


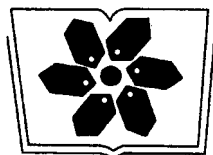
现代物理基础丛书

30

# 经典宇宙和量子宇宙

王永久 著

 科学出版社  
www.sciencep.com



中国科学院科学出版基金资助出版

现代物理基础丛书 30

# 经典宇宙和量子宇宙

王永久 著

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书系统地阐述了宇宙学近年来的新进展,包括作者和合作者们以及国内外同行学者们的近期研究成果.全书包括引力理论基础、广义相对论宇宙学、宇宙的暴胀、量子宇宙学等4篇;宇宙动力学方程、弗里德曼宇宙模型、其他宇宙模型、奇点定理、暗物质和暗能量、宇宙的暴胀、dilaton宇宙解、宇宙暴胀的机制、哈特-霍金宇宙波函数、宇宙结构的起源、虫洞波谱、Vilenkin的量子宇宙学、诱导引力及其量子宇宙学模型、圈量子宇宙学的解析表述、宇宙创生的量子特性、额外维度和膜宇宙理论等21章114节.

本书可供理论物理、天体物理和应用数学专业的硕士生、博士生和研究人员阅读,也可供高年级本科生和自考者参考.

### 图书在版编目(CIP)数据

经典宇宙和量子宇宙/王永久著. —北京: 科学出版社, 2010

(现代物理基础丛书; 30)

ISBN 978-7-03-026555-5

I. 经… II. 王… III. 宇宙学 IV. P159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 016274 号

责任编辑: 张 静 杨 然 / 责任校对: 李奕莹

责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

骏 志 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2010年2月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2010年2月第一次印刷 印张: 30 1/2

印数: 1—2 500 字数: 595 000

定价: 89.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

## 《现代物理基础丛书》编委会

主 编 杨国桢

副主编 阎守胜 聂玉昕

编 委 (按姓氏笔画排序)

王 牧	王鼎盛	朱邦芬	刘寄星
邹振隆	宋菲君	张元仲	张守著
张海澜	张焕乔	张维岩	侯建国
侯晓远	夏建白	黄 涛	解思深

## 前 言

宇宙是物理学研究的最大对象. 宇宙学是建立在引力理论基础上的. 1687 年, 牛顿创立了第一个引力理论, 这是人类对自然界普遍存在的力——引力的认识的第一次升华. 牛顿引力理论首次揭开了行星运动之谜, 奇迹般地预言了两个行星(海王星和冥王星)的存在并被天文观测所证实, 从此牛顿的名字誉满全球. 直至 20 世纪初, 这一理论是人们普遍接受的、唯一正确的引力理论. 随着人类智慧的发展, 牛顿引力理论的困难日益引起学者们的重视: 它无法解释天文学家观测到的事实——水星近点的移动, 无法解释物体的引力质量等于惯性质量……

牛顿引力理论无法研究宇宙. 用牛顿引力理论研究宇宙会导致著名的 Newman 疑难.

1916 年, 爱因斯坦以全新的观点创立了新的引力理论——广义相对论, 这是人类对引力认识的第二次升华. 爱因斯坦引力理论将时-空几何和引力场统为一体, 以其简洁的逻辑和优美的结构令学者们叹服甚至陶醉. 它圆满地解决了牛顿引力理论的困难, 并将牛顿引力理论纳入自己的特殊情况(弱场近似).

爱因斯坦引力理论(广义相对论)的建立, 第一次为宇宙学提供了动力学基础, 使宇宙学成为一门定量的科学. 爱因斯坦的引力场方程可以用于宇宙, 作为宇宙演化的动力学方程. 因此, 应用广义相对论, 可以根据宇宙的现在研究宇宙的去和未来.

本书的内容包括广义相对论宇宙学(即标准宇宙学或大爆炸宇宙学)、宇宙的暴胀和量子宇宙学三个部分. 在内容安排上侧重于宇宙的暴胀和量子宇宙学, 特别是该领域近年来的新进展, 包括宇宙暴胀的机制、暴胀和膨胀的自然衔接、dilaton 宇宙解、膜宇宙以及近两年用圈量子宇宙学方法给出的宇宙创生过程的量子特性.

