

高职高专规划教材

Economic Mathematics

经济数学

王志龙 石国春 主编



中国轻工业出版社

高职高专规划教材

经 济 数 学

王志龙 主编
石国春

 中国轻工业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

经济数学/王志龙, 石国春主编. —北京: 中国轻工业出版社, 2008. 8

高职高专规划教材

ISBN 978 - 7 - 5019 - 6516 - 8

I. 经… II. ①王…②石… III. 经济数学 - 高等学校: 技术学校 - 教材 IV. F224. 0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 098929 号

责任编辑: 刘云辉

策划编辑: 刘云辉 责任终审: 唐是雯 封面设计: 锋尚设计
版式设计: 王培燕 责任校对: 李 靖 责任监印: 胡 兵 张 可

出版发行: 中国轻工业出版社 (北京东长安街 6 号, 邮编: 100740)

印 刷: 三河市世纪兴源印刷有限公司

经 销: 各地新华书店

版 次: 2008 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

开 本: 720 × 1000 1/16 印张: 14. 25

字 数: 295 千字

书 号: ISBN 978 - 7 - 5019 - 6516 - 8/F · 419 定价: 24. 00 元

读者服务部邮购热线电话: 010 - 65241695 85111729 传真: 85111730

发行电话: 010 - 85119845 65128898 传真: 85113293

网 址: <http://www.chlip.com.cn>

Email: club@chlip.com.cn

如发现图书残缺请直接与我社读者服务部联系调换

80403J4X101ZBW

前 言

本书是在我们认真总结、分析吸收全国高职高专高等数学课程教学改革的经验基础上,根据教育部颁发的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》,遵循“以应用为目的,以必须、够用为度”的原则,结合我们多年从事经济数学方面的科研与教学改革经验及同类教材发展趋势,针对大专层次的经济管理类专业学生而编写完成,是一本适宜于经济、管理、社科及文史类专业学生学习高等数学课程的教材。

教材作为教学内容和教学方法的知识载体,在深化教育教学改革、全面推进素质教育、培养高素质创新人才中有着举足轻重的地位。随着科学技术的突飞猛进和知识经济的飞速发展,科学技术在国民经济发展中的作用更加凸显。我国高等教育肩负着为祖国现代化建设培养高素质、高层次创造型人才的重任。培养学生的数学素养和提高教学水平,更新教学内容,把创新能力和创新精神的培养放到突出位置,是当前高等数学课程教学改革的主要目标,加强教材建设则是实现这一目标的当务之急。本书正是为适应这一新形势出版的。

本书力求体现基础课为专业服务思想,在保证科学性的基础上,注意讲清概念,减少理论推导,注重学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养,内容叙述力求通俗易懂,循序渐进,章节之间衔接紧凑。另外,在本书的编写过程中努力贯彻如下原则:

1. 注重以经济管理实例引入知识点,并最终回到数学应用思想,强化学生学习经济管理中的数学应用意识,加强学生对数学的兴趣及能力培养。

2. 注重数学基本概念和基本方法的学习。在精简内容的同时,对那些我们认为必须掌握的基本理论、基本知识和基本技能,则不惜篇幅,力求解说详细,使读者容易接受。

3. 注重用数学概念及方法,对经济管理现象的解释及分析,注重用数学模型分析解决经济管理问题的能力培养。

4. 注重计算机数学软件应用能力的培养,培养用计算机软件 Maple 解决经济数学问题的能力,专设第十一章讲解了数学软件 Maple。在该章中,首先讲解了 Maple 的一般知识;其后针对课本前十章的内容,按每个知识点的大类,在第十一章中编写了对应的数学实验。读者可以在学习前十章内容的同时学习第十一章中的 Maple 实验,待全部学完后通过第十一章对 Maple 进行系统复习;也可以首先学习前十章内容,再系统学习第十一章中的 Maple 实验。

我们认为,对一本教材包含的内容不宜限制过死,又考虑到文科类专业门类

多,对数学知识的需求不同,我们对部分内容用“※”或“*”号标出,不同的专业可根据具体情况选学.

本书的基本教学时数不少于 90 学时,可作为高职高专财经、管理、物流、商贸、文秘等文科类各专业教材.另外,我们还将推出与教材配套的习题辅导、电子教材、电子教案等.

