普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学系列教材（第二版）

大学数学 5

湖南大学数学与计量经济学院　组编
主编　李丹衡　顾广泽　蒋月评

Mathematics

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
大学数学系列教材(第二版)

大学数学

Daxue Shuxue

5

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书是《大学数学》系列课程教材之一，主要介绍复变函数的基本概念、基本理论和基本方法，内容包括复数与复平面、复变函数、复变函数的积分、解析函数的级数展开及其应用、留数理论及其应用、共形映射等。各章之后配有适量的习题，书末附有部分习题答案。

本书结构严谨，内容丰富，逻辑性强，叙述简洁易懂、重点突出、难点分散，例题和习题等均经过精选，具有代表性和启发性，便于教学。

本书可作为高等学校本科非数学类各专业学生的“复变函数”课程教材或参考书，也适合工程技术人员以及各类需要提高数学素质和能力的人员使用和参考。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学.5/李丹衡，顾广泽，蒋月评主编；湖南大学数学与计量经济学院组编．—2版．—北京：高等教育出版社，2010.7

（大学数学系列教材）

ISBN 978-7-04-029633-4

Ⅰ.①大… Ⅱ.①李…②顾…③蒋…④湖… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第110222号

策划编辑	王 强	**责任编辑**	董达英	**封面设计**	张雨微
责任绘图	尹 莉	**版式设计**	王 莹	**责任校对**	刘 莉
责任印制	陈伟光				

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京市白帆印务有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
		版 次	2003年1月第1版
开 本	787×960 1/16		2010年7月第2版
印 张	8.75	**印 次**	2010年7月第1次印刷
字 数	160 000	**定 价**	12.70元

物料号 29633-00

大学数学系列教材
（第二版）

湖南大学数学与计量经济学院　组编

《大学数学 1》　主编　黄立宏　马柏林

《大学数学 2》　主编　曹定华　孟益民

《大学数学 3》　主编　曾金平　彭亚新

《大学数学 4》　主编　罗　汉　杨湘豫

《大学数学 5》　主编　李丹衡　顾广泽　蒋月评

前言

湖南大学数学与计量经济学院于2001年组织编写了《大学数学》(1 ~5)系列教材,由刘楚中任总主编,黄立宏任副总主编,其中《大学数学1》由黄立宏和戴斌祥主编,刘楚中、杨湘豫、李亚琼、邓爱珍、孟益民、朱惠延参加编写;《大学数学2》由曾金平和李晓沛主编,彭亚新、邓爱珍、蒋月评参加编写;《大学数学3》由刘楚中和曹定华主编,杨冬莲、李建平、刘开宇、彭亚新、岃亚、朱郁森参加编写;《大学数学4》由杨湘豫和邓爱珍主编,喻胜华、谭德俊、彭国强、晏木荣、刘先霞、胡春华参加编写;《大学数学5》由李董辉和曾金平主编,马传秀参加编写。该系列教材被列为"普通高等教育'十五'国家级规划教材",由高等教育出版社于2002年和2003年相继出版。教材出版后历经湖南大学各非数学专业多届本科生使用,国内许多高等学校也将其选作一些本科专业的教材,得到师生的好评,同时我们也收集到了许多宝贵意见和修改建议。为了进一步提高教材质量,打造精品教材,学院决定组织人员对该系列教材进行修订,并于2005年底由黄立宏牵头将教材的修订申报了"普通高等教育'十一五'国家级规划教材",且顺利通过。现出版的此套教材就是在原《大学数学》(1 ~5)系列教材的基础上修订而成的。由于参加原系列教材编写的部分教师相继退休或调离,在此次修订工作中,我们新成立了编写委员会,委员会由黄立宏任主任,罗汉任副主任,修订版各分册的主编为委员会成员。

本分册由李丹衡、顾广泽、蒋月评任主编,参加编写的还有:李永群、肖映青。根据目前湖南大学本科通识教育平台课程的设置,本分册的内容调整为复变函数,介绍复变函数的基本概念、理论和方法,主要包括复数、复平面、解析函数、复积分、复级数、留数理论、共形映射等。本书的内容依照原国家教委颁布的《复变函数课程教学基本要求》进行选择和安排。本书结构严谨,逻辑性强,叙述力求做到简洁、易懂;同时精选了例题,并配有适量的习题,便于教学。

由于编者水平有限,本教材中难免会有不妥之处和有待进一步改进的地方,希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见。

本系列教材是许多教师多年教学实践的结晶,其编写和出版得到湖南大学数学与计量经济学院各位教师、湖南大学教务处和高等教育出版社的大力支持,在此表示衷心感谢。

湖南大学数学与计量经济学院

2010年3月

目　录

第一章　复　　数

复变函数讨论的是自变量为复数的函数理论,它是本课程的研究对象.本章先从较高的角度介绍复数的定义、运算、复平面点集和扩充复平面,为后面的复变函数的研究作准备.