本书第一篇是爱因斯坦引力理论基础, 为后几篇的叙述做必要的准备. 第二篇阐述广义相对论大爆炸宇宙学. 大爆炸宇宙学成功地解释了自  $t = 10^{-2}\text{s}$ (轻核形成) 至  $t = 10^{10}\text{y}$ (现在) 宇宙演化阶段的观测事实. 其中包括元素的起源(氦丰度测量)、星系光谱的宇宙学红移、3K 微波背景辐射、星系计数、宇宙大尺度的均匀各向同性等. 宇宙背景辐射的观测两次获得诺贝尔物理学奖(1978 年, 2006 年), 就是因为它们支持了大爆炸宇宙模型. 由于大爆炸宇宙模型普通为人们所接受, 故称之为标准宇宙模型. 然而标准宇宙模型也有它的困难, 就是在  $t < 10^{-10}\text{s}$  这一极早期演化阶段中的 4 个问题: 奇点问题、视界问题, 平直性问题和磁单极问题. 书中第三篇比较详细地阐述了 20 世纪 80 年代诞生的暴胀宇宙学理论. 这一理论解决

了上述 4 个问题中的后三个. 它已经把我们带到了  $t = 10^{-36}$ s 的宇宙极早期, 已接近宇宙的开端. 我们可以把加入了暴胀理论的大爆炸宇宙模型称为新的标准宇宙模型.

近年来, 人们把超弦理论用于研究暴胀宇宙, 发现弦宇宙方程的解可以分成两个对偶分支. 一个分支描述膨胀的 Friedmann-Robertson-Walker 宇宙, 另一个分支描述暴胀宇宙. 只要 dilaton 势取通常的确定值, 其中任何一个分支便可以平稳地演化到另一个分支. 即宇宙可以由弗里德曼膨胀自然过渡到暴胀, 再由暴胀自然过渡到弗里德曼膨胀, 自然地解决了宇宙暴胀的“从容退出”问题. dilation 宇宙解对于揭示宇宙暴胀的机制是至关重要的. 书中比较详细地论述了弦宇宙方程和 dilation 宇宙解.

标准宇宙模型 4 个困难问题还剩下一个, 即宇宙的初始奇点 (宇宙的创生) 问题, 这是本书第四篇 (量子宇宙学) 的内容.

广义相对论宇宙学是建立在爱因斯坦引力理论基础上的. 严格地说, 量子宇宙学应该建立在量子引力理论的基础上. 然而, 至今尚未建立一个令人满意的量子引力理论. 尽管如此, 人们仍然可以根据已经了解到的量子引力的某些特征, 去寻找各种途径, 尝试解决量子宇宙学的主要问题——宇宙的创生问题. 20 世纪 80 年代初, 哈特 (Hartle)、霍金 (Hawking)、Vilenkin 等提出, 用宇宙波函数来描述宇宙的量子状态, 宇宙动力学方程即惠勒-德维特方程. 这样, 只要确定宇宙的边界条件, 便可定量地研究宇宙的创生问题了.

对于宇宙波函数的选择和宇宙边界条件的确定, 哈特-霍金和 Vilenkin 分别提出了不同的方案, 这两个方案构成了目前量子宇宙学的两个学派. 本书第四篇比较详细地阐述了哈特-霍金的量子宇宙学理论和韦连金的量子宇宙学理论, 并对这两个理论进行了比较.

2006 年, 美国物理学家 Ashtekar, Pawlowski 和 Singh 用圈量子宇宙学理论给出的量子方程做了系统的解析推导和数值计算, 发现在大爆炸之前可以存在一个与我们的观测宇宙相似的收缩的经典宇宙. 演化一直进入普朗克区域内. 在这两个经典宇宙中时空都是连续的, 广义相对论精确成立. 在收缩的经典宇宙和膨胀的经典宇宙之间的量子通道只持续非常短的一段“时间”, 其间广义相对论失效. 这个 APS 模型中不存在大爆炸奇点, 但与已有的反弹宇宙模型不同, 它是在圈量子宇宙学框架内经过严格的解析推导和数值计算得到的. 唯一遗憾的是假定宇宙是均匀各向同性的. 书中第 9 章比较详细地论述了宇宙学这一最新进展.

