名师提点

考研必备

考研数学快捷解题方法

（数学三适用）

陈启浩 编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

名师提点考研数学快捷解题方法
（数学三适用）

陈启浩　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书精选了作者从多年的大学数学教学过程中总结出来的快捷解题方法99种。本书内容适合参加硕士生入学考试“数学三”科目的学生，包含了高等数学、线性代数和概率论与数理统计三部分的知识. 希望读者学习本书后，解决问题的思路更加开阔，对知识的运用更加灵活，对数学的本质有更清楚的认识，取得更好的考试成绩。

图书在版编目（CIP）数据

名师提点考研数学快捷解题方法（数学三适用）/陈启浩编著. —北京：机械工业出版社，2010.7

ISBN 978-7-111-31601-5

Ⅰ.①名… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－解题 Ⅳ.①013－44

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第159707号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰 封面设计：赵颖喆
责任校对：李秋荣 责任印制：乔 宇
北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）
2010年9月第1版第1次印刷
184mm×260mm·24.25印张·596千字
标准书号：ISBN 978-7-111-31601-5
定价：39.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：（010）88361066	门户网：http://www.cmpbook.com
销售一部：（010）68326294	
销售二部：（010）88379649	教材网：http://www.cmpedu.com
读者服务部：（010）68993821	封面无防伪标均为盗版

前　　言

数学不仅要求精准，而且要求快捷.

快捷是人们的追求，也是正在奋力备战硕士研究生考试的广大学生的渴望，他们在掌握了一定的考研数学（高等数学、线性代数及概率统计）基础知识和经过一定量的习题训练后，渴望能掌握一些快捷解题方法．据了解，听过快捷解题方法讲座、接受过快捷解题方法训练的考生，思路开阔，思维敏捷，解题水平比一般考生高出许多，高分者往往非他们莫属.

为了满足广大考研学子的需要，最近，作者将长期教学生涯中积累的一些快捷解题方法经过精选，整理成书，并出版．深信通过本书的阅读，必将使考研学生在较短时间内，在解题能力方面有较大幅度的提高.

全书共有 99 个快捷解题方法，认真阅读、仔细品味定会使你感到，许多原本很复杂繁难的问题，现在可以轻松获解．下面列出书中的三个快捷方法，让读者先睹为快：

• 数列单调性的快捷判别法 •

当数列 $\{x_n\}$ 由 x_1 和递推式 $x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 确定时，通常总是利用数列极限存在准则"如果 $\{x_n\}$ 单调不减有上界或单调不增有下界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在"判别 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的存在．$\{x_n\}$ 的有界性是容易确定的，但当递推式 $x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 比较复杂，特别递推式中含有参数时，$\{x_n\}$ 的单调性就不易判别，而用以下方法却能快捷地得到 $\{x_n\}$ 的单调性结论：

将 $f(x_n)$ 中的 x_n 改为 x 得 $f(x)$．如果 $f(x)$ 单调不减（例如 $f'(x)\geqslant 0$），则当 $x_1\leqslant x_2$ 时，$\{x_n\}$ 单调不减；当 $x_1\geqslant x_2$ 时，$\{x_n\}$ 单调不增.

• 抽象矩阵可逆性判别与逆矩阵计算的快捷方法 •

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，它满足 $f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{A}^n+a_1\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{A}+a_n\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$（其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{O}$ 是 n 阶零矩阵），则要判别 $\boldsymbol{A}-d\boldsymbol{E}$（$d$ 是常数）是否为可逆矩阵，可按以下方法快捷地得到：