第一节　复数的定义及其代数运算

一、复数的概念

在学习初等代数时已经知道,在实数范围内,方程 $x^2=-1$ 是无解的,因为没有一个实数的平方等于-1.如果我们把“实数范围”的限制取消,情况将会是如何呢？为此,人们自然想到了这样一个问题:是否存在一个比实数集更大的数集,在这个数集内包含了上述方程的解？回答是肯定的.下面我们来介绍这个集合.

用 $\mathbf{R}$ 表示实数集,我们把有序实数对 (a,b) 的全体称为复数集合,记为

$$\mathbf{C}=\{(a,b)\mid a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R}\}.$$

(a,b) 称为一个复数.对于两个复数 (a,b)、(c,d),如果 $a=c,b=d$,则称这两个复数相等,记为 $(a,b)=(c,d)$.

在复数集中,我们定义加法和乘法两种运算:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc),$$

容易验证,加法和乘法对复数集 $\mathbf{C}$ 是封闭的,都满足交换律.此外,$\mathbf{C}$ 中的加法和乘法还满足分配律:

$$[(a,b)+(c,d)](e,f)=(a,b)(e,f)+(c,d)(e,f).$$

根据上述运算,我们可以找到类似于实数中的零元、单位元、负元和逆元.

复数 $(0,0)$ 满足如下性质:$\forall(a,b)\in\mathbf{C}$,有

$$(0,0)+(a,b)=(a,b),$$

$$(0,0)(a,b)=(0,0).$$

因此,$(0,0)$ 为复数域中的零元素,容易验证,零元素是唯一的,且 $(a,b)=(0,0)$ 的充要条件是 $a^2+b^2=0$.

复数 $(1,0)$ 是乘法的单位元,因为 $\forall(a,b)\in\mathbf{C}$,都有

$$(1,0)(a,b)=(a,b).$$

另外,不难验证,$(-a,-b)$是(a,b)唯一的负元;对每一个非零元素(a,b),有唯一的逆元$(a,b)^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

很自然地,我们可定义复数的减法和除法:

$$(a,b)-(c,d)=(a,b)+(-c,-d)=(a-c,b-d);$$

对$(c,d)\neq(0,0)$,

$$(a,b)\div(c,d)=(a,b)(c,d)^{-1}=(a,b)\left(\frac{c}{c^2+d^2},\frac{-d}{c^2+d^2}\right)=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}\right).$$

综上所述,我们在复数集上建立的基本代数运算符合代数学中的一般公理,因此,**C** 也称为复数域.(实数集在实数的加法和乘法运算下构成实数域.)

下面我们来讨论复数集和实数集之间的关系.记$\widetilde{\mathbf{R}}=\{(a,0)\mid a\in\mathbf{R}\}$,则$\widetilde{\mathbf{R}}$是 **C** 的一个子集,而$(a,0)\to a$是$\widetilde{\mathbf{R}}$与 **R** 之间的一一对应.当把复数集中的运算作用在$\widetilde{\mathbf{R}}$上时,有

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0),$$
$$(a,0)(b,0)=(ab,0).$$

即运算是封闭的,因而$\widetilde{\mathbf{R}}$是 **C** 的一个子域.可以看出,作用在$\widetilde{\mathbf{R}}$上的运算实质上就是实数集 **R** 上的运算.因此,我们认为$\widetilde{\mathbf{R}}$就是实数域 **R**,并直接记$\widetilde{\mathbf{R}}=\mathbf{R}$,$(a,0)=a$.从而实数域 **R** 是复数域的一个子域.

在复数域中,方程$x^2=-1$的解存在,它就是$(0,1)$,事实上,$(0,1)^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$.