由现代高能物理实验和理论分析, 可以确定超对称破缺的能标为 TeV 量级, 再根据量子场论的计算便可确定宇宙常数的量级. 由此确定的宇宙常数值比观测值大 60 个数量级. 进而用广义相对论得到宇宙半径只有毫米量级! 这一尖锐的矛盾曾经令学者们震惊, 而又无可奈何. 超弦理论和膜宇宙理论为这一矛盾的解决提供

了可能。

1996年, Witten 提出了一种十一维时空中的新的超弦理论, 它以十一维超引力理论为低能有效理论, 统一了人们熟悉的 5 种不同类型的超弦理论. 这一理论被称为 M 理论. 超弦理论中的规范场只存在于十维时空中, 即只存在于十一维时空中的一个超曲面上. 这就是膜宇宙论思想在超弦理论中的体现. 而我们的观测宇宙是四维的, 即只存在于十维时空的一个四维超曲面上, 如同一张膜. 我们的观测宇宙就成为了膜宇宙. 在膜宇宙理论中, 宇宙常数与可观测宇宙的半径之间没有直接关系, 宇宙常数可以如超对称破缺和量子场论给出的那么大, 而宇宙半径也可以和观测到的一样大 (即宇宙曲率很小). 在膜宇宙理论中, 把对膜宇宙 (可观测宇宙) 曲率有贡献的那部分宇宙常数称为 “有效宇宙常数”. 如果宇宙常数只对额外维度有贡献, 则 “有效宇宙常数” 为零. 这就是说, 宇宙常数可以很大, “有效宇宙常数” 可以很小. 于是上述宇宙常数问题不复存在. 书中最后一章阐述了膜宇宙理论的主要内容.

本书假定读者已具备量子场论、张量分析和微分几何等基础知识.

作者与同事和合作者荆继良教授、余洪伟教授和唐智明教授一起获得过两次国际引力研究荣誉奖 (美国)、两次中国图书奖和一次教育部科技进步奖; 在几种相关杂志上发表过一些文章 (Phys. Rev. D42 篇, Ap.J.Lett.4 篇, Ap.J.4 篇, JCAP 3 篇, Nucl.Phys.B17 篇, JHEP 6 篇, Phys. Lett. A&B 27 篇, 《中国科学》5 篇), 加上诸多国内外同行学者的原始论文, 其中部分相关内容经补充推导和加工整理已写入书中.

作者深深感谢刘辽教授、郭汉英研究员、Kramer 教授、Will 教授、Cruz 教授、易照华教授和王绶琯院士、曲钦岳院士、杨国桢院士、周又元院士、陆琰院士, 他们曾对作者的部分论文的初稿提出过有益的意见, 对作者的科研工作给予热情的关心和支持.

作者和须重明教授、彭秋和教授、梁灿彬教授、赵峥教授、王永成教授、李新洲教授、桂元星教授、钟在哲教授、黄超光研究员、沈有根研究员、罗俊教授、李芳昱教授、李爱根教授进行过多次讨论和交流, 受益颇多, 在此一并致谢.

作者还要感谢樊军辉教授、吕君丽教授、郭鸿钧教授、黎忠恒教授、鄢德平编审以及黄亦斌、罗新炼、陈菊华、黄秀菊、陈松柏、吴普训、潘启元、张佳林、朱致英、龚添喜诸位博士, 他们对作者的科研工作和本书的出版给予了热情的帮助和支持.

王永久

2008 年 12 月于长沙岳麓山

# 目 录

前言

## 第一篇 引力理论基础

第 1 章 平直时空引力理论	3
1.1 万有引力定律	3
1.2 牛顿引力势	4
1.3 惯性质量和引力质量	5
第 2 章 爱因斯坦引力理论基础	8
2.1 等效原理	8
2.2 广义协变原理	10
2.3 广义相对论中的空间和时间	11
2.4 引力场的势	19
第 3 章 引力场方程	21
3.1 场方程的建立	21
3.2 牛顿极限	23
3.3 关于宇宙因子 $\lambda$ 的讨论	25
3.4 引力场的变分原理	29
3.5 引力场中的 Maxwell 方程	32
3.6 物质的运动方程和物质场的能量-动量张量	37
3.7 Lie 导数和时空的对称性	39
3.8 Killing 矢量	45
3.9 引力场的对称性	52
3.10 引力场方程的正交标架形式	66
3.11 引力场方程的零标架形式	69
3.12 共形 Ricci 平直理想流体的场方程	80
3.13 能量-动量张量	84
第 4 章 引力场的分类	88
4.1 Petrov 分类	88
4.2 电磁场的分类	89



