新世纪 全国高等中医药院校规划教材

医学高等数学

供中医药类专业用

主编 周喆

中国中医药出版社

新世纪全国高等中医药院校规划教材

医学高等数学

（供中医药类专业用）

主　编　周　喆（长春中医药大学）

副主编　关明云（辽宁中医药大学）

　　　　邵建华（上海中医药大学）

　　　　王世钦（甘肃中医学院）

　　　　何　雁（江西中医学院）

　　　　赵文峰（河南中医学院）

　　　　黄　浩（福建中医药大学）

中国中医药出版社

·北　京·

图书在版编目（CIP）数据

医学高等数学/周喆主编. —北京：中国中医药出版社，2010.7

新世纪全国高等中医药院校规划教材

ISBN 978-7-80231-971-4

Ⅰ.①医… Ⅱ.①周… Ⅲ.①医用数学-中医学院-教材 Ⅳ.①R311

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第081519号

中国中医药出版社出版

北京市朝阳区北三环东路28号易亨大厦16层

邮政编码 100013

传真 010 64405750

北京泰锐印刷有限公司印刷

各地新华书店经销

*

开本 850×1168 1/16 印张8.75 字数 185千字

2010年7月第1版 2010年7月第1次印刷

书 号 ISBN 978-7-80231-971-4

*

定价 12.00元

网址 www.cptcm.com

如有印装质量问题请与本社出版部调换

社长热线 010 64405720

读者服务部电话 010 64065415 010 84042153

书店网址 csln.net/qksd/

全国高等中医药教材建设
专家指导委员会

新世纪全国高等中医药院校规划教材

《医学高等数学》编委会

主　编　周　喆　（长春中医药大学）

副主编　关明云　（辽宁中医药大学）

邵建华　（上海中医药大学）

王世钦　（甘肃中医学院）

何　雁　（江西中医学院）

赵文峰　（河南中医学院）

黄　浩　（福建中医药大学）

编　委　于鹤丹　（黑龙江中医药大学）

曹治清　（成都中医药大学）

谢海林　（山西中医学院）

严云良　（浙江中医药大学）

张忠文　（甘肃中医学院）

胡灵芝　（陕西中医学院）

韩曦英　（长春中医药大学）

武京君　（山东中医药大学）

尹立群　（天津中医药大学）

韦　杰　（贵阳中医学院）

凌高宏　（湖南中医药大学）

前　言

“新世纪全国高等中医药院校规划教材”是依据教育部有关普通高等教育教材建设与改革的文件精神，在国家中医药管理局规划指导下，由全国中医药高等教育学会组织、全国高等中医药院校联合编写、中国中医药出版社出版的高等中医药院校本科系列教材。

本系列教材采用了“政府指导、学会主办、院校联办、出版社协办”的运作机制。为确保教材的质量，在教育部和国家中医药管理局指导下，建立了系统完善的教材管理体制，成立了全国高等中医药专业教材建设专家指导委员会、全国高等中医药教材建设研究会，对本系列教材进行了整体规划，在主编遴选、教学大纲和教材编写大纲、教材质量等方面进行了严格的审查、审定。

本系列教材立足改革，更新观念，以新的专业目录为依据，以国家规划教材为重点，按主干教材、配套教材、改革创新教材分类，以宽基础、重实践为原则，是一套以国家规划教材为重点，门类齐全，适应培养新世纪中医药高素质、创造性人才需要的系列教材。在教材组织编写的过程中引入了竞争机制，教材主编和参编人员全国招标，按照条件严格遴选，专家指导委员会审议，择优确定，形成了一支以一线专家为主体，以老带新的高水平的教材编写队伍，并实行主编负责制，以确保教材质量。