王志龙完成了本书框架结构及编写大纲,并参与了全书的插图绘制工作.全书由王志龙、石国春编写、审阅和统稿,另外,汪子莲、贾爱霞和赵新梅参加了本书的资料整理及审阅工作.

我们邀请祁忠斌博士审阅了本书全部内容,提出了许多有价值的改进意见,使本书增色不少.在此,我们表示衷心的感谢.另外,全书插图由施武祖协助绘制.

由于我们的水平有限,书中难免有不妥之处,我们衷心地希望得到专家、同行和读者的批评指正,使本书能不断完善.

编者

2008 年 4 月

目 录

第一章 函数	(1)
§1 函数的概念及其性质	(1)
一、函数概念 (1) 二、函数的几种特性 (4)	
§2 初等函数	(6)
一、复合函数 (6) 二、反函数 (6) 三、初等函数 (7) 四、经济学中常用的函数 (8)	
习题一	(10)
第二章 极限与连续	(12)
§1 数列的极限	(12)
§2 函数的极限	(14)
一、 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限 (14) 二、 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限 (15)	
三、极限的性质 (18)	
§3 无穷大量与无穷小量	(19)
一、无穷大量 (19) 二、无穷小量 (19) 三、无穷小量与无穷大量的关系 (21) 四、无穷小量的阶 (21)	
§4 极限的运算	(22)
一、极限的运算法则 (22) 二、两个重要极限 (24) 三、等价无穷小量替换 (27)	
§5 函数的连续性	(28)
一、函数连续性定义 (28) 二、函数的间断点 (30) 三、初等函数连续的性质 (31) 四、闭区间上连续函数的性质 (32)	
习题二	(34)
第三章 导数与微分	(37)
§1 导数的概念	(37)
一、引例 (37) 二、导数的定义 (38) 三、求导数举例 (39)	
四、单侧导数 (41) 五、可导性与连续性 (43) 六、导数的几何意义 (43) 七、导数在实际建模中的意义 (44)	
§2 求导法则	(45)
一、导数的和、差、积、商的求导法则 (45) 二、反函数求导法则 (46)	
三、基本初等函数的求导公式 (47) 四、复合函数求导法则 (48)	
§3 隐函数的导数及高阶导数	(48)
一、隐函数的求导法则 (48) 二、对数求导法 (50) 三、高阶导数 (50)	

§ 4 微分及其应用	(51)
一、微分的概念 (51) 二、微分的几何意义 (53) 三、微分运算 (53)	
四、微分的应用 (55)	
习题三	(56)
第四章 中值定理与导数的应用	(59)
§ 1 中值定理	(59)
一、罗尔 (Rolle) 中值定理 (59) 二、拉格朗日 (Lagrange) 中值定理 (60)	
三、柯西 (Cauchy) 中值定理 (62)	
§ 2 罗必塔法则	(62)
一、罗必塔 (L'Hospital) 法则 (62) 二、 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限计算 (63)	
三、其他类型未定式的极限计算 (64)	
§ 3 导数在几何上的应用	(66)
一、函数的单调性 (66) 二、函数的极值 (67) 三、函数的最大值和最小值 (70)	
四、函数的凹凸性及拐点 (71)	
§ 4 导数在经济管理上的应用	(72)
一、经济函数的边际分析 (72) 二、弹性分析 (73)	
习题四	(75)
第五章 不定积分	(78)
§ 1 不定积分的概念与性质	(78)
一、原函数与不定积分的概念 (78) 二、不定积分的几何意义 (79)	
三、不定积分的性质 (80) 四、基本的积分公式 (80)	
§ 2 换元积分法	(83)
一、第一类换元积分法 (83) 二、第二类换元积分法 (85)	
§ 3 分部积分法	(86)
※ § 4 简单有理函数的积分	(88)
一、真分式的分解 (89) 二、有理真分式的积分 (90)	
习题五	(92)
第六章 定积分	(95)
§ 1 定积分的概念与性质	(95)
一、引例 (95) 二、定积分的定义 (97) 三、定积分的几何意义 (98)	
四、定积分的性质 (98)	
§ 2 定积分基本公式	(100)
§ 3 定积分的换元积分法与分部积分法	(103)
一、定积分的换元积分法 (103) 二、定积分的分部积分法 (105)	
§ 4 定积分的应用	(106)
一、平面图形的面积 (106) 二、立体的体积 (108) 三、经济应用问题举例 (109)	