4.3 引力场的分类 .....	93
------------------	----

## 第二篇 广义相对论宇宙学

<b>第 1 章 宇宙学原理和 Robertson-Walker 度规</b> .....	99
1.1 宇宙学原理 .....	99
1.2 Robertson-Walker 度规 .....	99
1.3 空间距离和曲率 .....	101
1.4 粒子和光子的行为 .....	102
<b>第 2 章 宇宙动力学</b> .....	106
2.1 爱因斯坦场方程 .....	106
2.2 弗里德曼宇宙模型 .....	107
2.3 宇宙物质的密度和压强 .....	109
2.4 宇宙年龄的计算 .....	110
2.5 粒子视界和事件视界 .....	112
2.6 含有宇宙因子的模型 .....	113
2.7 宇宙早期结构和背景辐射 .....	115
<b>第 3 章 其他宇宙模型和奇点定理</b> .....	118
3.1 Bianchi-I 型宇宙 .....	118
3.2 五维 Bianchi-V 型宇宙 .....	121
3.3 Gödel 宇宙 .....	123
3.4 六维宇宙 .....	124
3.5 Einstein-Kartan 宇宙 .....	134
3.6 Dirac 假设 .....	140
3.7 奇点定理 .....	140
3.8 暗物质和暗能量 .....	141

## 第三篇 宇宙的暴胀

<b>第 1 章 暴胀宇宙模型概述</b> .....	153
1.1 标准 (大爆炸) 宇宙模型的成就和困难 .....	153
1.2 暴胀宇宙模型概述 .....	157
<b>第 2 章 宇宙的暴胀</b> .....	161
2.1 'tHooft-Polyakov 磁单极 .....	161
2.2 $SU(5)$ 大统一理论和有效势 .....	163

2.3	由假真空向真真空的跃迁	166
2.4	林德 (Linde) 等的工作	171
2.5	量子涨落和密度扰动的演化	176
2.6	小结	179
<b>第 3 章</b>	<b>宇宙暴胀的机制</b>	<b>180</b>
3.1	关于暴胀的自然退出	180
3.2	轴子-伸缩子 (axion-dilaton) 宇宙的真真空涨落	186
3.2.1	经典轴子-伸缩子宇宙	188
3.2.2	共形标架表述	192
3.2.3	标度因子的对偶性	197
3.2.4	线性微扰	199
3.2.5	前大爆炸谱	201
3.2.6	一般的轴子-伸缩子宇宙中的微扰谱	206
3.2.7	讨论	208
3.3	dilaton 宇宙动力学方程的解	209
3.3.1	宇宙模型和场方程	209
3.3.2	小结	219
3.4	dilaton 场的稳定性	220
3.4.1	指数势的标度解	221
3.4.2	超规范子凝聚的标度解	223
<b>第 4 章</b>	<b>关于宇宙的加速膨胀和时空涨落</b>	<b>230</b>
4.1	动力学方程	230
4.2	宇宙的大破裂	233
4.3	Phantom 和宇宙的暴胀	235
4.4	Phantom 宇宙模型中的时空涨落	236
4.4.1	时空涨落	236
4.4.2	Phantom 暗能量宇宙中的引力效应	239
4.4.3	Phantom 暗能量宇宙的结束	245
4.4.4	Phantom 暴胀宇宙中的引力效应	250

## 第四篇 量子宇宙学

<b>第 1 章</b>	<b>宇宙量子力学</b>	<b>257</b>
1.1	量子引力的路径积分表述	257

1.2	宇宙动力学方程	260
1.3	边界条件	262
<b>第 2 章</b>	<b>宇宙波函数</b>	<b>266</b>
2.1	基态波函数的表述	266
2.2	半经典近似	268
2.3	小超空间模型	269
<b>第 3 章</b>	<b>宇宙结构的起源</b>	<b>278</b>
3.1	引言	278
3.2	广义相对论的正则形式	279
3.3	量子化	280
3.4	未受扰动的弗里德曼模型	282
3.5	扰动的弗里德曼模型	283
3.6	三球上的谐函数	287
3.7	作用量和场方程	290
3.8	波函数	293
3.9	边界条件	294
3.10	扰动的增长	297
3.11	实验检验	299
<b>第 4 章</b>	<b>虫洞波谱</b>	<b>301</b>
4.1	边界条件	302
4.2	具有无质量标量场的小超空间模型	304
4.3	有质量标量场的小超空间模型	307
<b>第 5 章</b>	<b>没有假真空的开暴胀</b>	<b>314</b>
5.1	关于宇宙的暴胀	314
5.2	瞬子	314
5.3	$\Omega_0$ 的值	317
5.4	$\Omega_0$ 的估计	319
<b>第 6 章</b>	<b>Vilenkin 的量子宇宙学</b>	<b>321</b>
6.1	基本体系	321
6.2	边界条件	322
6.3	小超空间波函数	324
6.4	$\psi_T$ 和 $\psi_H$ 的宇宙学预言	329
6.5	扰动超空间	331
6.6	开暴胀和人择原理	334