本系列教材编写实施“精品战略”，从教材规划到教材编写、专家审稿、编辑加工、出版，都有计划、有步骤实施，层层把关，步步强化，使“精品意识”、“质量意识”贯彻全过程。每种教材的教学大纲、编写大纲、样稿、全稿，都经过专家指导委员会审定，都经历了编写会、审稿会、定稿会的反复论证，不断完善，重点提高内在质量。尤其是根据中医药教材的特点，在继承与发扬、传统与现代、理论与实践、中医与西医等方面进行了重点论证，并在继承传统精髓的基础上择优吸收现代研究成果；在写作方法上，大胆创新，使教材内容更为系统化、科学化、合理化，更便于教学，更利于学生系统掌握基本

理论、基本知识和基本技能；注意体现素质教育和创新能力与实践能力的培养，为学生知识、能力、素质协调发展创造条件。

在出版方面，出版社全面提高“精品意识”、“质量意识”，在编辑、设计、印刷、装帧各个环节都精心组织、精心施工，力争出版高水平的精品教材，使中医药教材的出版质量上一个新台阶。

本系列教材目前已出版或正在出版的有中医专业、针灸推拿专业、中药专业、药学专业、制药工程专业、药物制剂专业、中西医结合专业、管理专业、护理专业及计算机课程教材，共计250余种，其中121种被教育部评选为“普通高等教育‘十一五’国家级规划教材”。

本套教材的编写出版，得到了中国中医药出版社和全国高等中医药院校在人力、物力上的大力支持，为教材的编写出版创造了有利条件。各高等中医药院校，既是教材的使用单位，又是教材编写任务的承担单位，在本套教材建设中起到了主体作用。在此一并致谢！

本系列教材在继承的基础上进行了一定力度的改革与创新，在探索的过程中难免有不足之处，甚或错漏之处，敬请各教学单位、各位教学人员在使用中发现问题，及时提出批评指正，以便我们重印或再版时予以修改，使教材质量不断提高，更好地适应新世纪中医药人才培养需要。

全国中医药高等教育学会
全国高等中医药教材建设研究会
2009年7月

编写说明

数学教育的重要性源于它的教育价值。众所周知，数学首先是一种计算工具，在现代科技发展的时代，精确地量化处理实际问题是众多学科的一致要求，这一点已在充分影响现代社会发展的计算机技术中得到体现。同时，数学是一种语言，是一种高度抽象的科学语言，正是这种高度抽象，使其成为一种从量的角度对客观事物及其变化规律进行研究的有力工具。传统的力学、物理学、天文学以及化学，正是借助于这样的工具使学科自身获得突飞猛进的发展。进入 20 世纪以后，不仅以生物学为代表的众多自然学科逐步迈入这个领域；相对论、量子力学、信息论、控制论等借助数学工具成为了现代科学的里程碑；而诸如语言学、文学、史学、哲学、经济学等社会科学也纷纷向这一方向迈进。数学已经成为所有学科现代发展的重要基础。数学不仅是知识，同时重要的它还是一种严密的思维运动。数学教育的基本要素是使认识与结论具有严格的逻辑性，正是这种由数学化引起的思维变化，使人类的思维能力得到空前的提高，为人类文化的高度发达和科学技术的迅猛发展开辟了广阔空间。因此在当前深化教育改革、全面推进素质教育的形势下，加强学生的数学教育尤为重要。数学教育的价值还体现在它培养学生真诚、正直、坚韧和勇敢的性格特征，以及严谨、踏实的工作作风上；体现在培养学生正确认识客观世界的统一性、多样性、秩序、和谐、整齐、组织、结构等审美情趣和能力上。因此，高等数学已经成为高等院校众多专业学生必修的重要基础课程。

本教材是“新世纪全国高等中医药院校规划教材”之一，为适应我国高等中医药教育发展的需要，全面推进素质教育，培养新世纪高素质创新人材而编写的。本教材由全国中医药院校长期从事数学教学工作的教师编写，可供中医、中药、针灸推拿、骨伤、护理、医药管理等专业学生使用。针对少学时的教学需要，在编写中我们注意了在保持数学学科本身的科学性与系统性的前提下适量减少了一些理论推导；同时又注意了进一步突出数学的应用性，借以开拓学生思路，激发学生的创新意识。

全书共 6 章，包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分与二重积分、微分方程初步，设置有部分带 * 号的内容以适应分层教学的需要。

由于我们水平有限，编写时间仓促，不当与错误之处肯定不少，恳请读者与同行提出宝贵意见，以便再版时修订提高。

《医学高等数学》编委会

2010 年 6 月

目 录

1 函数与极限

函数是高等数学的主要研究对象，极限是高等数学研究函数的重要工具，并且是微积分各种概念及计算方法建立和应用的基础. 因此，函数和极限是高等数学中最重要的基础概念.

