



普通高等教育「十一五」国家级规划教材

高等

数学

第二册

第四版

四川大学数学学院高等数学教研室 编

(物 理 类 专 业 用)



高等教育出版社
Higher Education Press

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学

(物理类专业用)

第二册

第四版

四川大学数学学院高等数学教研室 编

高等教育出版社

内容简介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材。本次修订对第三版内容进行了适当的调整,同时注重保持原书理论严谨、表述流畅、可读性强、便于教学等特点。本套教材共分四册,本书是第二册,主要内容为空间解析几何与矢量代数、多元函数微积分及其应用、级数、微分方程等。

本书可供高等学校物理学类、电子信息科学类、电气信息类等对数学要求较高的专业使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.第2册/四川大学数学学院高等数学教研室
编.—4版.—北京:高等教育出版社,2009.12

物理类专业用

ISBN 978-7-04-025533-1

I. 高… II. 四… III. 高等数学—高等学校—教材
IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 181767 号

策划编辑	于丽娜	责任编辑	蒋青	封面设计	赵阳
责任绘图	宗小梅	版式设计	余杨	责任校对	金辉
责任印制	毛斯璐				

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landaco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landaco.com.cn
印 刷	北京外文印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
		版 次	1979年1月第1版
开 本	850×1168 1/32		2009年12月第4版
印 张	15.75	印 次	2009年12月第1次印刷
字 数	400 000	定 价	20.40元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 25533-00

第四版序言

由四川大学数学学院高等数学教研室编写的《高等数学》自1978年出版以来,被多所高校物理类专业广泛采用。在30年教学实践和教学改革的基础上,结合国内兄弟院校使用本教材的反馈信息及当前的实际教学需求,本次修订注重保持原书理论严谨、表述流畅、可读性强、便于教学等特点,吸收国内外优秀教材的长处,引入题材新颖的应用例题和实际模型,例题与习题的配置更加丰富、合理、便于自学,有利于学生数学应用能力的培养。

本次修订对第一、二册的内容作了适当的调整,将第一册中的第四章“微分方程初步”调至第二册的第十一章,并加入了全微分方程的相关内容;按照新规范对正切、余切函数符号和反常积分等名词进行了修改;结合中学教材的内容,增加了极坐标的定义;为使教学内容连贯,对一致连续、一致收敛等教学中要求不高的内容加*号处理;改正了第三版的错漏。

本套教材共分四册。第一册主要内容为函数与极限、一元函数微积分及其应用;第二册主要内容为空间解析几何与矢量代数、多元函数微积分及其应用、级数、微分方程等;第三册主要内容为线性代数、概率论与数理统计;第四册主要内容为数学物理方法,包括复变函数、数学物理方程、积分变换、特殊函数等。使用本教材的各高校可按照原有教学习惯组织教学,根据教学实际情况,对加*号或小字的内容以及专业性较强的物理专业例题作灵活处理,修改后的本套教材可供对数学要求较高的其他专业数学课程教学和教学参考使用。

本套教材的修订得到四川大学教务处、四川大学数学学院和高等教育出版社的大力支持,教材编写组专门召开会议讨论修订方案;原书作者周城璧先生等对本次修订提出了全面、系统的修改

建议；本教材自 1978 年出版以来，收到许多读者来信，对内容安排、习题配备和教材中出现的错漏提出了许多宝贵的意见和建议，对确保本书质量起到了重要作用，在此谨向他们表示衷心的感谢。

本书第一、二册的修订工作分别由四川大学数学学院钮海、牛健人完成，第三册由陈丽、何腊梅完成，第四册由邓瑾完成。限于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，希望广大读者予以指正。

编者

2009 年 1 月于四川大学

第三版序言

为使本书符合国家教育委员会高等教育司 1989 年印发的《综合大学本科物理类专业高等数学课程教学基本要求》，并进一步提高本书质量，现对第一册、第二册的第二版进行修订，本版仍保持原书通俗易懂、便于自学的特点，主要改动有：按基本要求对个别内容作了增删（如增加了实数的基本理论和闭区间上连续函数的性质的证明）；改正了第二版的错漏；对习题作了小量补充；引入了少量数学符号。与此同时，对本书的一些定义和定理的叙述，定理的证明作了相应的改动。

高等数学教材建设组对这次修订给予很大的帮助，专门召开了修订本书的研讨会。高等数学教材建设组组长曹之江教授亲自主持研讨会，参加会议的中山大学范达教授，北京师范大学王家鸾教授、李天林教授，广西大学曾纪雄教授，以及武汉大学侯友良老师，贵州师范大学的几位老师对第二版提出了全面、系统的批评意见和修改建议。复旦大学秦曾复教授认真细致地审阅了修改稿，提了许多宝贵的意见，对提高本书的质量，起了很大的作用。在此谨向他们表示衷心的感谢。

