普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

线性代数及其应用（第二版）
学习辅导与习题选解

同济大学数学系　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材配套参考书

线性代数及其应用(第二版)
学习辅导与习题选解

Xianxing Daishu jiqi Yingyong(Di'erban)
Xuexi Fudao yu Xiti Xuanjie

同济大学数学系　编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是与同济大学数学系编写的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《线性代数及其应用》(第二版)配套的学习辅导书。全书按原教材的章节编排，每章按节(或相关的几节)编写了内容要点、教学要求和学习注意点、释疑解难、例题增补、习题选解等栏目，针对学生学习中的问题和需要进行辅导。全书对原教材中三分之一的习题作了详细解答。

本书内容切合教学实际，针对性强，注重帮助学生掌握线性代数的基本知识、基本理论和基本技能，可作为培养应用型人才的本科和专科学校非数学类专业学生学习线性代数的参考书，也可供其他工程技术人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其应用(第二版)学习辅导与习题选解/同济大学数学系编. —北京：高等教育出版社，2010.7

ISBN 978-7-04-029704-1

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①同… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 098552 号

策划编辑 于丽娜　**责任编辑** 崔梅萍　**封面设计** 张　志
责任绘图 郝　林　**版式设计** 范晓红　**责任校对** 王效珍
责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	煤炭工业出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2010 年 7 月第 1 版
印　　张	8.5	印　　次	2010 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	140 000	定　　价	12.40 元

物料号　29704-00

前　言

本书是与同济大学数学系编写的普通高等教育"十一五"国家级规划教材《线性代数及其应用》(第二版)配套的学习辅导书。主要面向使用该教材的学生,也可供教师作教学参考。

全书按原教材的章节编排,与教学要求同步。以每节或相邻的几节为一个单元,按单元设置内容要点、教学要求和学习注意点、释疑解难、例题增补、习题选解等栏目,为学生提供辅导和帮助。书中的教学要求依据"工科类本科数学基础课程教学基本要求"而制订,同时根据实际教学需要作了一些小的修改。各单元的学习注意点是对学生的建议或提醒,而释疑解难和例题增补是对教材的适当补充和提高。习题选解是针对教材中具有典型性的一部分习题作出解答。

参加本书编写的有同济大学数学系(按编写章节次序排列)单海英(第一章),陈素琴(第二章),靳全勤(第三章),范麟馨(第四、五章)。

由于编者水平有限,错误和不妥之处在所难免,恳请广大读者和各位同行批评指正。

编者
2010 年 3 月

目　录

第一章　矩阵和行列式 …… 1
第一、二节　矩阵　矩阵的运算及应用举例 …… 1
一、内容要点 …… 1
二、教学要求和学习注意点 …… 1
三、释疑解难 …… 1
四、例题增补 …… 3
五、习题选解 …… 5
第三节　矩阵的初等变换与矩阵的等价 …… 11
一、内容要点 …… 11
二、教学要求和学习注意点 …… 11
三、释疑解难 …… 12
四、例题增补 …… 12
五、习题选解 …… 13
第四节　行列式 …… 15
一、内容要点 …… 15
二、教学要求和学习注意点 …… 16
三、释疑解难 …… 16
四、例题增补 …… 18
五、习题选解 …… 22
第五节　可逆矩阵及应用举例 …… 28
一、内容要点 …… 28
二、教学要求和学习注意点 …… 28
三、释疑解难 …… 29
四、例题增补 …… 30
五、习题选解 …… 33
第六节　分块矩阵 …… 35
一、内容要点 …… 35
二、教学要求和学习注意点 …… 35