1.1 函数

1.1.1 常量与变量

在某一变化过程中，保持同一数值的量称为**常量**，可以取不同数值的量称为**变量**.

例 1 圆的面积公式为 $A=\pi r^2$，其中 π 是固定不变的量，为常量；r、A 是变化的量，为变量.

在实际问题中，一个量是常量还是变量，要视情况而定. 精确度要求不高时，整个地球上的重力加速度可以看成常量. 要求比较精确时，整个地球上重力加速度就是变量，同一地点的重力加速度可以看成常量. 若考虑地层运动引起重力加速度变化，则同一地点的重力加速度也是变量.

1.1.2 函数的概念

在例 1 圆面积公式中，半径 r 在 $(0,+\infty)$ 范围内变化时，面积 A 按公式确定的值进行对应. 两个变量间的这种依存关系称为函数.

定义 1 设 x、y 为同一过程的两个变量. 若对非空数集 D 中任意一个 x（记为 $\forall x\in D$），在数集 M 中存在 y（记为 $\exists y\in M$），按一定的法则 f 有唯一确定的值与之对应，则称 f 是定义在 D 上的**函数**，记为 $y=f(x)$.

x 称为**自变量**，y 称为**因变量**或**函数**. 自变量的取值范围 D 称为**定义域**，因变量 y 相应的取值范围 M 称为函数的**值域**.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值 y_0 称为函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的**函数值**，常记为 $f(x_0)$、$y(x_0)$、$y|_{x=x_0}$.

函数是一个变量对另一个变量依赖关系的抽象模型，可以把函数看作一部机器：当把 x 作为机器的输入放入机器，则通过机器的处理产生了机器的一个输出 $f(x)$. 函数的定义域就被看作是一切允许输入的集合，函数的值域被看作是一切

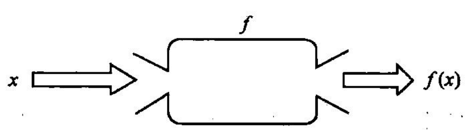

图 1-1

可能输出的集合．如图 1-1 所示．

例 2 在做细菌培养时，细菌的数量 N 依赖于时间，如果在开始培养时细菌的数量为 5000 个，并且过 1 小时细菌的数量就要倍增，试建立细菌的数量 N 关于时间 t 的函数关系式．

解 开始培养时细菌的数量为 5000 个，并且过 1 小时细菌的数量就要倍增，则：

$T=1$ 时，$N=500\times 2$

$T=2$ 时，$N=500\times 2\times 2=500\times 2^2$

$T=3$ 时，$N=500\times 2\times 2\times 2=500\times 2^3$

…………

$T=t$ 时，$N=500\times\underbrace{2\times 2\times 2\times\cdots\times 2}_{t\text{个}}=500\times 2^t$

那么 t 小时后细菌的数量将为 $N=500\times 2^t$ 个，这里，对于 t 的每个值，就有 N 的一个对应值，这时我们就说 N 是 t 的一个函数．

例 3 讨论由关系式 $x^2+y^2=1$ 确定的函数．

解 根据勾股定理，x^2+y^2 等于从原点到坐标点（x，y）的距离的平方，所以关系式 $x^2+y^2=1$ 确定了与原点的距离是 1 的那些点的轨迹，也就是半径为 1 的圆，如图 1-2 所示．但在这个对应关系中，y 不是唯一的，习惯上我们称确定的是一个多值函数．如果附加一个条件“$y\geqslant 0$”，确定的就是一个多值函数的单值分支 $y=\sqrt{1-x^2}$；同样，附加条件“$y\leqslant 0$”即可获得另一个单值分支 $y=-\sqrt{1-x^2}$．