本书责任编辑高等教育出版社的杨芝馨同志，为本书第二、三版作了许多深入细致的工作，为提高本书质量付出了艰辛劳动，在此向她表示衷心感谢。

虽然本书已是第三版，但限于我们的水平，错误和不妥之处仍在所难免，请广大读者给予批评指正。

编者

1994 年 4 月于四川大学

第二版序言

本套书(共四册)自1978年2月起陆续出版以来,收到许多读者的来信,对本书的内容安排,习题配备等方面提出了很多宝贵意见,有的读者还为书中出现的错误编制了勘误表,这对我们的修改工作起了很大的作用。借此再版之机,向关心和支持我们工作的广大读者,表示衷心的感谢。

本套书是根据原教育部制定的“高等数学教学大纲”(由北京大学拟订供物理类专业使用)修订的,我们对第一版书中未严格证明的定理补充了证明(少数证明较复杂,或涉及内容超出大纲的例外)。考虑到与高中内容的衔接,函数和极限部分的讲法尽量与中学的讲法一致,极限一节中略微补充了一些内容,习题的配备也作了一定的修改。书后备有答案。

中山大学范达副教授细致地审阅了修订稿,提了许多宝贵的意见,对提高本书的质量起了很大的作用,我们非常感谢。

由于我们水平有限,虽然这次修订我们尽了很大的努力,但错误和不妥之处仍可能出现,希望广大读者予以指正。

编者

1987年1月于四川大学

第一版序言

本书是根据1977年10月在上海召开的理科教材编写大纲讨论会所拟订的物理类高等数学和数学物理方法编写大纲写成的。

全书分四册出版。前三册为高等数学部分；第四册为数学物理方法部分。具体内容为：第一册包括函数与极限、微分学、不定积分、微分方程初步、定积分；第二册包括立体解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分和曲面积分、场论初步、无穷级数（包括傅氏级数）、反常积分；第三册包括线性代数、微分方程、概率论初步；第四册包括复变函数、数学物理方程、特殊函数等。

由于物理类专业所需要的数学不尽相同，本教材除共同需要的部分外，增加了一些加*号的内容，各专业可根据需要，自行选用。

本书初稿完成后承有关兄弟院校的同志进行审稿，提供了许多修改意见，特此表示衷心的感谢。

由于水平所限，又兼仓促完稿，本书在内容安排、文字修饰和习题选配等方面，还存在许多问题，希望同志们指正。

编者

1978年2月

第五章 空间中的平面和直线	28
§5.4.1 常见的二次曲面	48
§5.4.2 坐标变换
习题5.4
第六章 多元函数微分学	70
第一节 多元函数	70
§6.1.1 二元函数的概念	70
§6.1.2 二元函数的极值和连续	75
§6.1.3 偏导数	82
§6.1.4 全微分	89
§6.1.5 复合函数的微分法	95

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010)58581897/58581896/58581879

传 真：(010)82086060

E - mail: dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编：100120

购书请拨打电话：(010)58581118



目 录

第五章 空间解析几何和矢量代数	1
第一节 空间直角坐标	1
§ 5.1.1 空间点的直角坐标	1
§ 5.1.2 两点间的距离	2
第二节 矢量代数	3
§ 5.2.1 矢量运算	4
§ 5.2.2 矢量的数量积	14
§ 5.2.3 矢量的矢量积	17
§ 5.2.4 矢量的混合积	23
习题 5.1—5.2	25
第三节 空间中的平面和直线	28
§ 5.3.1 平面	29
§ 5.3.2 空间直线	37
习题 5.3	46
第四节 二次曲面	48
§ 5.4.1 常见的二次曲面	48
§ 5.4.2 坐标变换	63
习题 5.4	67
第六章 多元函数微分学	70
第一节 多元函数	70
§ 6.1.1 二元函数的概念	70
§ 6.1.2 二元函数的极限和连续	75
§ 6.1.3 偏导数	82
§ 6.1.4 全微分	89
§ 6.1.5 复合函数的微分法	95

§ 6.1.6 隐函数的微分法	100
习题 6.1	106
第二节 偏导数的应用	111
§ 6.2.1 几何应用	111
§ 6.2.2 方向导数 梯度	117
§ 6.2.3 二元函数的泰勒展式	124
§ 6.2.4 二元函数的极值	127
习题 6.2	139
第七章 重积分	142
第一节 二重积分	142
§ 7.1.1 二重积分的概念	142
§ 7.1.2 二重积分的计算	148
习题 7.1	167
第二节 三重积分	170
§ 7.2.1 三重积分的概念	170
§ 7.2.2 三重积分的计算	171
习题 7.2	185
第三节 重积分的应用	186
§ 7.3.1 几何应用——曲面面积	186
§ 7.3.2 重积分在力学中的应用	193
习题 7.3	199
第八章 曲线积分 曲面积分 向量分析初步	201
第一节 曲线积分	201
§ 8.1.1 第一型曲线积分	201
§ 8.1.2 第二型曲线积分	206
§ 8.1.3 格林公式 平面曲线积分与路径无关 的条件	216
习题 8.1	227
第二节 曲面积分	231