<b>第 7 章 其他量子宇宙学模型</b> .....	341
7.1 有质量标量场模型 .....	341
7.2 含暴胀标量场的模型 .....	342
7.3 整体转动模型 .....	343
7.4 高维模型 .....	345
7.5 一个无奇点的宇宙解 .....	350
7.6 宇宙的拓扑结构 .....	355
7.7 时空泡沫结构和虫洞 .....	357
7.8 一个闭合宇宙模型 .....	360
7.9 一个具有耦合标量场的模型 .....	363
7.10 含有旋量场的模型 .....	369
<b>第 8 章 诱导引力和宇宙模型</b> .....	375
8.1 诱导引力理论 .....	375
8.2 虫洞解 .....	379
8.3 Hosoya 量子化 .....	385
8.4 $\sigma$ 模型的宇宙波函数 .....	393
<b>第 9 章 宇宙创生过程的量子特性</b> .....	399
9.1 改进的约束算符 .....	400
9.1.1 基本表述 .....	400
9.1.2 算符 $\widehat{\exp i(\bar{\mu}c/2)}$ .....	403
9.1.3 约束算符的表达式 .....	405
9.2 Wheeler-De Witt 理论 .....	408
9.2.1 WDW 约束和它的通解 .....	408
9.2.2 WDW 理论的物理 .....	410
9.3 圈量子宇宙的解析和数值结果 .....	412
<b>第 10 章 膜宇宙理论</b> .....	417
10.1 宇宙常数和膜宇宙概述 .....	417
10.2 Randall-Sundrum 膜宇宙模型 .....	420
10.2.1 由五维爱因斯坦场方程得到的弗里德曼方程 .....	422
10.2.2 导出爱因斯坦场方程的另一个方法 .....	424
10.2.3 膜上的慢滚动暴胀 .....	426
10.3 含有五维时空标量场的模型 .....	429
10.3.1 BPS 背景 .....	429
10.3.2 de Sitter 膜和反 de Sitter 膜 .....	430

---

10.3.3	五维时空标量场和投影方法	431
10.3.4	微调 and 宇宙加速膨胀	434
10.3.5	膜宇宙的演化	434
10.3.6	小结	435
10.4	静态五维时空中运动的膜	435
10.4.1	在 AdS-Schwarzschild 时空中膜的运动	436
10.4.2	运动的膜	436
10.5	双膜系统的宇宙学	440
10.5.1	低能有效作用量	441
10.5.2	观测约束	442
10.5.3	宇宙学含义	443
10.6	膜碰撞	445
10.7	膜宇宙模型中的短程线	447
10.8	膜宇宙模型中的零短程线	447
10.9	额外维非稳定的情况	449
<b>参考文献</b>		455
<b>《现代物理基础丛书》已出版书目</b>		471

# 第一篇 引力理论基础

在人们已经知道的诸种力中, 引力是唯一不可屏蔽的长程力, 对于分布于大尺度时空中的物质和时空本身, 引力是起决定作用的力. 因此, 引力决定宇宙动力学, 从而决定宇宙的演化. 任何定量的宇宙学理论都必须以引力理论为基础, 然而牛顿引力理论不能研究宇宙, 用牛顿引力理论研究宇宙将导致著名的 Newman 疑难. 宇宙学以爱因斯坦的引力理论为基础.



# 第 1 章 平直时空引力理论

## 1.1 万有引力定律

两个质量分别为  $M$  和  $M'$  的质点相距  $r$  时, 其间存在一引力

$$F = K \frac{MM'}{r^2}, \quad (1.1.1)$$

式中常数  $M$  和  $M'$  是两质点的引力质量;  $K$  为普通常数, 它的数值决定于单位制的选择.