二、复数的表示及运算

在 **C** 中,$(0,1)$这个元素有其特殊性,我们专门用 i 记$(0,1)$这个元素,于是有$\mathrm{i}^2=-1$.由于$(0,b)=(b,0)(0,1)=b\mathrm{i}$,于是每一个复数$(a,b)$都可以写成:

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=a+b\mathrm{i}.$$

从现在开始,我们不再用实数对(a,b)来表示复数,而直接用$z=a+b\mathrm{i}$的形式来记复数.a称为复数z的实部,记为$a=\mathrm{Re}\,z$,b称为z的虚部,记为$b=\mathrm{Im}\,z$;复数集记为

$$\mathbf{C}=\{z\mid z=a+b\mathrm{i},a,b\in\mathbf{R}\}.$$

在这种表示下,复数的代数运算可以像实数一样地进行.比如,合并同类项、多项式乘法、分母有理化等.

加法:$(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}$;

减法：$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$；

乘法：$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$；

除法：$\dfrac{a+bi}{c+di}=(a+bi)\left(\dfrac{c-di}{c^2+d^2}\right)=\left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+\left(\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i\quad(c^2+d^2\neq 0)$.

设 $z=a+bi$，定义 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，$\bar{z}=a-bi$. 称 $|z|$ 为 z 的模，$\bar{z}$ 为 z 的共轭复数. 它们有如下一些基本性质：

(1) $\operatorname{Re} z=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$，$\operatorname{Im} z=\dfrac{1}{2i}(z-\bar{z})$；

(2) $z\bar{z}=|z|^2=(\operatorname{Re}(z))^2+(\operatorname{Im}(z))^2$；

(3) $\bar{\bar{z}}=z$，$|z|=|\bar{z}|$；

(4) $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$，$\overline{zw}=\bar{z}\,\bar{w}$，$\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=\dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$；

(5) $|zw|=|z||w|$，$\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}$.

以上性质的证明，留给读者作为练习.

例 1　设 $z_1=1+2i$，$z_2=-3+4i$，求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$ 和 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$.

解　$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\dfrac{1-2i}{-3-4i}=\dfrac{(1-2i)(-3+4i)}{25}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i$，

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{|1+2i|}{|-3+4i|}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

例 2　设 $z=-\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}$，求 $\operatorname{Re}(z)$ 和 $|z|^2$.

解　$z=-\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}=\dfrac{i}{i(-i)}-\dfrac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$$=i-\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i.$$

所以，$\operatorname{Re}(z)=\dfrac{3}{2}$，$|z|^2=z\bar{z}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}$.

例 3　证明：若 $z+\dfrac{1}{z}$ 为实数，则有 $\operatorname{Im}(z)=0$ 或 $z\bar{z}=1$.

证　设 $z=x+yi$，由于 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\dfrac{\bar{z}}{x^2+y^2}$，故

$$z+\frac{1}{z}=x+yi+\frac{x-yi}{x^2+y^2}=\frac{x(x^2+y^2+1)+y(x^2+y^2-1)i}{x^2+y^2},$$

已知 $z+\dfrac{1}{z}$ 为实数，故有

$$\mathrm{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{y(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2}=0,$$

从而 $y=0$ 或 $x^2+y^2=1$，即 $\mathrm{Im}\ z=0$ 或 $z\bar{z}=1$.

第二节 复数的几何意义

一、复平面及复数加法的几何意义

在平面上取定一个直角坐标系，实数对(a,b)就表示平面上的一个点 M，也确定了向径$\overrightarrow{OM}$(如图 1-1). 所以，复数的全体与该平面上的点成一一对应，也与向径的全体成一一对应，即

$$z=a+bi\longleftrightarrow M(a,b)\longleftrightarrow\overrightarrow{OM}.$$

因此，我们常将复数与点和向量视为同义语.

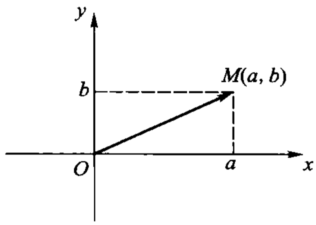

图 1-1

我们把直角坐标系的横轴称为实轴，纵轴称为虚轴，两轴所在的平面称为复平面，有时也可以用表示复数的字母来称呼复平面，比如，z 平面，w 平面等.