记 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$．如果 $f(d)=a\neq 0$，则 $\boldsymbol{A}-d\boldsymbol{E}$ 可逆，且

$$(\boldsymbol{A}-d\boldsymbol{E})^{-1}=-\frac{1}{a}h(\boldsymbol{A}),$$

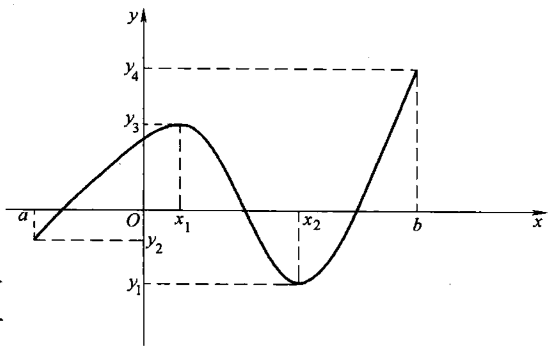
其中 $h(x)$ 是满足 $f(x)-a=(x-d)h(x)$ 的多项式；如果 $f(d)=0$，则 $\boldsymbol{A}-d\boldsymbol{E}$ 不可逆.

• （一维）连续型随机变量函数的概率密度的快捷计算法 •

设 x 是连续型随机变量，其概率密度为 $f_X(x)$，则 $y=g(x)$ 在 $f_X(x)\neq 0$ 的区间 (a, b) 内可导，但不是单调时，要计算 $Y=g(X)$ 的概率密度 $f_Y(y)$，通常需先由分布函数的定义算出 Y 的分布函数 $F_Y(y)$（当 $y=g(x)$ 较复杂时，$F_Y(y)$ 是不易算得的），然后对 $F_Y(y)$ 求导算出 $f_Y(y)$．但利用下面方法可快捷计算 $f_Y(y)$：

先确定 $y=g(x)$ 在 (a, b) 内的单调区间，例如 (a, x_1)，(x_1, x_2) 及 (x_2, b)，如下图所示，记 $y=g(x)$ 在上述各个单调区间上的反函数分别为 $x=h_1(y)$ $(y_2<y<y_3)$，$x=h_2(y)$ $(y_1<y<y_3)$ 以及 $x=h_3(y)$ $(y_1<y<y_4)$，则

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[h_1(y)]\,|h_1'(y)|, & y_2<y<y_3,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}+\begin{cases}f_X[h_2(y)]\,|h_2'(y)|, & y_1<y<y_3,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}+\begin{cases}f_X[h_3(y)]\,|h_3'(y)|, & y_1<y<y_4,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$



书中的每个快捷方法都分【简介】与【活用】两部分，在【简介】中简明扼要地介绍方法要点，并在必要处给出证明；在【活用】中通过典型的例子具体说明【简介】中所述的方法的运用. 有些快捷方法中还有第三部分——【延伸】，它将【简介】中所述的方法作了某些扩张，使得该方法具有更广泛的应用.

由于作者水平有限，书中疏漏和不足之处在所难免，恳请广大读者和同行指正.

陈启浩谨识于北京

目　录

第二部分　线 性 代 数

第一部分　高 等 数 学

第一章 一元函数微分学

01 数列单调性的快捷判别法

【简介】

当数列 $\{x_n\}$ 由 x_1 和递推式 $x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 确定时，通常总是利用数列极限存在准则（Ⅱ）：

"如果数列 $\{x_n\}$ 单调不减有上界或单调不增有下界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在"

判别 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的存在．其中 $\{x_n\}$ 的单调性判别通常使用以下两种方法：

1. 如果 $x_{n+1}-x_n\geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ $(n=1, 2, \cdots)$，则 $\{x_n\}$ 单调不减（单调不增）；

2. 如果 $\{x_n\}$ 是正项数列，则当 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\geqslant 1$ $(\leqslant 1)$ 时，$\{x_n\}$ 单调不减（单调不增）．

但是当递推式 $x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 比较复杂，特别是递推式中含有参数时，应用上述两种方法不易判定 $\{x_n\}$ 的单调性．下面结论给出了判断 $\{x_n\}$ 单调性的快捷方法：

将 $f(x_n)$ 中的 x_n 改为 x 得 $f(x)$．如果 $f(x)$ 单调不减（例如 $f'(x)\geqslant 0$），则当 $x_1\leqslant x_2$ 时，$\{x_n\}$ 单调不减；当 $x_1\geqslant x_2$ 时，$\{x_n\}$ 单调不增．