§5 广义积分	(110)
一、无穷区间上的广义积分 (111) 二、无界函数的广义积分 (112)	
习题六	(113)
第七章 多元函数的微分学	(117)
§1 空间解析几何简介	(117)
一、空间直角坐标系 (117) 二、空间两点间的距离 (118)	
三、曲面与方程 (119)	
§2 多元函数的基本概念	(120)
一、二元函数的概念 (120) 二、二元函数的几何意义 (121)	
三、二元函数的极限与连续 (122)	
§3 偏导数与全微分	(123)
一、偏导数的概念 (123) 二、高阶偏导数 (125) 三、全微分 (125)	
§4 多元复合函数和隐函数的微分法	(127)
一、多元复合函数的求导法则 (127) 二、隐函数的求导公式 (129)	
§5 多元函数的极值	(130)
一、二元函数的极值 (130) 二、二元函数的最值 (131) ※三、条件极值 (132) ※四、最小二乘法 (133)	
※ §6 多元函数微分在经济管理上的应用	(135)
一、用偏导数作经济分析 (135) 二、经济函数优化问题 (137)	
习题七	(140)
第八章 二重积分	(143)
§1 二重积分的概念与性质	(143)
一、二重积分的概念 (143) 二、二重积分的性质 (144)	
§2 二重积分的计算	(145)
一、在直角坐标系中二重积分的计算 (145) 二、在极坐标系中二重积分的计算 (149)	
习题八	(151)
第九章 微分方程及其应用	(154)
§1 微分方程的基本概念	(154)
§2 一阶微分方程	(155)
一、可分离变量的微分方程 (155) 二、齐次微分方程 (156)	
三、一阶线性微分方程 (158)	
§3 可降阶的高阶微分方程	(160)
一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程 (160) 二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程 (160) 三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程 (161)	
§4 二阶线性微分方程的概念	(162)
一、二阶线性微分方程解的结构 (162) 二、二阶常系数线性齐次微分	

方程的解法 (164)	※三、二阶常系数线性非齐次微分方程的解 (165)
§ 5 微分方程在经济管理中的应用举例	(167)
习题九	(169)
※第十章 无穷级数	(172)
§ 1 无穷级数的概念与性质	(172)
§ 2 正项级数	(174)
§ 3 任意项级数	(176)
§ 4 幂级数	(177)
一、幂级数的概念及敛散性 (177)	二、幂级数的运算 (180)
§ 5 函数的幂级数展开式	(181)
一、直接展开法 (182)	二、间接展开法 (183)
习题十	(184)
第十一章 数学实验	(187)
§ 1 Maple 的简介与初等运算	(187)
一、Maple 的功能简介 (187)	二、Maple 的函数定义及表达式 (188)
三、Maple 的简单数值计算 (190)	四、Maple 的多项式运算 (191)
§ 2 函数极限与连续性的实验	(192)
一、关键语句 (193)	二、实验内容 (193)
§ 3 导数与微分的实验	(196)
一、关键语句 (196)	二、实验内容 (196)
§ 4 不定积分的实验	(198)
一、关键语句 (199)	二、实验内容 (199)
§ 5 定积分的实验	(201)
一、关键语句 (201)	二、实验内容 (201)
§ 6 常微分方程的实验	(204)
一、关键语句 (204)	二、实验内容 (204)
本章作业	(206)
附录 习题答案	(207)
习题一	(207)
习题二	(208)
习题三	(209)
习题四	(210)
习题五	(211)
习题六	(213)
习题七	(215)
习题八	(216)
习题九	(217)
习题十	(218)

第一章 函 数

函数是高等数学中最基本的研究对象，可以用作刻划运动变化中变量之间相互依赖关系的数学模型。本课程是在实数范围内研究函数。

§ 1 函数的概念及其性质

一、函 数 概 念

1. 区间与邻域

我们将自然数集记作 N ；整数集记作 Z ；有理数集记作 Q ；实数集记作 R 。设 $a, b \in R$ ，且 $a < b$ ，有限区间被定义为如下数集：