三、释疑解难 …… 35
四、例题增补 …… 37
五、习题选解 …… 38
第二章 矩阵的秩与线性方程组 …… 40
第一节 初等矩阵 …… 40
一、内容要点 …… 40
二、教学要求和学习注意点 …… 40
三、释疑解难 …… 40
四、例题增补 …… 41
五、习题选解 …… 42
第二节 矩阵的秩 …… 46
一、内容要点 …… 46
二、教学要求和学习注意点 …… 46
三、释疑解难 …… 46
四、例题增补 …… 46
五、习题选解 …… 47
第三节 线性方程组的求解 …… 49
一、内容要点 …… 49
二、教学要求和学习注意点 …… 49
三、释疑解难 …… 49
四、例题增补 …… 50
五、习题选解 …… 55
第四节 应用举例 …… 61
一、例题增补 …… 61
二、习题选解 …… 64
第三章 向量组的线性相关性 …… 69
第一节 向量与向量组 …… 69
一、内容要点 …… 69
二、教学要求和学习注意点 …… 69
三、释疑解难 …… 69
四、例题增补 …… 70
五、习题选解 …… 71
第二节 向量组的线性相关性 …… 75
一、内容要点 …… 75

二、教学要求和学习注意点 …… 75
三、释疑解难 …… 75
四、例题增补 …… 77
五、习题选解 …… 79
第三节 向量组的秩 …… 84
一、内容要点 …… 84
二、教学要求和学习注意点 …… 84
三、释疑解难 …… 85
四、例题增补 …… 85
五、习题选解 …… 86
第四节 线性方程组解的结构 …… 87
一、内容要点 …… 87
二、教学要求和学习注意点 …… 87
三、释疑解难 …… 87
四、例题增补 …… 88
五、习题选解 …… 92
第五节 向量空间 …… 98
一、内容要点 …… 98
二、教学要求和学习注意点 …… 98
三、释疑解难 …… 99
四、例题增补 …… 99
五、习题选解 …… 100
第四章 矩阵的对角化 …… 102
第一节 向量内积与正交矩阵 …… 102
一、内容要点 …… 102
二、教学要求和学习注意点 …… 102
三、释疑解难 …… 103
四、例题增补 …… 103
五、习题选解 …… 104
第二节 方阵的特征值与特征向量 …… 105
一、内容要点 …… 105
二、教学要求和学习注意点 …… 105
三、释疑解难 …… 106
四、例题增补 …… 106

五、习题选解 …… 108
第三节 相似矩阵 …… 109
一、内容要点 …… 109
二、教学要求和学习注意点 …… 109
三、释疑解难 …… 110
四、例题增补 …… 110
五、习题选解 …… 112
第四节 对称矩阵必可对角化 …… 113
一、内容要点 …… 113
二、教学要求和学习注意点 …… 113
三、释疑解难 …… 113
四、例题增补 …… 114
五、习题选解 …… 115
第五章 二次型 …… 117
第一、*二节 二次型及标准形 用配方法化二次型为标准形 …… 117
一、内容要点 …… 117
二、教学要求和学习注意点 …… 117
三、释疑解难 …… 118
四、例题增补 …… 119
五、习题选解 …… 120
第三节 正定二次型 …… 122
一、内容要点 …… 122
二、教学要求和学习注意点 …… 122
三、释疑解难 …… 123
四、例题增补 …… 123
五、习题选解 …… 124

第一章　矩阵和行列式

第一、二节　矩阵　矩阵的运算及应用举例

一、内 容 要 点

1. 矩阵的概念，了解矩阵的产生背景，并会用矩阵形式表示一些实际问题. 熟悉诸如 n 阶方阵，对角阵，上(下)三角阵等有特殊结构的矩阵.

2. 矩阵的加法，数与矩阵的乘法和矩阵的乘法等运算法则.

3. 线性方程组概念，线性方程组的系数矩阵与增广矩阵，线性变换的概念及线性方程组与线性变换的矩阵表示形式.

4. 方阵的幂，方阵的多项式，矩阵的转置，对称矩阵概念.

二、教学要求和学习注意点

1. 理解矩阵概念；了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、对称矩阵及其基本性质.

2. 熟练掌握矩阵的加法、数与矩阵的乘法和矩阵的乘法等运算规则及它们的基本性质.

3. 掌握方阵的幂、方阵的多项式的概念，了解它们在实际问题中的应用.

4. 理解矩阵的转置及其运算性质，掌握对称矩阵的概念.

学习注意点：

矩阵是线性代数中的一个重要概念，是处理后续章节中诸如线性方程组理论、特征值特征向量与对角化、二次型等问题的重要基础和工具，矩阵的理论和方法几乎贯穿了本课程的始终，必须熟练掌握矩阵的各种运算. 要深刻理解矩阵及其运算的定义，要熟练掌握矩阵的各种运算和运算规律，要注意与数的运算进行比较，特别注意与数的运算不同之处，千万不要将矩阵的运算规则与数的运算混为一谈.