在复平面上，我们可以对复数的一些特征和性质进行几何描述. 比如，从图 1-1 知，复数 z 的模 $|z|$ 即为向量$\overrightarrow{OM}$的长度 $|\overrightarrow{OM}|$；复数的实部 $\mathrm{Re}(z)=a$ 和虚部 $\mathrm{Im}(z)=b$ 分别为向量$\overrightarrow{OM}$在实轴和虚轴上的投影. 显然，下列各式成立：

$$|\mathrm{Re}(z)|\leqslant|z|,\ |\mathrm{Im}(z)|\leqslant|z|,\ |z|\leqslant|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|.$$

根据向量理论，由一向量经过平移所得的所有向量表示的是同一向量，向量的加、减法遵循平行四边形法则. 我们可以给出复数加、减法运算的几何意义(如图 1-2). 并得出复数的三角不等式：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,$$
$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|.$$

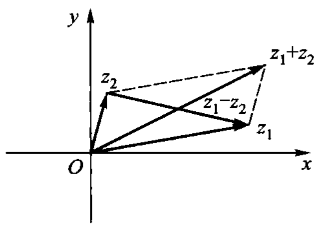

图 1-2

二、复数的三角形式和指数形式

在复平面上，不为零的复数 $z=x+iy$，其对应的点有极坐标(r,θ)(如图1-3). 于是有：$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$. 显然，$r=|z|$，θ 是正实轴与从原点 O 到点 z 的射线的夹角，称为复数 z 的辐角. 显然有 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$.

我们规定：正实轴按逆时针方向转动到射线$\overrightarrow{Oz}$，所成的角为正值；按顺时针方向转动，所成的角为负值. 容易看出，每一个不为零的复数的辐角有无穷多个值，它们彼此间相差 2π 的整数倍. 记复数 $z(\neq 0)$ 的全部辐角的集合为 $\mathrm{Arg}\, z$，则有 $\mathrm{Arg}\, z=\theta+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，其中 θ 为复数 z 的一个辐角. 通常把满足条件 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 的辐角 θ 称为 $\mathrm{Arg}\, z$ 的主值，记为 $\theta=\arg z$. 于是有

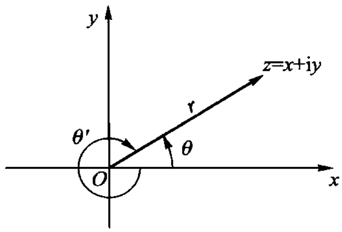

图 1-3

$$\mathrm{Arg}\, z=\arg z+2k\pi,\quad k\in\mathbf{Z}. \qquad (1-1)$$

当 $z=0$ 时，$|z|=0$，辐角不确定，即 $\mathrm{Arg}\, 0$ 没有意义.

利用极坐标表示，复数 z 可以表示为：

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta). \qquad (1-2)$$

(1-2)式称为复数的三角表示. 再利用欧拉(Euler)公式：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta. \qquad (1-3)$$

又可以将复数表示成指数形式：

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \qquad (1-4)$$

复数的各种表示形式可以相互转换，以适应运算和研究问题的需要.

例 1　把复数$\sqrt{3}+\mathrm{i}$ 表示成三角形式和指数形式.

解　$r=\sqrt{3+1}=2$，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 因为$\sqrt{3}+\mathrm{i}$ 对应的点在第一象限，所以 $\arg(\sqrt{3}+\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{6}$，于是$\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

例 2　求 $\mathrm{Arg}(-4-3\mathrm{i})$.

解　由式(1-1)，$\mathrm{Arg}(-4-3\mathrm{i})=\arg(-4-3\mathrm{i})+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$. 由 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ 及 $-4-3\mathrm{i}$位于第三象限知，$\arg(-4-3\mathrm{i})=\arctan\dfrac{3}{4}-\pi$（如图 1-4），所以有

$$\mathrm{Arg}(-4-3\mathrm{i})=\arctan\frac{3}{4}+(2k-1)\pi, k\in\mathbf{Z}.$$

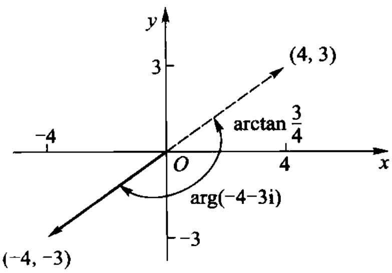

图 1-4

一般地，对于不为零的复数 $z=x+\mathrm{i}y=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，由于 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$，$\arg z$ 都可以用 $\arctan\dfrac{y}{x}$的关系来确定：

$$\arg z \underset{(z\neq 0)}{=} \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & \text{当 } x>0, y\geqslant 0 \text{ 或 } x>0, y\leqslant 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x=0, y>0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x=0, y<0, \\ \arctan \dfrac{y}{x}+\pi, & \text{当 } x<0, y>0, \\ \arctan \dfrac{y}{x}-\pi, & \text{当 } x<0, y<0, \\ \pi, & \text{当 } x<0, y=0, \end{cases} \tag{1-5}$$

其中$-\dfrac{\pi}{2}<\arctan \dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}$.