开区间 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ 。

闭区间 $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ 。

半开半闭区间 $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ ；

$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ 。

其中，称 a 为区间的左端点，称 b 为区间的右端点，称 $b - a$ 为区间的长度。

引进符号 $+\infty$ （读作正无穷大）及 $-\infty$ （读作负无穷大）后，无限区间被定义为如下数集：

$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$ ；

$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$ ；

$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$ ；

$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$ ；

$(-\infty, +\infty) = R$ 。

注： $+\infty$ ， $-\infty$ 仅表示两个无穷的符号，以后为了使叙述更简洁，用“区间 I ”来表示各类区间。

下面介绍邻域的概念。

设 $a, \delta \in R$ ，且 $\delta > 0$ ，称数集 $\{x \mid |x - a| < \delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a, \delta)$ ，其中，称点 a 为邻域的中心， δ 为邻域的半径。因为不等式 $|x - a| < \delta$ 等价于 $a - \delta < x < a + \delta$ ，所以邻域 $U(a, \delta)$ 是长度为 2δ 的开区间（如图1-1），即： $U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta)$ 。

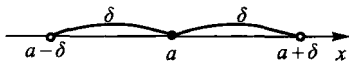


图 1-1

例如 $U\left(3, \frac{1}{2}\right) = \{x \mid |x - 3| < \frac{1}{2}\}$, 表示以点 $a = 3$ 为中心, 以 $\delta = \frac{1}{2}$ 为半径的邻域, 也就是开区间 $(2.5, 3.5)$.

有时我们要用到去掉中心的邻域. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a , 记作 $U(\hat{a}, \delta)$, 称其为点 a 的去心邻域 (或空心邻域).

$$U(\hat{a}, \delta) = U(a, \delta) \setminus \{a\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta),$$

即: $U(\hat{a}, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}.$

例如 $U(\hat{1}, 1.5) = \{x \mid 0 < |x - 1| < 1.5\}$ 表示以点 $a = 1$ 为中心, 以 $\delta = 1.5$ 为半径的去心邻域, 即 $(-0.5, 1) \cup (1, 2.5)$.

2. 函数的概念

在 17 世纪之前, 函数的概念一直与公式紧密关联, 直到 1873 年, 德国数学家狄雷赫勒才抽象出了至今被人们所接受的, 且表述较为合理的函数概念.

在自然现象或技术领域中往往会出现多个变量, 它们之间相互联系, 相互依赖. 在本章中, 我们只讨论两个变量之间存在的一种确定的数值依赖关系, 即所谓的函数关系.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集, 如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 都按照某个对应法则 f 有唯一确定的值和它对应, 则称 f 为定义在 D 上的函数. 记作 $y = f(x)$, 称数集 D 为函数 f 的定义域, x 为函数 f 的自变量, y 为函数 f 的因变量.

函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的函数值, 记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 全体函数值组成的集合 $W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 f 的值域.

函数 $f(x)$ 中的字母 f 是反映自变量与因变量的对应法则, 对应法则也常用字母 φ, g, F, G 等来表示, 其相应的函数就记作 $\varphi(x), g(x), F(x), G(x)$ 等. 有时为了简化记号, 函数关系也记作 $y = y(x)$, 这时等号左边的 y 表示因变量, 等号右边的 y 表示关于 y 的对应法则.

例 1 在自由落体运动中, 设物体下落的时间为 t , 下落的距离为 h , 取 $t = 0$ 为开始下落的时刻. h 与 t 的函数关系可表示为 $h = \frac{1}{2}gt^2$, 其中 g 为重力加速度.

若物体距地面的高度为 h_0 , 则物体到达地面的时间 $t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$, 所以这个函数的定义域 D 为 $\left[0, \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\right]$, 值域 W 为 $[0, h_0]$.

例 2 常值函数 $y = 3$ 的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = \{3\}$, 它的图像是一条平行于 x 轴的直线.

由函数的定义可以看出, 函数关系包括下面两个要素:

(1) 自变量的变化范围 (即定义域);

(2) 自变量与因变量的对应法则.

由于函数的值域由函数的定义域及对应法则所确定, 所以函数的值域不构成函数的要素. 对于一个函数, 如果确定了它的两个要素, 即对应法则和定义域, 则这个函数就被完全确定了. 对于两个函数, 当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时, 则它们是相同的函数. 至于用什么字母来表示自变量和因变量, 仅仅是个形式问题.

例 3 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8$ 是一个具体的函数, f 确定的对应法则为

$$f(\quad) = 2(\quad)^3 + 3(\quad)^2 - 8$$

例 4 设 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 求 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 及 $f[f(x)]$.

