数叫做单值函数, 否则叫做多值函数. 例 1、例 2 和例 3 中的函数都是单值函数. 下面, 我们给出一个多值函数的例子.

例 4 在直角坐标系中, 半径为 r 、圆心在原点的圆的方程是

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

当 x 在闭区间 $[-r, r]$ 上取定一个数值时, 由上式可以确定 y 的一个值(当 $x = \pm r$ 时), 或确定 y 的两个值(当 $-r < x < r$ 时). 所以 y 是 x 的多值函数.

以后凡是没有特别说明时, 函数都是指单值函数.

在函数定义中,并没有要求自变量变化时函数一定要变,重要的是:当自变量 x 在定义域中任取一数值时,函数有确定的值和它对应. 因此,我们可以把常量当作函数来看待,即常量是这样一个函数,它对于自变量的一切值来说,函数值都是相等的.

三、函数的表示法

在函数的定义中,关于用什么方法来表达函数,并没有加以限制. 常用的表达函数的方法有以下三种.

1. **公式法** 用数学式子表示自变量和因变量之间对应关系的方法叫做公式法. 前面例 1 至例 4 都是用公式法表示的函数. 公式法的优点是简明准确,便于理论分析. 但公式法表示的函数不够直观,并在有些实际问题中遇到的函数关系,很难甚至不能用公式法表示.

2. **表格法** 在实际应用中,常将一系列的自变量值与对应的函数值列成表,如平方表、对数表、三角函数表、三角函数对数表等等. 用此表示函数的方法叫做表格法. 表格法的优点是可以直接从自变量的值查到对应的函数值. 但表中所列数据往往不完全,同时用表格法表示的函数不便于进行理论分析.

3. **图示法** 对于函数 $y=f(x)$, 在其定义域内取一个 x 值时,对应地就有一个 y 值. 在平面直角坐标系 xOy 中以这一对 x 、 y 值为坐标定出一个点 $M(x, y)$. 一般当 x 变化时,点 M 就在平面上运动并描成一条曲线(图 1-4). 这条曲线叫做函数 $y=f(x)$ 的图形.

反过来说,如果坐标平面上的曲线与任何一条平行于 y 轴的直线

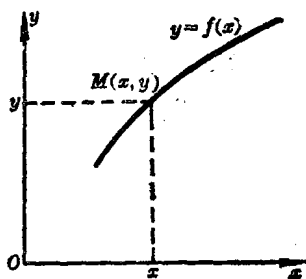


图 1-4

至多只有一个交点,那末这条曲线表示一个单值函数,当自变量值等于曲线上点的横坐标时,对应的函数值即等于该点的纵坐标.因此函数也可由坐标平面上的曲线来表示.这样表示函数的方法叫做函数的图示法.用温度自动记录仪描下来的温度变化曲线(图 1-5),它表示了温度 T 与时间 t 的函数关系,这就是用图示法表示函数的例子.图示法的优点是鲜明直观,但不便于作理论分析.

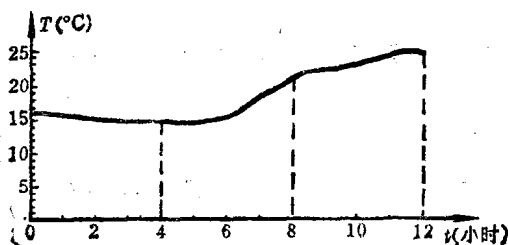


图 1-5

以后我们所讨论的函数,常用公式法表示.我们指出,用公式法来表示函数时,有时需要在不同的范围中用不同的式子来表示一个函数,即所谓分段函数.例如

$$y=f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1; \\ 1+x, & \text{当 } x > 1 \end{cases}$$

是确定在区间 $[0, +\infty)$ 上的一个函数,当自变量 x 取闭区间 $[0, 1]$ 上的数值时,对应的函数值 y 由公式 $y=2\sqrt{x}$ 确定;当 x 取区间 $(1, +\infty)$ 内的数值时, y 由公式 $y=1+x$ 确定.它的图形如图 1-6.

又例如

$$y=f(x)=\begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0; \\ 0, & \text{当 } x = 0; \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

是确定在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的一个函数,它的图形如图 1-7.

在不同范围用不同式子来表示一个(不是几个!)函数,不仅与