牛顿的万有引力定律的建立, 使人们能够严格地导出行星轨道的所有参数, 能够轻而易举地推得开普勒三定律. 从而, 人们第一次揭开了天体运行之谜. 1846 年, 勒威耶和亚当斯根据天王星轨道的摄动, 应用牛顿的万有引力定律, 成功地预言了当时尚未发现的两颗行星 (海王星和冥王星, 冥王星稍晚一些) 的存在, 后来果然被天文观察所证实. 从此, 牛顿的平直时空引力理论得到举世公认, 牛顿的名字誉满全球. 此外, 牛顿引力定律还成功地解释了潮汐现象、地球的形状等地球物理现象. 牛顿引力理论是第一个成功的引力理论. 但是这一理论也有不可克服的困难.

首先, 由式 (1.1.1) 所确定的力是超距作用力. 根据近代的和经典的概念, 这都是不可理解的. 甚至牛顿本人也认为是无法接受的.

更重要的是, 牛顿引力理论与实验事实不相符: 牛顿引力定律 (1.1.1) 无法解释天文观测发现的水星近日点的进动这一现象.

人们曾经试图对式 (1.1.1) 进行修正. 霍耳 (Holl) 提出

$$F(r) = K \frac{MM'}{r^N}. \quad (1.1.2)$$

按照水星的实验观测资料, 欲使式 (1.1.2) 与观测结果相符合, 应有  $N \approx 2.00000016$ . 可是如果  $N$  取这一数值, 则式 (1.1.2) 又无法与月球的运动规律相符合.

人们也曾经试图给式 (1.1.1) 附加上按  $\frac{1}{r^n}$  规律变化的附加项

$$F(r) = K \frac{MM'}{r^2} \left( 1 + \frac{\alpha}{r^n} \right), \quad (1.1.3)$$

式中  $n = 3, 4$  或  $5$ . 按行星轨道近日点的进动,  $\alpha$  应为正数. 不难看到, 无论  $\alpha$  取什么值都无法符合水星和其他行星以及月球的运动规律.



牛顿引力理论不能研究宇宙. 用牛顿引力理论研究宇宙将导致著名的 Newman 疑难, 其内容如下:

根据宇宙学原理, 宇宙是各向同性的, 宇宙物质是均匀分布的. 由高斯定理和式 (1.1.1) 容易得到

$$\int \nabla \cdot \mathbf{g} dv = \oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s}, \quad (1.1.4)$$

式中  $\mathbf{g}$  为引力场强. 和静电学的情况类似, 注意  $\rho = \text{const}$ , 得到  $|\mathbf{g}| \sim \rho R$ .  $R$  可取得任意大, 于是  $g$  值不确定. 这是不可接受的.

宇宙是无限的还将导致著名的 Olbers 佯谬. 设宇宙中任一点  $O$ , 在以  $O$  点为圆心以  $r$  为半径的球壳内, 恒星数为  $4\pi r^2 \rho dr$ ,  $\rho$  为恒星密度. 球壳内每颗恒星在  $O$  点产生的照度为  $\frac{K}{r^2}$ ,  $k = \text{const}$ , 于是球壳内恒星在  $O$  点的照度为  $4\pi \rho k dr$ , 宇宙中任一点  $O$  处的总照度为

$$\int_0^{\infty} 4\pi \rho k dr = \infty,$$

即“天空是无限明亮的”. 此即 Olbers 佯谬.

## 1.2 牛顿引力势

设质点  $M$  为引力源, 质点  $M' = m$  为试验质点, 则式 (1.1.1) 可写为场分布的形式 (与静电学中的情形类似)

$$\mathbf{F} = -m\nabla U, \quad (1.2.1)$$

$$U = -K \frac{M}{r}. \quad (1.2.2)$$

$U$  叫做牛顿引力势, 它满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 U = 0.$$

如果产生引力场的场源物质密度为  $\rho(x, y, z)$ , 则牛顿引力势  $U(x, y, z)$  满足泊松方程

$$\nabla^2 U = 4\pi k \rho(x, y, z). \quad (1.2.3)$$

牛顿引力理论实际上是一个三维场论. 泊松方程的解给出引力势的空间分布  $U(x, y, z)$ . 例如, 当观察点  $(x^i)$  与物质系统的距离远大于物质系统的线度时, 方程 (1.2.3) 的解可写为

$$U = -k \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 x', \quad (1.2.4)$$