解 分别用 $\frac{1}{x}$, $f(x)$ (即 $\frac{1}{1-x}$) 替代 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 中的 x 得

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1} (x \neq 0, x \neq 1),$$

$$f[f(x)] = \frac{1}{1-f(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x} (x \neq 0, x \neq 1).$$

例 5 设 $f(x+1) = x^2 - 3x$, 求 $f(x)$.

解 令 $x+1 = t$, 则 $x = t-1$, 代入得

$$f(t) = (t-1)^2 - 3(t-1) = t^2 - 5t + 4,$$

于是

$$f(x) = x^2 - 5x + 4.$$

注: 在实际问题中, 函数的定义域是根据问题的实际意义确定的, 如函数 $h = \frac{1}{2}gt^2$ 对任何 t 都有意义. 但是, 在例 1 中函数 $h = \frac{1}{2}gt^2$ 的定义域 $D = [0, \sqrt{\frac{2h_0}{g}}]$. 若不考虑函数的实际意义, 函数的定义域一般是使得解析式有意义的自变量取值的全体实数组成的集合.

例 6 求函数 $y = \sqrt{x^2 - x - 6} + \arcsin \frac{2x-1}{7}$ 的定义域.

分析: 这是求两个函数之和的定义域, 先分别求出每个函数的定义域, 然后求其公共部分即可.

解 要使 $\sqrt{x^2 - x - 6}$ 有意义, 必须有

$$x^2 - x - 6 \geq 0,$$

解得

$$x \leq -2 \quad \text{或} \quad x \geq 3.$$

要使 $\arcsin \frac{2x-1}{7}$ 有意义, 必须有

$$\left| \frac{2x-1}{7} \right| \leq 1,$$

解得

$$-3 \leq x \leq 4.$$

这两个函数定义域的公共部分是 $-3 \leq x \leq -2$ 或 $3 \leq x \leq 4$, 所以, 所求函数的定义域为 $[-3, -2] \cup [3, 4]$.

例 7 由函数的要素可知 $y = \ln x^2$ 与 $y = 2 \ln x$ 不是相同的函数; 而 $\omega = \sqrt{u}$ 与 $y = \sqrt{x}$ 是相同的函数; $y = \frac{|x|}{x}$ 与 $y = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ 也是相同的函数.

如果自变量取定义域内的任一个数值时, 对应的函数值只有一个, 这样的函数称为**单值函数**, 否则称为**多值函数**. 今后若无特别声明, 我们所提及的函数都是单值函数.

例如 $y = \pm \sqrt{25 - x^2}$ 对于每一个 $x \in (-5, 5)$ 都有两个 y 值与之对应, 所以该函数是一个多值函数, 我们可以把它分为两个单值函数 $y = \sqrt{25 - x^2}$ 与 $y = -\sqrt{25 - x^2}$.

3. 函数的表示方法

函数有三种常见表示方法: 图像法, 表格法, 解析式法. 图像法的优点是直观, 一目了然; 表格法的优点是可以直接查出表中所列自变量对应的函数值; 解析式法的优点是便于进行函数性态的研究.

如果函数的自变量在不同变化范围内, 其对应法则需要用不同的解析式来表示, 则称该函数为**分段函数**. 分段函数是定义域上的一个函数, 不要理解为多个函数, 分段函数需要分段求值, 分段作图.

例 8 画出下面分段函数的图像.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x \leq 0 \\ 1 - x^2, & 0 < x \leq 1 \\ 3 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

解 定义域 $D = (-1, 2]$, 值域 $W = [0, 2]$ (如图 1-2).

例 9 画出符号函数的图像, $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$.

解 定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = \{-1, 0, 1\}$ (如图 1-3).

二、函数的几种特性

下面给出函数几个特性, 及具有这些特性的特殊类型的函数. 设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 内有定义.

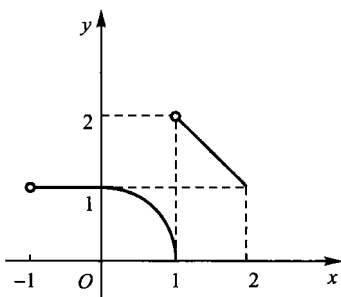


图 1-2

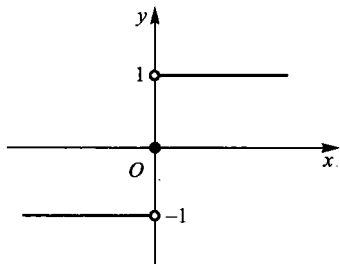


图 1-3

1. 有界性

若存在正数 M , 使得对任意 $x \in I$ 都有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 在 I 内有界, 也称 $f(x)$ 是 I 内的有界函数; 如果这样的 M 不存在, 就称函数在 I 内无界, 也称 $f(x)$ 是 I 内的无界函数.