证明：以 $x_1\leqslant x_2$ 为例给出证明，当 $x_1\geqslant x_2$ 时同样可证．

由于 $f(x)$ 单调不减，所以当 $x_1\leqslant x_2$ 时，$f(x_1)\leqslant f(x_2)$，即 $x_2\leqslant x_3$，从而 $f(x_2)\leqslant f(x_3)$，即 $x_3\leqslant x_4$．依此类推得 $x_n\leqslant x_{n+1}(n=4, 5, \cdots)$，所以 $\{x_n\}$ 单调不减．

注　*数列极限存在准则有两个，除本段开头所述的（Ⅱ）之外，还有（Ⅰ）：*

设有数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$，如果 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ $(n=1, 2, \cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$，则 $\{x_n\}$ 收敛于 A，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$．

【活用】

例 01.1　设 $0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ $(n=1, 2, \cdots)$．

（1）证明：数列 $\{x_n\}$ 的极限存在；

（2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$．

解　（1）由 $0<x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\leqslant\dfrac{1}{2}[x_n+(3-x_n)]=\dfrac{3}{2}(n=1, 2, \cdots)$ 知 $\{x_n\}$ 有上界．

记 $f(x_n)=\sqrt{x_n(3-x_n)}$，将其中的 x_n 改为 x 得函数 $f(x)=\sqrt{x(3-x)}\left(0<x\leqslant\dfrac{3}{2}\right)$．由

于$f'(x)=\dfrac{\frac{3}{2}-x}{\sqrt{x(3-x)}}\geqslant 0\left(0<x\leqslant\dfrac{3}{2}\right)$及$x_3-x_2=\sqrt{x_2(3-x_2)}-x_2=\dfrac{2x_2\left(\frac{3}{2}-x_2\right)}{\sqrt{x_2(3-x_2)}+x_2}\geqslant 0$，所以，数列$x_2$，$x_3$，…，$x_n$，…单调不减，从而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

（2）记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. 令$n\to\infty$，对所给递推式两边取极限得

$$A=\sqrt{A(3-A)},\ 即\ A=\frac{3}{2},\ 0$$

由于$A\geqslant x_2>0$，所以$A=\dfrac{3}{2}$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{3}{2}$.

例 01.2　设$x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{a-1+x_n}{1+x_n}(n=1,2,\cdots)$，其中$a$是不超过2的常数. 求使数列$\{x_n\}$收敛的$a$的值，并计算此时的$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，记为$A$，则令$n\to\infty$对递推式两边取极限得$A=\dfrac{a-1+A}{1+A}$，即$A^2=a-1$. 由此可知，当$a<1$时$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在. 下面考虑$1\leqslant a\leqslant 2$时的$\{x_n\}$的收敛性.

由$0<x_{n+1}=1+\dfrac{a-2}{1+x_n}\leqslant 1$（$n=1,2,\cdots$）知$\{x_n\}$既有上界又有下界.

记$f(x_n)=1+\dfrac{a-2}{1+x_n}$，将其中的$x_n$改为$x$得函数$f(x)=1+\dfrac{a-2}{1+x}$（$0<x\leqslant 1$）. 由于$f'(x)=\dfrac{2-a}{(1+x)^2}\geqslant 0$（$0<x\leqslant 1$），所以，由

$$x_2-x_1=\frac{a-1+x_1}{1+x_1}-x_1=\frac{(a-1)-x_1^2}{1+x_1}\begin{cases}\geqslant 0 & 0<x_1\leqslant\sqrt{a-1},\\ <0 & x_1>\sqrt{a-1}\end{cases}$$

知，当$0<x_1\leqslant\sqrt{a-1}$时$\{x_n\}$单调不减；当$x_1>\sqrt{a-1}$时$\{x_n\}$单调减少. 因此，当$1\leqslant a\leqslant 2$时，$\{x_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a-1}$.