§ 8.2.1	第一型曲面积分	231
§ 8.2.2	第二型曲面积分	234
§ 8.2.3	高斯公式 斯托克斯公式 空间曲线 积分与路径无关的条件	241
习题 8.2		249
第三节	向量分析初步	252
§ 8.3.1	向量函数的极限、连续和微商	252
§ 8.3.2	数量场与矢量场	257
习题 8.3		272
第九章	无穷级数	274
第一节	数项级数	274
§ 9.1.1	无穷级数的概念及基本性质	274
§ 9.1.2	正项级数	284
§ 9.1.3	任意项级数	293
习题 9.1		298
第二节	幂级数	301
* § 9.2.1	一致收敛级数及基本性质	302
§ 9.2.2	幂级数的基本性质	315
§ 9.2.3	函数的幂级数展开式	323
§ 9.2.4	幂级数的应用举例	334
习题 9.2		337
第三节	傅里叶级数	338
§ 9.3.1	以 2π 为周期的函数的展开	340
§ 9.3.2	傅氏级数的收敛性	346
§ 9.3.3	奇、偶函数的展开	351
§ 9.3.4	任意区间上的函数展开	354
§ 9.3.5	将函数展为正弦级数和余弦级数	358
§ 9.3.6	傅氏级数的复数形式	362
* § 9.3.7	傅氏级数的一致收敛性	365

185	· § 9.3.8 平均平方误差	366
185	习题 9.3	370
第十章 反常积分和含参变量积分		373
185	第一节 反常积分	373
185	§ 10.1.1 无穷积分	373
185	§ 10.1.2 瑕积分	381
185	* § 10.1.3 Γ -函数与 B-函数	387
185	习题 10.1	393
185	* 第二节 含参变量的积分	395
185	§ 10.2.1 含参变量的积分	395
185	§ 10.2.2 含参变量的反常积分	401
185	习题 10.2	405
第十一章 微分方程初步		407
185	第一节 微分方程的基本概念	407
185	习题 11.1	410
185	第二节 一阶微分方程	412
185	* § 11.2.1 解的存在与唯一性定理	412
185	§ 11.2.2 可分离变量的微分方程	413
185	§ 11.2.3 一阶线性微分方程	422
185	§ 11.2.4 全微分方程	428
185	习题 11.2	431
185	第三节 二阶微分方程	434
185	§ 11.3.1 特殊二阶微分方程	434
185	§ 11.3.2 二阶线性微分方程	438
185	§ 11.3.3 二阶常系数线性微分方程	442
185	习题 11.3	463
习题参考答案		466
参考文献		489

第五章 空间解析几何和向量代数

第一节 空间直角坐标

§ 5.1.1 空间点的直角坐标

为了确定空间中一点的位置,需要建立空间的点与有序数组之间的联系.

过空间一个定点 O ,作三条互相垂直的数轴,它们都以 O 为原点,且有相同的量度单位,这三条轴分别叫做 x 轴(横轴), y 轴(纵轴), z 轴(竖轴),统称为坐标轴.如果将右手的大拇指和食指分别指着 x 和 y 的正方向,则中指所指的方向即为 z 轴的正方向.这样的三条坐标轴组成的空间直角坐标系叫做右手坐标系,点 O 叫做坐标原点.否则称为左手坐标系.

任意两条坐标轴可以确定一个平面,如 x 轴和 y 轴确定 xOy 面,依此类推, y 轴和 z 轴确定 yOz 面, z 轴和 x 轴确定 zOx 面,这三个面统称为坐标面.三个坐标面把空间分为八个部分,每一部分称为一个卦限,其编号顺序是 xOy 平面上 I, II, III, IV 象限上方的四部分分别称为 I, II, III, IV 卦限, xOy 平面上 I, II, III, IV 象限下方的四部分分别称为 V, VI, VII, VIII 卦限(图 5.1).

取定了空间直角坐标系后,就可以建立起空间的点与数组之间的对应关系.

设 M 为空间中的一点,过点 M 作三个平面分别垂直于三条坐标轴,它们与 x 轴, y 轴, z 轴的交点依次为 P, Q, R (图 5.2). 设 P, Q, R 三点在三个轴上的坐标依次为 x, y, z . 这样,空间的一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 (x, y, z) , 称为点 M 的直角坐标,其中 x 称为点 M 的横坐标, y 称为纵坐标, z 称为竖坐标,记为 $M(x, y, z)$.