三、释 疑 解 难

1. 理解矩阵乘法，需要注意什么？

答:关于矩阵乘法,需要注意下面两点:

(1) 定义矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相乘是有前提的:只有当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数时,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 才能够相乘,即 $\boldsymbol{AB}$ 才有意义,而且 $\boldsymbol{AB}$ 的行数等于 $\boldsymbol{A}$ 的行数,$\boldsymbol{AB}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的列数.

(2) 矩阵乘法的运算规律与数的乘法运算规律是有区别的,两者在下列三个方面存在差异:

① 矩阵乘法不满足交换律,即一般的有 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$,当 $\boldsymbol{AB}$ 有意义时,$\boldsymbol{BA}$ 未必有意义;即使 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{BA}$ 都有意义,$\boldsymbol{AB}$ 也未必等于 $\boldsymbol{BA}$. 例如:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=(2\quad 1),\quad 则\ \boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{BA}=(4).$$

又如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$,则$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$.

当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 不可交换时,即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$ 时,下列各式均不成立.

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$;

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^k=\boldsymbol{A}^k+\mathrm{C}_k^1\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{B}+\cdots+\mathrm{C}_k^{k-1}\boldsymbol{AB}^{k-1}+\boldsymbol{B}^k$;

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$;

$(\boldsymbol{AB})^k=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$.

上述各式成立当且仅当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

② 两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵. 例如:

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

矩阵的乘积的这一特性使其与数的运算规律有很大不同,例如

一般的 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\nRightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$. 如 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$,而 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 既不是零矩阵也不是单位阵.

一般的 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}\nRightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$,或 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&\mathrm{i}\\\mathrm{i}&-1\end{pmatrix}$ 时有 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$(此处 $\mathrm{i}^2=-1$). 实际上 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵.

③ 矩阵的乘法运算不满足消去律,即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$,且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 时,未必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$. 例如:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\quad 但\ \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}-1&-1\\0&0\end{pmatrix}.$$

2. 矩阵多项式有哪些性质?

答:设 x 的一个 m 次多项式 $f(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$,将多项式中 x 的幂替换为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的同次幂(x 的零次幂用 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}$ 来替换)就得到 $\boldsymbol{A}$ 的一个矩阵多项式 $f(\boldsymbol{A})=a_m\boldsymbol{A}^m+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}$. 它有下列性质:

(1) $f(\boldsymbol{A})$也为 n 阶方阵;

(2) 设 $f(\boldsymbol{A}),g(\boldsymbol{A})$均为 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵多项式,则 $f(\boldsymbol{A}),g(\boldsymbol{A})$乘法可交换,即 $f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})=g(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A})$. 从而熟知的普通多项式的乘法规则和因式分解规则,对于矩阵多项式也成立,如:

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^m=\boldsymbol{E}+\sum_{k=1}^{m}\mathrm{C}_m^k\boldsymbol{A}^k,\quad \boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}).$$

(3) 若对角阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$,则 $f(\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n)\end{pmatrix}$.

四、例题增补

例 1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ b & -1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$,求 a,b 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

解:直接计算有

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & a\\ b & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2a & 1\\ b-2 & b\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ b & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+b & a-1\\ 2 & 2a\end{pmatrix}.$$

由矩阵相等的定义有

$$\begin{cases}1+2a=1+b,\\ 1=a-1,\\ b-2=2,\\ b=2a,\end{cases}$$

由此可知 $a=2,b=4$.

例 2 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^k$.

解:由 $A^2=AA=\begin{pmatrix}4&&&\\&4&&\\&&4&\\&&&4\end{pmatrix}=2^2E$ 有 $A^3=A^2A=2^2EA=2^2A$,所以,

当 k 为偶数时,$A^k=(A^2)^{\frac{k}{2}}=(2^2E)^{\frac{k}{2}}=2^kE$;

当 k 为奇数时,$A^k=A^{k-1}A=(2^{k-1}E)A=2^{k-1}A$.