例如: 函数 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内, 恒有 $|\sin x| \leq 1$ 成立, 所以 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的函数; 函数 $p(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 2)$ 内是无界的函数. 我们在谈及函数的有界性时, 必须在给出的区间内考察.

2. 单调性

设 x_1, x_2 是区间 I 内任意两点, 且 $x_1 < x_2$. 如果恒有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 成立, 则称 $f(x)$ 在 I 内单调递增, 称 I 为单调增区间; 如果恒有 $f(x_1) \geq f(x_2)$ 成立, 则称 $f(x)$ 在 I 内单调递减, 称 I 为单调减区间; 如果恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$) 成立, 则称 $f(x)$ 在 I 内严格单调递增 (减). 单调增区间或单调减区间统称为单调区间, 单调递增和单调递减的函数统称为单调函数.

例如: 函数 $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调递增的; 函数 $y = x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0]$ 单调递减; 但在 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调函数.

3. 奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 且 D 关于原点对称, 若对任意 $x \in D$ 都有 $f(-x) = -f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为奇函数; 若对任意 $x \in D$, 都有 $f(-x) = f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

奇偶性是函数的整体性质, 奇函数的图像关于原点对称, 偶函数的图像关于 y 轴对称.

例如: $y = x^2, x \in (-\infty, +\infty)$ 及 $y = \cos x, x \in (-\infty, +\infty)$ 都是偶函数; $y = x^3, x \in (-\infty, +\infty)$ 及 $y = \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$ 都是奇函数; $y = \sin x + \cos x$ 及 $y = 4x^2 - x - 3$ 都是非奇非偶函数.

4. 周期性

函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若存在一个正数 T , 对于任意 $x \in D$, 有 $x + T \in D$, 且 $f(x \pm T) = f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数, 称 T 为 $f(x)$ 的周期 (通常, 周期函数的周期是指最小正周期).

例如: $y = \sin x$ 及 $y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数.

对周期为 T 的函数, 在定义域内每个长度为 T 的区间上, 函数图像的形状相同. 所以, 研究周期函数时, 往往只画出其在一个长度为 T 的区间上的图像, 然后平移可得出整个函数的图像.

§2 初等函数

一、复合函数

在同一自然现象或技术领域中, 两个变量 x 与 y 间的联系有时不是直接的, 而是通过若干个中间变量联系起来的. 例如变量 y 是变量 u 的函数, 变量 u 又是变量 x 的函数等等. 这就是复合函数的概念.

定义 2.1 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D , 函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 W , 且 $D \cap W \neq \emptyset$, 则得到一个以 x 为自变量, y 为因变量的函数, 称该函数是由 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数, 简称复合函数, 记作 $y = f[\varphi(x)]$. 称 u 为中间变量.

例 1 分析下列复合函数的结构:

$$(1) y = \sqrt{\cos \frac{x}{5}}; \quad (2) y = e^{\sin \sqrt{x^2+3}}.$$

解 (1) $y = \sqrt{u}$, $u = \cos v$, $v = \frac{x}{5}$;

(2) $y = e^u$, $u = \sin v$, $v = \sqrt{t}$, $t = x^2 + 3$.

例 2 设 $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$, 求 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$.

解 $f[g(x)] = [g(x)]^2 = (2^x)^2 = 4^x$;

$$g[f(x)] = 2^{f(x)} = 2^{x^2}.$$

注: 只有当 $\varphi(x)$ 的值全部或部分落在 $f(u)$ 的定义域内时, 我们才可以复合. 例如 $y = \arcsin u$, $u = 2 + x^2$ 是不能复合的, 因为 $y = \arcsin u$ 的定义域与 $u = 2 + x^2$ 的值域的交集为空集.

二、反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 W , 若对任意 $y \in W$, 只有唯一的 $x \in D$, 使关系式 $f(x) = y$ 成立. 按照函数的定义, x 便成为 y 的函数, 令该函数的对

应法则为 φ , 则称函数 $x = \varphi(y)$ 为 $y = f(x)$ 的反函数. 显然, 反函数 $x = \varphi(y)$ 的定义域为 W , 值域为 D .