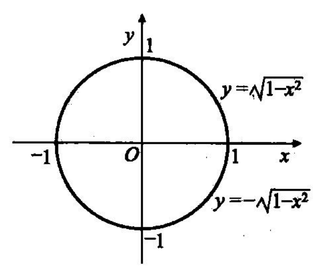

图 1-2

如果对应法则在整个定义域 D 上不能用一个解析式表示，而必须把 D 分为若干部分，在各部分要用不同的解析式表示，则这样的函数称为**分段函数**．分段函数的函数值，要注意自变量所取值在什么范围．

例 4 绝对值函数

$$y=|x|=\sqrt{x^2}=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

和符号函数

$$y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

虽然形式上也可以写为一个式子，但是，这两个函数的对应法则都必须把 D 分为小区间表示．因而，它们都是分段函数，图形分别如图 1-3、图 1-4 所示．

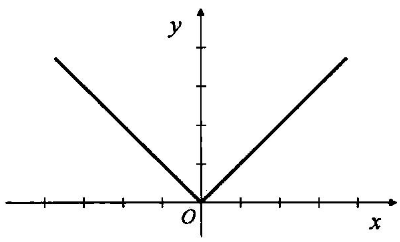

图 1-3

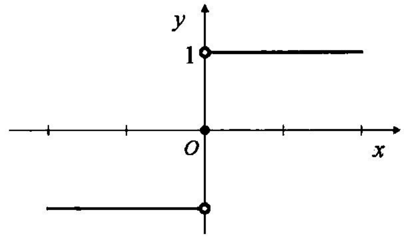

图 1-4

例 5 在生理学研究中，有人根据血液中胰岛素浓度 $C(t)$（单位/毫升）随时间 t(分钟)变化的数据，建立经验公式，即

$$C(t)=\begin{cases} t(10-t) & 0\leqslant t\leqslant 5 \\ 25e^{-k(t-5)} & t>5 \end{cases}$$

求胰岛素浓度函数 $C(t)$的定义域.

解 胰岛素浓度 $C(t)$是时间 t 的分段函数，定义域 $D=[0,5]\cup(5,+\infty)=[0,+\infty)$.

定义域和对应法则决定了函数的构成，是函数的两要素. 两个函数只有在其定义域及对应法则都相同时，它们才是相同的.

例 6 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ 与 $u=1$ 是相同的函数.

解 虽然变量用的字母不同、解析式的形式不同，但它们的定义域与对应法则相同. 因此，它们是相同的函数.

例 7 $y=x$ 与 $w=|t|$ 是不同的函数.

解 虽然定义域都为（$-\infty,+\infty$），但它们的对应法则不同，如：自变量取值 -1，$y=x$用 -1 对应，$w=|t|$用 1 对应. 因此，它们是不同的函数.

1.1.3 函数的表示法

由于函数的对应法则是多种多样的，所以表示出一个函数要采取适当的方法：

用一个公式或一个解析式来表示函数对应法则，这种表示方法称为解析法，如例 1、例 2 等.

法国数学家笛卡儿（Descartes）在平面上引进了直角坐标，用坐标点的轨迹来表示两个变量的依存关系，这样，函数就是满足条件 $y=f(x)$ 坐标点（x，y）的一条曲线.

用一张表格表示函数对应关系这种表示方法称为列表法.

例 8 在盛有营养液的试管中培养草履虫，观察草履虫在各天生长的数量，如表 1-1.

表 1-1 草履虫在各天生长的数据

t(天)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
N(只)	2	20	135	320	374	378	380	361	361

这里，对于变量天数 t，每取一个值，有唯一对应的草履虫数量 N.

在坐标系中用一段曲线表示函数的对应法则，这种表示方法称为图形法.

例 9 图 1-5 是气温自动记录仪描出的某一天气温变化曲线，它给出了时间 t 与气温 T 之间的对应关系.