例 3 已知 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\3&6&-3\end{pmatrix}$,求 A^{100}.

分析:当矩阵 $A=\alpha\beta^T$ 时,其中 α,β 均为 $n\times1$ 的矩阵,则由矩阵乘法满足结合律可得

$$A^m=\alpha\beta^T\alpha\beta^T\cdots\alpha\beta^T\alpha\beta^T=\alpha\underbrace{(\beta^T\alpha)\cdots(\beta^T\alpha)}_{m-1\text{个}\beta^T\alpha}\beta^T=(\beta^T\alpha)^{m-1}\alpha\beta^T.$$

注意 $\alpha\beta^T$ 为 n 阶方阵,而 $\beta^T\alpha$ 为 1 阶方阵,等同于一个数.

解:由矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\3&6&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1\quad 2\quad -1)$,则

$$A^{100}=\left((1\quad 2\quad -1)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)^{99}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1\quad 2\quad -1)=2^{99}A.$$

例 4 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}$,证明:当 $n\geqslant3$ 时,$A^n=A^{n-2}+A^2-E$.

证明:本题用数学归纳法来证明.

首先,验证当 $n=3$ 时命题成立.由直接计算,得

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\3&1&0\end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned}A+A^2-E&=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\3&1&0\end{pmatrix}=A^3,\end{aligned}$$

即当 $n=3$ 时命题成立.

其次,假设当 $n=k$ 时命题成立,即 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}^{k-2}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$. 要证 $n=k+1$ 时命题也成立,

$$\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{k-2}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^{k-1}+\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{k-1}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E},$$

于是,当 $n\geqslant 3$ 时总有 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$.

例 5 设 $f(x)=x^8-6\,400$, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$,求 $f(\boldsymbol{A})$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&&\\&9&\\&&9\end{pmatrix}=9\boldsymbol{E}$ 知

$$\boldsymbol{A}^8=(9\boldsymbol{E})^4=9^4\boldsymbol{E},$$

从而 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^8-6\,400\boldsymbol{E}=(9^4-6\,400)\boldsymbol{E}=161\boldsymbol{E}$.

五、习 题 选 解

(习题一,教材第 64,65 页)

3. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为某公司向三个商店发送四种产品的数量表

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c}\\ \text{甲商店}\\ \text{乙商店}\\ \text{丙商店}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\text{空调}&\text{冰箱}&29''\text{彩电}&25''\text{彩电}\end{array}\\ \begin{pmatrix}30&20&50&20\\0&7&10&0\\50&40&50&50\end{pmatrix}\end{array},$$

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是这四种产品的售价(单位:百元)及重量(单位:千克)的数表

$$\boldsymbol{B}=\begin{array}{c}\\ \text{空调}\\ \text{冰箱}\\ 29''\text{彩电}\\ 25''\text{彩电}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{售价}&\text{重量}\end{array}\\ \begin{pmatrix}30&40\\16&30\\22&30\\18&20\end{pmatrix}\end{array},$$

求该公司向每个商店售出产品的总售价及总重量.

解: $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}30&20&50&20\\0&7&10&0\\50&40&50&50\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30&40\\16&30\\22&30\\18&20\end{pmatrix}=\begin{array}{c}\\ \text{甲商店}\\ \text{乙商店}\\ \text{丙商店}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{总售价}&\text{总重量}\end{array}\\ \begin{pmatrix}2\,680&3\,700\\332&510\\4\,140&5\,700\end{pmatrix}\end{array}.$

4. 已知两个线性变换：

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3, \\ y_2 = -x_1 + 3x_2 - x_3, \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = y_1 - y_2, \\ z_2 = 2y_1 + 4y_2, \end{cases}$$

求(1) 从 x_1, x_2, x_3 到 z_1, z_2 的线性变换.(2) 从 z_1, z_2 到 y_1, y_2 的线性变换.