例 01.3　设二元函数$F(x,y)=\dfrac{1}{2x}\varphi(y-x)$，且$F(1,y)=\dfrac{y^2}{2}-y+5$. 又设$x_1>0$，$x_{n+1}=F(x_n,2x_n)$（$n=1,2,\cdots$）.

（1）证明：数列$\{x_n\}$收敛；

（2）求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　（1）由$F(1,y)=\dfrac{\varphi(y-1)}{2}$及$F(1,y)=\dfrac{y^2}{2}-y+5$得$\dfrac{\varphi(y-1)}{2}=\dfrac{y^2}{2}-y+5$，即$\varphi(y)=y^2+9$，$F(x,y)=\dfrac{1}{2x}[(y-x)^2+9]$. 因此$\{x_n\}$的递推式为

$$x_1>0,\ x_{n+1}=\frac{1}{2x_n}(x_n^2+9)(n=1,2,\cdots). \tag{1}$$

由递推式知$x_{n+1}\geqslant\dfrac{1}{2x_n}\cdot 2\sqrt{x_n^2\cdot 9}=3(n=1,2,\cdots)$，即$\{x_n\}$有下界.

记$f(x_n)=\dfrac{1}{2x_n}(x_n^2+9)$，将其中的$x_n$改为$x$得函数$f(x)=\dfrac{1}{2x}(x^2+9)$. 由于$f'(x)=$

$\frac{x^2-9}{2x^2}\geqslant 0$ （$x\geqslant 3$），所以由

$$x_3-x_2=\frac{1}{2x_2}(x_2^2+9)-x_2=\frac{9-x_2^2}{2x_2}\leqslant 0$$

知 $\{x_n\}$ 单调不增．因此，$\{x_n\}$ 收敛．

（2）记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则由 $x_n\geqslant 3$ （$n=2,3,\cdots$） 知 $A\geqslant 3$．令 $n\to\infty$ 对递推式（1）的两边取极限得

$$A=\frac{1}{2A}(A^2+9)\text{，即 }A=3\text{，}-3\text{（不合题意，舍去）}.$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$．

例 01.4 设 $a>0$，$x_1>0$，$x_2>0$，且 $x_{n+1}=x_n(2-ax_n)$ （$n=1,2,\cdots$），证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{a}$．

解 由 $x_1>0$，$x_2>0$ 及 $x_2=x_1(2-ax_1)\leqslant\frac{1}{a}\left(\text{由于 } y=x(2-ax) \text{ 的最大值为}\frac{1}{a}\right)$，即 $0<x_2\leqslant\frac{1}{a}$．由此可得 $0<x_3=x_2(2-ax_2)\leqslant\frac{1}{a}$．依此类推得 $0<x_n\leqslant\frac{1}{a}(n=4,5,\cdots)$，即 $\{x_n\}$ 有界．

记 $f(x_n)=x_n(2-ax_n)$，将其中的 x_n 改为 x 得函数 $f(x)=x(2-ax)\left(0<x\leqslant\frac{1}{a}\right)$．由于 $f'(x)=2a\left(\frac{1}{a}-x\right)\geqslant 0\left(0<x\leqslant\frac{1}{a}\right)$，所以由

$$x_3-x_2=x_2(2-ax_2)-x_2=ax_2\left(\frac{1}{a}-x_2\right)\geqslant 0$$

知数列 $x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$ 单调不减．因此 $\{x_n\}$ 收敛，记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则 $A\geqslant x_2>0$．令 $n\to\infty$ 对所给递推式两边取极限得 $A=A(2-aA)$．解此方程得 $A=\frac{1}{a}$，0（不合题意，舍去），所以，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{a}$．