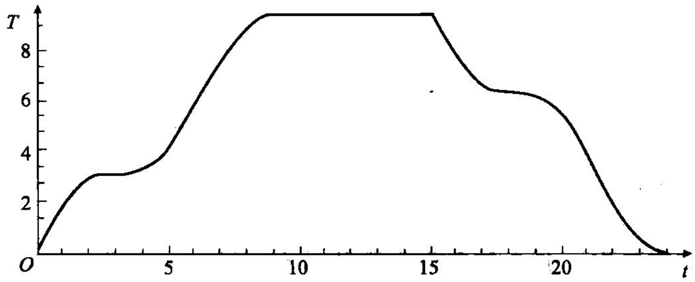

图 1-5

解析法用数学公式或方程表示变量间的函数关系，优点是便于计算和理论分析. 解析式明显地用一个变量的代数式表示另一个变量时，称为**显函数**，如 $A=\pi r^2$；解析式没有明显地用一个变量的代数式表示另一个变量时，称为**隐函数**，如 $x^2+y^2=1$、$e^{xy}+y=\sin x$ 等.

列表法用表格列出变量间的函数关系，优点是可以不用计算直接从表上读出函数值. 试验数据常使用列表法，使用统计方法建立函数关系的解析式，称为经验公式.

图形法用坐标系中的图形表示变量间的函数关系，优点是直观、明显. 心电图、自动记录的气温曲线、试验数据绘制的散点图或曲线，都是用图形法表示函数.

在实际问题中，三种表示方法常结合使用.

1.1.4 几种具有特殊性质的函数

有些函数具有一些特殊的性质，利用这些特性可方便于对这些函数的研究.

1. 奇偶性

若 $\forall x\in D$，总有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**. 偶函数的图形关于纵轴对称.

若 $\forall x\in D$，总有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**. 奇函数图形关于原点对称.

例如：$y=x^2$ 及 $y=\cos x$ 是偶函数，$y=\dfrac{1}{x}$ 及 $y=\sin x$ 是奇函数，$y=x+\cos x$ 是非奇非偶函数.

2. 单调性

若区间 $(a,b)\subset D$，$\forall x_1, x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上**单调递增**. 若区间 $(a,b)\subset D$，$\forall x_1, x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上**单调递减**. 单调递增与单调递减的函数统称**单调函数**.

单调递增函数的图形沿横轴正向上升，单调递减函数的图形沿横轴正向下降. 例如：函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 单调递减，在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增，在整个区间 $(-\infty,+\infty)$ 不是单调的.

3. 有界性

区间$(a,b)\subset D$，若$\exists$常数k，使$\forall x\in(a,b)$，总有$f(x)\leqslant k$，则称$f(x)$在区间(a,b)有**上界**k；若总有$f(x)\geqslant k$，则称$f(x)$在区间(a,b)有**下界**k. 若$f(x)$在区间(a,b)既有上界又有下界，则称$f(x)$是区间(a,b)上的**有界函数**. 有上界函数的图形位于某水平线下方，有下界函数的图形位于某水平线上方. 例如：函数$y=\sin x$在整个区间$(-\infty,+\infty)$上有界；函数$y=\dfrac{1}{x}$在区间$(-\infty,0)$有上界而无下界、在区间$(0,+\infty)$有下界而无上界.

4. 周期性

若$\exists$常数m，使$\forall x\in D$，总有$f(x+m)=f(x)$，则称$f(x)$为**周期函数**，称m为它的**周期**. 周期函数的图形按周期循环出现. 例如：常值函数$y=C$是以任意常数为周期的周期函数，三角函数$y=\sin\omega x$是以$\dfrac{2\pi}{|\omega|}$为最小正周期的周期函数.

1.1.5 反函数

在研究两个变量的函数关系时，可以根据问题需要，选定其中一个变量为自变量、另一个变量为因变量. 例如：$y=2x-1$中，x为自变量、y为因变量. 从解析式解得$x=\dfrac{y+1}{2}$，在这个表达式中可认为y为自变量、x为因变量.