例 3 已知 $z=x+\mathrm{i}y(z\neq 0)$,证明 $\operatorname{Arg} z=-\operatorname{Arg}\bar{z}$ 并讨论 $\arg z$ 和 $\arg\bar{z}$ 的关系.

证明 设 $z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z}$,则 $\bar{z}=|z|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arg z}$,则有

$$\operatorname{Arg}\bar{z}=-\arg z+2k\pi, \quad k\in\mathbf{Z}.$$

从而

$$-\operatorname{Arg}\bar{z}=\arg z+2(-k)\pi=\arg z+2k_1\pi, \quad k_1\in\mathbf{Z},$$

即

$$-\operatorname{Arg}\bar{z}=\operatorname{Arg} z.$$

若 z 不在负实轴上,即$-\pi<\arg z<\pi$,则$-\pi<-\arg z<\pi$,因此 $\arg\bar{z}=-\arg z$;若 z 在负实轴上,即 $\bar{z}=z=x(x<0)$,从而 $\arg\bar{z}=\arg z=\arg x=\pi(x<0)$.

要注意的是,$\operatorname{Arg} z=-\operatorname{Arg}\bar{z}$ 是集合之间的相等关系,应理解为:对于$\operatorname{Arg} z$的任意一个值,$\operatorname{Arg}\bar{z}$ 中必有一个值与之对应,使等式 $\operatorname{Arg} z=-\operatorname{Arg}\bar{z}$ 成立.

三、复数乘法的几何意义

设复数 z_1,z_2分别写成三角形式:

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2).$$

根据复数的乘法运算法则及正弦、余弦的三角公式,有

$$\begin{aligned} z_1z_2&=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2) \\ &=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+ \\ &\quad \mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]. \end{aligned} \tag{1-6}$$

上面的式子用指数形式表示,可得

$$z_1z_2=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}. \tag{1-7}$$

由此得

$$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|,\quad \operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2. \tag{1-8}$$

式(1-8)说明了复数相乘的几何意义(如图1-5):两个复数相乘,积的模等于各复数模的积,积的辐角等于这两个复数的辐角的和.由于 $\operatorname{Arg} z$ 的多值性,(1-8)式中右边的等式表示的是集合的相等,而不能写成 $\arg z_1z_2=\arg z_1+\arg z_2$.

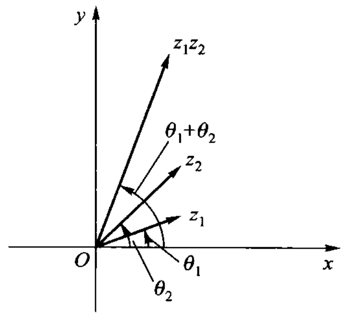

图1-5

当 $z_2\neq 0$ 时,由(1-8)式可得

$$|z_1|=\frac{|z_1|}{|z_2|}|z_2|,\operatorname{Arg} z_1=\operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2}+\operatorname{Arg} z_2,$$

即

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2. \tag{1-9}$$

由此可见,两个复数的商等于它们的模的商.商的辐角等于被除数的辐角与除数的辐角的差.

例4　求复数 $z=-5e^{i\frac{\pi}{4}}$ 的模和辐角的主值.

解　把 z 视为复数 -5 和 $e^{i\frac{\pi}{4}}$ 的乘积.由于 $-5=5e^{i\pi}$,则

$$z=5e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}=5e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)}=5e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}.$$

所以,$|z|=5,\operatorname{Arg} z=\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.取 $k=-1$,就得到位于 $(-\pi,\pi]$ 间的辐角 $-\dfrac{3\pi}{4}$,于是 $\arg z=-\dfrac{3\pi}{4}$.

例5　已知正三角形的两个顶点 $O(0,0)$、$B(3,2)$,求它的另一个顶点.