相对于反函数 $x = \varphi(y)$ 来说, 原来的函数 $y = f(x)$ 称为直接函数.

习惯上, 把自变量记作 x , 因变量记作 y , 将反函数改记为 $y = \varphi(x)$. 由于其定义域均是 W , 对应法则均是 φ , 因此 $x = \varphi(y)$ 和 $y = \varphi(x)$ 是相同的函数, 故 $y = \varphi(x)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数. 一般地, 将 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$.

例如: 函数 $y = x^3$ 的反函数是 $x = \sqrt[3]{y}$, 如果自变量仍用 x 表示, 因变量仍用 y 表示, 则反函数为 $y = \sqrt[3]{x}$;

指数函数 $y = e^x$ 的反函数是对数函数 $y = \ln x$, 正弦函数 $y = \sin x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) 的反函数是反正弦函数 $y = \arcsin x$ ($-1 \leq x \leq 1$).

若在同一坐标平面上作出直接函数 $y = f(x)$ 和其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像, 则这两个图像关于直线 $y = x$ 对称; 对 $f(x)$ 和 $f^{-1}(x)$ 有

$$f^{-1}(f(x)) \equiv x \text{ 及 } f(f^{-1}(y)) \equiv y.$$

例 3 求 $y = \sqrt{x-1}$ 的反函数.

解 从解析式中解出 x 得 $x = y^2 + 1$,
则反函数为 $y = x^2 + 1 (x \geq 0)$.

三、初 等 函 数

1. 基本初等函数

基本初等函数是指以下六种函数:

常量函数: $y = c$ (c 为常数);

幂函数: $y = x^\mu$ (μ 为常数);

指数函数: $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1, a$ 为常数);

对数函数: $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1, a$ 为常数);

三角函数: $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$;

反三角函数: $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$.

这些函数的图像和性质在初等数学中已经学过, 今后要经常使用, 请读者熟记.

2. 初等函数

定义 2.2 由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合步骤所得到的, 且可用一个解析式表示的函数, 统称为初等函数.

分段函数一般不是初等函数, 凡不是初等函数的函数皆称为非初等函数.

例如: 双曲正弦函数 $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, 双曲余弦函数 $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 双曲正

切函数 $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ 都是初等函数; $y = \log_a \sqrt{1-x^2}$ 和 $y = \sin^3 x + \sin(\ln x)$ 也是初等函数. 今后讨论的函数中绝大多数是初等函数.

四、经济学中常用的函数

1. 总成本函数

某产品的总成本是指生产一定数量的产品所需的全部经济资源投入的费用总额. 它由固定成本和可变成本组成. 当生产的技术水平以及生产规模保持不变时, 固定成本不变, 而可变成本随着生产产品的数量的变化而变化. 所以总成本是产量的函数.

设 q 为产品的产量, C 为产品的总成本, 称 $C = C(q)$ 为产品的总成本函数. 若 C_1 为固定成本, C_2 为可变成本, 则总成本函数为

$$C(q) = C_1 + C_2(q).$$

平均成本为
$$\bar{C}(q) = \frac{C(q)}{q},$$

它表示平均单位产品的成本.

2. 总收益函数与总利润函数

总收益是指生产者出售一定量的产品所得到的全部收入. 总收益受价格与销售量的影响, 它是价格与销售量的函数.

设 p 为价格, q 为销售量, R 为总收益, 则总收益函数为

$$R = p \cdot q.$$

平均收益函数为
$$\bar{R}(q) = \frac{R(q)}{q},$$

它表示平均出售单位产品所得到的收入.

总收益与总成本之差称为总利润, 记作 L . 即

$$L = R - C = R(q) - C(q),$$

为总利润函数.

例 4 某厂生产一种元器件, 设计能力为日产量 100 件, 每日固定成本为 140 元, 每件的单位变动成本为 10 元, 每件销售价格为 14 元, 试求每日的总成本、收益及利润函数.

解 由题意可知, 总成本函数为 $C = 140 + 10q$ ($0 \leq q \leq 100$).

总收益函数为 $R = p \cdot q = 14q$.

总利润函数为 $L = R(q) - C(q) = 4q - 140$.

令 $L = 4q - 140 = 0$, 得 $q = 35$, 所以每日生产的保本产量为 35 件.

3. 需求函数

商品的需求量是指在一定的条件下, 消费者愿意购买并且有支付能力的商