一般地，设函数$y=f(x)$的定义域为D，值域为M. 若$y\in M$，能由解析式$y=f(x)$确定$x\in D$与之对应，得到的函数$x=g(y)$或记为$x=f^{-1}(y)$，称为$y=f(x)$的**反函数**；相对于反函数$x=g(y)$或$x=f^{-1}(y)$来说，$y=f(x)$称为**直接函数**.

直接函数$y=f(x)$单调时，其反函数$x=f^{-1}(y)$是唯一的. 直接函数不单调时，与之对应的反函数可能是多个. 例如：$y=x^2$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，在定义区间不单调，所以它将在区间$[0,+\infty)$上对应一个反函数$x=\sqrt{y}$；在同一区间上再对应另一个反函数$x=-\sqrt{y}$. $x=\sqrt{y}$和$x=-\sqrt{y}$各称为$y=f(x)$反函数的一个分支.

习惯上，用x表示自变量，用y表示因变量. 因函数的实质是对应关系，只要对应关系不变，自变量和因变量用什么字母表示无关紧要. 所以，$y=f(x)$的反函数也可改写为$y=f^{-1}(x)$. 改写反函数$y=f^{-1}(x)$与直接函数$y=f(x)$的图形关于直线$y=x$对称. 值得指出的是，单调函数必有反函数.

1.1.6 函数关系的建立

用数学方法来解决实际问题，首先要把实际问题中量的关系抽象成函数，然后才能利用各种数学手段去分析处理.

至于如何建立函数关系，并无一定的法则可循，只能根据具体问题做具体处理.

例 10 一次性手术麻醉包售价 90 元，成本价 60 元，厂家为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 包以上的每多订购 1 包，售价就降低 1 分（例如，某销售商订购 300

包，订购量比 100 包多出 200 包，于是每包就降价 $0.01\times200=2$ 元，销售商可按 88 元/包的价格购进 300 包)，但最低价为 75 元/包.

(1) 把每包的实际售价 P 表示为订购量 x 的函数.

(2) 把利润 T 表示为订购量 x 的函数.

(3) 当一销售商订购了 1000 包时，厂家可获得利润多少?

解 (1) 当 $x\leqslant100$ 包时，售价为 90 元/包，若售价降为 75 元/包，则订购量为

$$95-75=15$$

$$15\div0.01=1500$$

所以，订购量超过 $1500+100=1600$ 包时，每包售价 75 元，因而，实际售价 P 与订购量 x 之间的函数关系为

$$P=\begin{cases}90 & x\leqslant100\\ 90-(x-100)\times0.01 & 100<x<1600\\ 75 & x\geqslant1600\end{cases}$$

(2) 每包利润是实际售价 P 与成本之差，故

$$T=(P-60)x$$

(3) 当 $x=1000$ 时，由 (1) 可计算出每包售价

$$P=90-(1000-100)\times0.01=81$$

由 (2) 可知 $T=(P-60)x=(81-60)\times1000=21000$ 元

例 11 某人从美国到加拿大度假，他把美元兑换成加拿大元时，发现币面增加 12%，度假结束后把加拿大元兑换成美元时，币面数值减少 12%，请把这两个兑换函数表示出来．若此人把 1000 美元兑换成加拿大元，却因故未能去成加拿大，于是他又将加拿大元兑换成美元，问他是亏了钱还是赚了钱?

解 设 $f_1(x)$ 表示将 x 美元换成加拿大元的币值面数量.

$f_2(y)$ 表示将 y 加拿大元换成美元的面值数量，则有

$$f_1(x)=x+12\%x=1.12x \quad x\geqslant0$$

$$f_2(y)=y-12\%y=0.08y \quad y\geqslant0$$

而 $$f_2(f_1(x))=0.88f_1(x)=0.88\times1.12x=0.9856x$$

令 $x=1000$，则 $0.9856x=985.6$

$1000-985.6=14.4$ 美元，所以他亏了 14.4 美元

1.2 初等函数

1.2.1 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数，统称为基本初等函数.

基本初等函数中，以 10 为底的对数称常用对数，记为 $\lg x$；以 e 为底的对数称自然对