【延伸】

如【简介】中所述，当数列 $\{x_n\}$ 由 x_1 和递推式 $x_{n+1}=f(x_n)$ （$n=1,2,\cdots$） 确定时，考虑 $\{x_n\}$ 的收敛性往往都是应用数列极限存在准则（Ⅱ）．但当 $f(x)$ 单调不增（例如 $f'(x)\leqslant 0$）时，不能直接使用本方法确定 $\{x_n\}$ 的单调性（实际上，此时 $\{x_n\}$ 不具有单调性），此时可以将 $\{x_n\}$ 划分成若干个子数列，例如 $\{x_{2n-1}\}$ 和 $\{x_{2n}\}$，然后分别对这两个子数列应用本方法，判别单调性，进而分别对这两个子数列应用数列极限存在准则（Ⅱ），如果它们有相同的极限 A，则 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$．

例 01.5 设 $x_1=2$，$x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n}(n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$．

解 容易看到 $0<x_n<3$ （$n=1,2,\cdots$），即 $\{x_n\}$ 既有上界又有下界．

记 $f(x_n)=2+\frac{1}{x_n}$，将其中的 x_n 改为 x 得函数 $f(x)=2+\frac{1}{x}(0<x<3)$．由于 $f'(x)=$

$-\frac{1}{x^2}<0$，因此将 $\{x_n\}$ 划分成两个子数列 $\{x_{2n-1}\}$ 和 $\{x_{2n}\}$.

（1）对于 $\{x_{2n-1}\}$ 有递推式 $x_1=2$ 和 $x_{2n+1}=2+\frac{1}{x_{2n}}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{x_{2n-1}}}=2+\frac{x_{2n-1}}{2x_{2n-1}+1}$，即

$$x_{2n+1}=2+\frac{x_{2n-1}}{2x_{2n-1}+1}(n=1,2,\cdots). \tag{1}$$

记 $y(x_{2n-1})=2+\frac{x_{2n-1}}{2x_{2n-1}+1}$，将其中的 x_{2n-1} 改为 x 得函数 $y(x)=2+\frac{x}{2x+1}(0<x<3)$.

由于 $y'(x)=\frac{1}{(2x+1)^2}>0$，所以由 $x_1<x_3$ 知 $\{x_{2n-1}\}$ 单调增加. 因此 $\{x_{2n-1}\}$ 收敛. 记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=A$，令 $n\to\infty$ 对式（1）的两边取极限得 $A=2+\frac{A}{2A+1}$. 解此方程得 $A=1+\sqrt{2}$，$1-\sqrt{2}$. 由 $x_{2n-1}>0$（$n=1,2,\cdots$）知 $A=1-\sqrt{2}$不合题意. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=1+\sqrt{2}$.

（2）对于 $\{x_{2n}\}$ 有递推式 $x_2=\frac{5}{2}$，$x_{2n+2}=2+\frac{1}{x_{2n+1}}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{x_{2n}}}=2+\frac{x_{2n}}{2x_{2n}+1}$，即

$$x_{2n+2}=2+\frac{x_{2n}}{2x_{2n}+1}(n=1,2,\cdots). \tag{2}$$

这个递推式在形式上与式（1）相同，所以由 $x_2>x_4$ 知 $\{x_{2n}\}$ 单调减少，因此 $\{x_{2n}\}$ 收敛. 记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=B$，令 $n\to\infty$ 对式（2）的两边取极限得 $B=2+\frac{B}{2B+1}$. 解此方程得 $B=1+\sqrt{2}$，$1-\sqrt{2}$. 由 $x_{2n}>0$（$n=1,2,\cdots$）知 $B=1-\sqrt{2}$不合题意. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=1+\sqrt{2}$.

由以上计算知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1+\sqrt{2}$.

例 01.6 设 $x_1=\frac{a}{2}(0\leqslant a\leqslant 1)$，$x_{n+1}=\frac{a}{2}-\frac{x_n^2}{2}(n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 容易看到，$x_1=\frac{a}{2}$，$0\leqslant x_n\leqslant\frac{a}{2}(n=2,3,\cdots)$，所以 $\{x_n\}$ 既有上界又有下界.