解　如图1-6,记 $\overrightarrow{OB}=z_1=3+2i,\overrightarrow{OC}=z_2$,于是 $z_1=\sqrt{13}e^{i\theta},z_2=\sqrt{13}e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}=\sqrt{13}e^{i\theta}e^{i\frac{\pi}{3}}=(3+2i)\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=(3+2i)\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{3}\right)+\left(1+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$.故 C 的坐标为 $\left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{3},1+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.同理,$C'$ 的坐标为 $\left(\dfrac{3}{2}+\sqrt{3},1-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

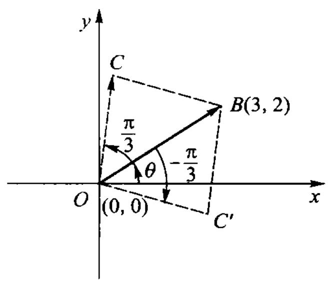

图1-6

四、复数的乘幂和方根

公式(1-8)很容易推广到任意有限个复数乘积的情形：

$$|z_1z_2\cdots z_n|=|z_1||z_2|\cdots|z_n|,\operatorname{Arg}(z_1z_2\cdots z_n)=\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2+\cdots+\operatorname{Arg} z_n. \quad (1-10)$$

特别地，当 $z_1=z_2=\cdots=z_n=z$ 时，称 $z^n=\underbrace{zz\cdots z}_{n}$ 为 z 的 n 次乘幂($n\geqslant 1$).(1-10)式此时为

$$|z^n|=|z|^n,\quad \operatorname{Arg} z^n=\underbrace{\operatorname{Arg} z+\cdots+\operatorname{Arg} z}_{n}. \quad (1-11)$$

设 $z=re^{i\theta}$，由(1-11)式得

$$|z|=r^n,\quad \operatorname{Arg} z^n=n\theta+2k\pi, k\in\mathbf{Z}.$$

从而

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r^n e^{in\theta}. \quad (1-12)$$

特别，当 $|z|=1$ 时，有

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta=e^{in\theta}, \quad (1-13)$$

这就是棣莫弗(De Moivre)公式.

对于 $z\neq 0$，如果我们定义 $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$，不难证明下式成立：

$$z^{-n}=|z|^{-n}[\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)]=r^{-n}e^{-in\theta}. \quad (1-14)$$

复数的 n 次方根是复数 n 次乘幂的逆运算. 下面我们介绍复数的 n 次方根的定义和求法.

设 $z=re^{i\theta}$ 是已知复数，n 为正整数，则称满足方程

$$\omega^n=z$$

的所有复数 ω 为 z 的 n 次方根.

显然，当 $z=0$ 时，方程 $\omega^n=0$ 仅有一个解 $\omega=0$. 当 $z\neq 0$ 时，我们即将看到，有 n 个不同的 ω 与 z 对应. 我们把这些值都记为 $\sqrt[n]{z}$，即

$$\omega=\sqrt[n]{z}.$$

为了求出这些根，我们设 $\omega=\rho e^{i\varphi}$，由复数 z 的 n 次方根的定义和(1-12)式，得

$$\omega^n=\rho^n e^{in\varphi}=re^{i\theta}.$$

于是

$$\rho^n=r,\quad n\varphi=\theta+2k\pi,\quad k\in\mathbf{Z},$$

解得

$$\rho=\sqrt[n]{r},\quad \varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n},\quad k\in\mathbf{Z},$$

其中 $\sqrt[n]{r}$ 是算术根，所以

$$\omega=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}},\quad k\in\mathbf{Z}.$$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时，得到 n 个相异的根：

$$\omega_0=\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}},\quad \omega_1=\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta+2\pi}{n}\right)},\quad \cdots,\quad \omega_{n-1}=\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right)}.$$

当 k 以其他整数值代入时，这些根又重复出现. 例如，$k=n$ 时，$\omega_n=\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2n\pi}{n}}=\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{n}+2\pi\right)}=\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}=\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}=\omega_0$.

以上结果告诉我们，非零复数的 n 次方根有 n 个. 在复平面上，它们均匀分布在以原点为中心，半径为 $\sqrt[n]{r}$ 的圆周上，它们是内接于该圆周的正 n 边形的 n 个顶点(见图 1-7).

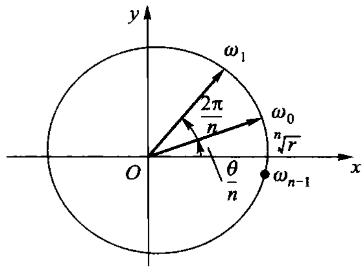

图 1-7

例 6　计算 $\sqrt[6]{-1}$.