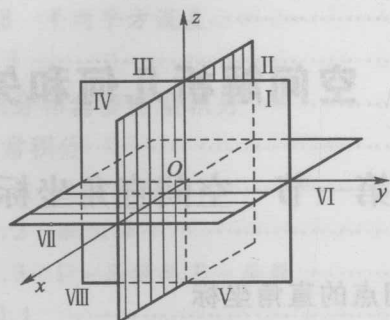


图 5.1

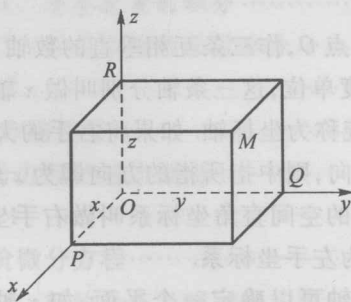


图 5.2

反过来,给定了有序数组 (x, y, z) ,我们依次在 x 轴, y 轴, z 轴上取与 x, y, z 相应的点 P, Q, R ,然后过点 P, Q, R 各作平面分别垂直于 x 轴, y 轴, z 轴,这三个平面的交点 M ,就是以有序数组 (x, y, z) 为坐标的点.

§ 5.1.2 两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点,我们可用两点的坐标来表达它们间的距离 d .

过 M_1, M_2 分别作垂直于三条坐标轴的平面,这六个平面围成的长方体以 $M_1 M_2$ 为对角线(图 5.3). 根据勾股定理可以证明长方体对角线的长度的平方等于它的三条棱的长度的平方和,即

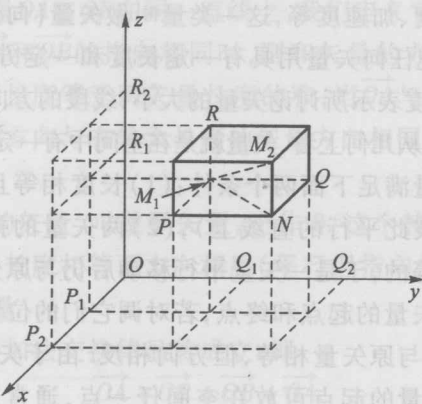


图 5.3

$$\begin{aligned} d^2 &= |M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2 \\ &= |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |M_1R|^2. \end{aligned}$$

由于

$$|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|,$$

$$|M_1Q| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|,$$

$$|M_1R| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|,$$

所以

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

这就是空间中两点间距离的公式. 特别地, 点 $M(x, y, z)$ 与坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

第二节 矢量代数

在研究力学、物理学以及其它应用科学时所遇到的量可以分为两类. 一类完全由数值决定, 例如质量、温度、时间、面积、体积、密度等, 这一类量叫做数量. 另一类量, 它们不但有大小, 还有方

向,例如力、速度、加速度等,这一类量叫做**矢量(向量)**.

我们可以把任何矢量用具有一定长度和一定方向的线段来表示,这线段的长度表示所讨论矢量的大小,线段的方向表示所讨论矢量的方向.因此,从几何上看,矢量就是在空间中有一定方向的线段.

如果两矢量满足下面两个条件:(1)长度相等且平行(即在同一直线上或在彼此平行的直线上),(2)两矢量的指向相同,就说这两矢量是相等的,于是一矢量平行移动后仍与原矢量相等.

必须注意矢量的起点和终点,若对调它们的位置,就得到另一矢量,它的长度与原矢量相等,但方向相反.由于矢量在空间中可以平行移动,矢量的起点可放在空间任一点,通常选择某点 O 作起点,把所有矢量都看作是从这点出发.若矢量起点为 O ,终点为 M ,记为 \overrightarrow{OM} .若起点为 A ,终点为 B ,记为 \overrightarrow{AB} .

矢量的长度叫做矢量的**模**.矢量 \overrightarrow{AB} 的模用 $|\overrightarrow{AB}|$ 来表示.直角坐标系中,如以坐标原点 O 为起点,向已知点 M 引矢量 \overrightarrow{OM} ,这矢量称为点 M 对于点 O 的**矢径**.

§ 5.2.1 矢量运算

1. 矢量加法

根据力学中关于力、速度及加速度的合成法则,我们定义两矢量的和如下.

不在同一直线上的两矢量 \overrightarrow{OA} 与 \overrightarrow{OB} 的和是指以这两矢量为两边所作的平行四边形的对角线矢量 \overrightarrow{OC} (图 5.4) 记作

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

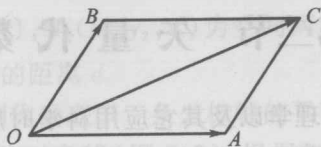


图 5.4