记 $f(x_n)=\frac{a}{2}-\frac{x_n^2}{2}$，将其中的 x_n 改为 x 得函数 $f(x)=\frac{a}{2}-\frac{x^2}{2}\left(0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2}\right)$. 由于 $f'(x)=-x\leqslant 0$，因此将 $\{x_n\}$ 划分成两个子数列 $\{x_{2n-1}\}$ 和 $\{x_{2n}\}$.

对于 $\{x_{2n-1}\}$ 有递推式 $x_1=\frac{a}{2}$，

$$x_{2n+1}=\frac{a}{2}-\frac{x_{2n}^2}{2}=\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}-\frac{x_{2n-1}^2}{2}\right)^2. \tag{1}$$

记 $g(x_{2n-1})=\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}-\frac{x_{2n-1}^2}{2}\right)^2$，将其中的 x_{2n-1} 改为 x 得函数 $g(x)=\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}-\frac{x^2}{2}\right)^2\left(0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2}\right)$. 由于 $g'(x)=\left(\frac{a}{2}-\frac{x^2}{2}\right)x\geqslant 0$，所以由 $x_1\geqslant x_3$ 知 $\{x_{2n-1}\}$ 单调不增. 因此 $\{x_{2n-1}\}$ 收敛. 记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=A$，令 $n\to\infty$ 对式（1）的两边取极限得 $A=\frac{a}{2}-$

$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}-\frac{A^2}{2}\right)^2$. 该方程在$\left[0,\frac{a}{2}\right]$上有唯一解，记为 c，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=c$.

对 $\{x_{2n}\}$ 有递推式 $x_2=\frac{a}{2}-\frac{a^2}{8}$,

$$x_{2n+2}=\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}-\frac{x_{2n}^2}{2}\right)^2(n=1,2,\cdots).\tag{2}$$

这个递推式在形式上与式（1）相同，所以由 $x_2\leqslant x_4$ 知 $\{x_{2n}\}$ 单调不减. 因此 $\{x_{2n}\}$ 收敛. 记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=B$，令 $n\to\infty$ 对式（2）的两边取极限得 $B=\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}-\frac{B^2}{2}\right)^2$. 由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=c$.

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$. 令 $n\to\infty$ 对递推式 $x_{n+1}=\frac{a}{2}-\frac{x_n^2}{2}(n=1,2,\cdots)$ 的两边取极限得 $c=\frac{a}{2}-\frac{c^2}{2}$. 解此方程得 $c=\sqrt{1+a}-1$，$-\sqrt{1+a}-1$（由于它不在$\left[0,\frac{a}{2}\right]$内，舍去）. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c=\sqrt{1+a}-1$.

注 关于 A 的方程 $A=\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}-\frac{A^2}{2}\right)^2$ 在$\left[0,\frac{a}{2}\right]$上有唯一解的证明：

记 $\varphi(A)=A-\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}-\frac{A^2}{2}\right)^2$，则 $\varphi(A)$ 在$\left[0,\frac{a}{2}\right]$上连续，且 $\varphi(0)=-\frac{a}{2}+\frac{a^2}{8}\leqslant 0$，$\varphi\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}-\frac{a^2}{8}\right)^2\geqslant 0$，且 $\varphi'(A)=1-\left(\frac{a}{2}-\frac{A^2}{2}\right)A=\frac{1}{2}(2-aA+A^3)>\frac{1}{2}\left(2-\frac{a^2}{2}\right)>0$，所以方程 $\varphi(A)=0$，即 $A=\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}-\frac{A^2}{2}\right)^2$ 在$\left[0,\frac{a}{2}\right]$上有唯一解.