解　因为 $-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+2k\pi)}$，所以

$$\sqrt[6]{-1}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)}=\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right]^{2k+1}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\right)^{2k+1},k=0,1,2,3,4,5.$$

第三节　复平面点集

我们把复平面上具有某种性质的点的集合，称为复平面点集. 和实多元函数一样，复平面点集对今后研究复变函数有着重要影响.

一、几个常见的复平面点集

1. 邻域

集合 $D(z_0,\delta)=\{z:|z-z_0|<\delta\}$ 称为 z_0 的 δ 邻域，其中 $\delta>0$. $\{z:0<|z-z_0|<\delta\}$ 称为 z_0 的去心邻域，记为 $D(z_0,\delta)\setminus\{z_0\}$.

2. 内点、开集

对于点集 E 中的点 z_0，若有一个 z_0 的邻域 $D(z_0,\delta)\subset E$，则称 z_0 为 E 的一个内点. 如果 E 中的点全是内点，则称 E 为开集.

3. 边界点、边界

如果在点 z_0 的任意邻域内，既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点，则称 z_0 为 E 的边界点. 集合 E 所有边界点的集合称为 E 的边界，记为 ∂E.

4. 区域

如果集 E 内的任何两点都可以用包含在 E 内的一条弧线连接起来，则称集 E 为连通集. 连通的开集称为区域. 区域 E 和它的边界 ∂E 的并集称为闭区域，记为 $\overline{E}$.

5. 有界区域

如果存在正数 M,使得对一切 $z\in E$,有 $|z|<M$,则称 E 为有界集.若区域 E 有界,则称 E 为有界区域.

6. 简单曲线、光滑曲线

我们把集合 $\Gamma=\{z|z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t),t\in[\alpha,\beta]\subset\mathbf{R}\}$ 称为复平面上的一条曲线,其中 $x(t)$,$y(t)$ 是实变量 t 的两个实函数.方程 $z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$ 称为曲线 Γ 的参数方程,点 $A=z(\alpha)$ 和 $B=z(\beta)$ 为曲线 Γ 的两个端点.如果当 $t_1,t_2\in[\alpha,\beta]$ 且 $t_1\neq t_2$ 时,有 $z(t_1)\neq z(t_2)$,称曲线 Γ 为简单曲线,也称约当(Jordan)曲线.$z(\alpha)=z(\beta)$ 的简单曲线称为简单闭曲线(见图 1-8).

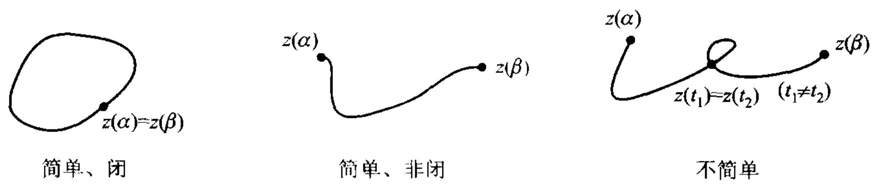

图 1-8

如果 $x'(t)$,$y'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上存在且连续,而且 $[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0$ ($t\in[\alpha,\beta]$),则称曲线 Γ 为光滑曲线.由有限条光滑曲线连接而成的连续曲线,称为分段光滑的曲线.

7. 单连通区域、多连通区域

设 E 为复平面上的区域,如果在 E 内的任意简单闭曲线的内部均包含于 E,则称 E 为单连通区域,否则就称为多连通区域.

二、复解析几何

在初等解析几何里,一个轨迹的方程表示成 x 和 y 之间的一种关系.这种关系用复数形式表示,有时会显得非常方便.下面举例子说明.

例 1 求下列方程所表示的曲线.

(1) $\arg z=\dfrac{\pi}{3}$; (2) $|z-2\mathrm{i}|=|z+2|$; (3) $\mathrm{Re}(1-\bar{z})=-1$.

解 (1) $\arg z$ 表示 x 轴与复数 z 对应的向量 $\overrightarrow{Oz}$ 之间的夹角,故 $\arg z=\dfrac{\pi}{3}$ 表示从原点出发与 x 轴夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 的射线,但去掉原点(如图 1-9(a)).

(2) 几何上,该方程表示到点 2i 和 −2 距离相等的点的轨迹,故所求的曲线是连接 2i 和 −2 的线段的垂直平分线,即 $y=-x$(如图 1-9(b)).