02 由数列极限定义的函数表达式的快捷计算法

【简介】

设数列与参数 x 有关，记其通项为 $\varphi(n,x)$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n,x)$ 定义了 x 的函数 $f(x)$，即

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi(n,x).$$

一般 $f(x)$ 是分段函数，其表达式的快捷计算法如下：

（1）利用诸如下列结论将数列各项 $\varphi(n,x)$ 的公共定义域划分成若干个区间：在 $n\to\infty$ 时，

如果 $\left|\frac{x}{a}\right|<1$，则 $\left(\frac{x}{a}\right)^n\to 0$，如果 $\left|\frac{x}{a}\right|>1$，则 $\left(\frac{a}{x}\right)^n\to 0$；

如果 $0<a<1$，则 $a^n\to 0$，如果 $a>1$，则 $\left(\frac{1}{a}\right)^n\to 0$；

如果 $x<0$，则 $n^x\to 0$，如果 $x>0$，则 $\frac{1}{n^x}\to 0$，等等.

(2) 在每个区间和分界点处计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x, n)$，如此即可确定 $f(x)$ 的表达式.

【活用】

例 02.1　设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^n+x^n)}{n}(x>0)$，求函数 $f(x)$ 的表达式.

解　由于数列通项 $\dfrac{\ln(e^n+x^n)}{n}$ 中出现 e^n 和 x^n，将它们合并为 $\left(\dfrac{x}{e}\right)^n$，按 $0<\dfrac{x}{e}<1$ 与 $\dfrac{x}{e}>1$ 划分 $(0, +\infty)$（数列各项的公共定义域）.

当 $0<\dfrac{x}{e}<1$，即 $0<x<e$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^n+x^n)}{n}=1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left[1+\left(\dfrac{x}{e}\right)^n\right]}{n}=1$；

当 $\dfrac{x}{e}>1$，即 $x>e$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^n+x^n)}{n}=\ln x+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left[1+\left(\dfrac{e}{x}\right)^n\right]}{n}=\ln x$；

当 $\dfrac{x}{e}=1$，即 $x=e$（上述两个区间的边界点）时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(2e^n)}{n}=1$.

所以，$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<e,\\ 1 & x=e,\\ \ln x & x>e\end{cases}=\begin{cases}1 & 0<x\leqslant e,\\ \ln x & x>e.\end{cases}$

例 02.2　使函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$ 连续，问常数 a，b 必须满足什么条件？

解　由于数列通项 $\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$ 中出现 $e^{n(x-1)}=(e^{x-1})^n$，所以要按 $e^{x-1}<1$ 与 $e^{x-1}>1$ 划分 $(-\infty, +\infty)$（数列各项的公共定义域）.

当 $e^{x-1}<1$，即 $x<1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{ax+b}{1}=ax+b$；

当 $e^{x-1}>1$，即 $x>1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}}{e^{n(x-1)}}=x^2$；

当 $e^{x-1}=1$，即 $x=1$（上述两个区间的边界点）时，$f(x)=\dfrac{1}{2}(1+a+b)$.

于是，$f(x)=\begin{cases}ax+b & x<1,\\ \dfrac{1}{2}(1+a+b) & x=1,\\ x^2 & x>1.\end{cases}$

要使 $f(x)$ 连续，必须有

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)=f(1)\text{，即}\lim_{x\to1^-}(ax+b)=\lim_{x\to1^+}x^2=\frac{1}{2}(1+a+b)\text{，}$$

由此得到 $\begin{cases}a+b=1,\\ \dfrac{1}{2}(1+a+b)=1,\end{cases}$ 即 a，b 必须满足 $a+b=1$.

例 02.3　设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$，问 a，b 取何值时，$f(x)$ 在 $(-\infty,$

$+\infty$）上连续.

解 由于数列通项$\frac{x^{2n+1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$中出现 x^{2n} 与 x^{2n+1}，所以要按 $|x|<1$ 与 $|x|>1$ 划分 $(-\infty,\ +\infty)$（数列各项的公共定义域）.

当 $|x|<1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=ax^2+bx$；

当 $|x|>1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{x^{2n}}=x$；

当 $x=1$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}(1+a+b)$；

当 $x=-1$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}(-1+a-b)$.

于是
$$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx & |x|<1,\\ x & |x|>1,\\ \frac{1}{2}(1+a+b) & x=1,\\ \frac{1}{2}(-1+a-b) & x=-1.\end{cases}$$

由此可知，当 a，b 满足
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=\frac{1}{2}(-1+a-b),\\ \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\frac{1}{2}(1+a+b),\end{cases}\quad 即\begin{cases}-1=a-b,\\ 1=a+b\end{cases}$$
时，$f(x)$ 在点 $x=-1$，1 处连续，从而在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上连续. 于是当 $a=0$，$b=1$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上连续.

例 02.4 讨论函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}$在 $[0,\ +\infty)$ 上的连续性.

解 显然$f(0)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$. 下面考虑 $x\in(0,\ +\infty)$ 时$f(x)$ 的表达式.

由于数列通项 $\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}$中出现 $(2x)^n$ 与 x^{2n}，所以按$\frac{2x}{x^2}<1$ 与$\frac{2x}{x^2}>1$ 划分 $(0,\ +\infty)$.

当$\frac{2x}{x^2}<1$，即 $x>2$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^{2n}}=x^2$（由于 $n\to\infty$ 时，$2+(2x)^n$ 与 x^{2n}比较可以忽略不计）；

当$\frac{2x}{x^2}>1$，即 $0<x<2$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(2x)^n}$（由于 $n\to\infty$ 时，x^{2n}与 $2+(2x)^n$ 比较可以忽略不计）.

下面计算 $(0,\ 2)$ 内的 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(2x)^n}$. 由于数列通项 $\sqrt[n]{2+(2x)^n}$中出现 $(2x)^n$，所以按 $0<2x<1$ 与 $2x>1$ 划分 $(0,\ 2)$：

当 $0<2x<1$，即 $0<x<\frac{1}{2}$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(2x)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$（由于 $n\to\infty$ 时，$(2x)^n$ 与 2 比较可以忽略不计）；

当 $2x>1$，即 $\frac{1}{2}<x<2$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(2x)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(2x)^n}=2x$（由于 $n\to\infty$ 时，2 与 $(2x)^n$ 比较可以忽略不计）.

此外，当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$；当 $x=2$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+2^{2n}+2^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\cdot 2^{2n}}=2^2\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=2^2$.

综上所述，$f(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ 2x & \frac{1}{2}<x<2,\\ x^2 & x\geqslant 2.\end{cases}$

显然 $f(x)$ 在 $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]\cup\left(\frac{1}{2},\ 2\right)\cup[2,\ +\infty)$ 上连续，并且容易验证 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$，2 处也都连续，所以 $f(x)$ 在 $[0,\ +\infty)$ 上连续.

例 02.5　设二元函数 $f(x,\ y)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^x}{n^y-(n-1)^y}$，求 $f(x,\ y)$ 的定义域与表达式.

解　数列通项 $\frac{n^x}{n^y-(n-1)^y}$ 中有 n^x 与 n^y，将它们合并成 n^{x-y}. 按 $x-y>0$ 与 $x-y<0$ 划分 Oxy 平面的 $y\neq 0$ 部分（数列各项的公共定义域）.

当 $x-y>0$ 时，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^y-(n-1)^y}{n^x}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^y}{n^{x-y}}=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^x}{n^y-(1-n)^y}=\infty$，所以此时 $f(x,\ y)$ 无定义；

当 $x-y<0$ 时，$f(x,\ y)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^x}{n^y-(n-1)^y}=-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{x-y}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^y-1}$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{n^{x-y}}{-\frac{y}{n}}=\frac{1}{y}\lim_{n\to\infty}n^{x-y+1}=\begin{cases}\infty & x-y+1>0,\\ \frac{1}{y} & x-y+1=0,\\ 0 & x-y+1<0.\end{cases}$$

由此可知 $f(x,\ y)$ 的定义域与表达式为 $f(x,\ y)=\begin{cases}0 & x-y+1<0\text{ 且 }y\neq 0,\\ \frac{1}{y} & x-y+1=0\text{ 且 }y\neq 0.\end{cases}$

03　等价无穷小的快捷寻找法

【简介】

当 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ 时称 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小. 寻找函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的等价无穷