解:(1) 先将题设中的两个线性变换改写为矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 16 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \\ -2x_1 + 16x_2 + 2x_3 \end{pmatrix},$$

从而

$$\begin{cases} z_1 = 2x_1 - x_2 + 4x_3, \\ z_2 = -2x_1 + 16x_2 + 2x_3. \end{cases}$$

(2) 已知从 y_1, y_2 到 z_1, z_2 的线性变换为 $\begin{cases} z_1 = y_1 - y_2, \\ z_2 = 2y_1 + 4y_2, \end{cases}$ 要求从 z_1, z_2 到 y_1, y_2 的线性变换,只需将此变换 $\begin{cases} z_1 = y_1 - y_2, \\ z_2 = 2y_1 + 4y_2 \end{cases}$ 看作一个未知量为 y_1, y_2 的线性方程组,用 z_1, z_2 表示出 y_1, y_2 即可.经计算得：

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{2}{3}z_1 + \dfrac{1}{6}z_2, \\ y_2 = -\dfrac{1}{3}z_1 + \dfrac{1}{6}z_2. \end{cases}$$

5. (1) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA}$.

(2) 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶矩阵,试证 $\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA}$ 的对角线上的元素之和必为 0.

(1) **解**:

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 5 & 12 & 10 \\ -6 & -1 & 21 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 13 & 4 & 13 \\ 2 & 16 & 19 \\ -5 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$

$$AB-BA=\begin{pmatrix}-9 & -4 & -18\\ 3 & -4 & -9\\ -1 & -8 & 13\end{pmatrix}.$$

(2) **证**:由矩阵乘法的定义知矩阵 AB 主对角线上的元素为

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1},\sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i2},\cdots,\sum_{i=1}^{n} a_{ni}b_{in}.$$

它们的和为 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}b_{ij}$. 同样,$BA$ 的主对角线上的元素的和为

$$\sum_{j=1}^{n} b_{1j}a_{j1}+\sum_{j=1}^{n} b_{2j}a_{j2}+\cdots+\sum_{j=1}^{n} b_{nj}a_{jn}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ji}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}b_{ij}.$$

这说明 AB 与 BA 的主对角线上的元素的和相等,从而 $AB-BA$ 的主对角线上的元素的和为零.

7. (1) 试证:若方阵 A 与 B 乘法可交换,即 $AB=BA$,则下列两式成立:

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2,$$
$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2;$$

(2) 举例说明.若 A 与 B 不可交换,即 $AB\neq BA$,则(1)中两个式子不成立.

(1) **证**:由 $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$ 及 $AB=BA$ 可推得

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2.$$

由 $(A+B)(A-B)=A^2+BA-AB-B^2$ 及 $AB=BA$ 可推得

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2.$$

(2) 例如,若 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$,则

$$AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\neq BA=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

(1)中两个式子不成立.

8. 设 n 阶方阵 A,B 满足 $A=\frac{1}{2}(B+E)$,试证 $A^2=A$ 成立的充分必要条件是 $B^2=E$.

证:由 $A=\frac{1}{2}(B+E)$ 知

$$\begin{aligned}A^2=A&\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}(B+E)\right)^2=\frac{1}{2}(B+E)\\ &\Leftrightarrow\frac{1}{4}(B^2+2B+E)=\frac{1}{2}(B+E)\\ &\Leftrightarrow B^2+2B+E=2B+2E\Leftrightarrow B^2=E,\text{命题得证.}\end{aligned}$$

9. AT&T,MCI 和 Sprint 三家电信公司为美国国内 2 亿客户服务，它们分别有客户 9 千万，4 千万和 7 千万. 由于广告竞争及其他原因，这三家公司每年均吸引来一些新客户，同时也失去一些老客户. 每年末统计如下：AT&T 失去 20%老客户，但吸引 10%的 MCI 客户和 10%的 Sprint 客户加入该公司；MCI 失去 30%的老客户，但吸引 10%的 AT&T 客户及 20%的 Sprint 客户；Sprint 失去 30%的老客户，但吸引 10%的 AT&T 客户和 20%的 MCI 客户. 假设美国国内客户总数不变，且这种新老客户的变化率也不变，求三年后，三家公司分别拥有多少客户(单位：千万)?

解：设 k 年后三家公司拥有的客户数分别为 x_k, y_k, z_k，根据题设知 $k+1$ 年后三家公司拥有的客户数分别为

$$\begin{cases} x_{k+1}=0.8x_k+0.1y_k+0.1z_k, \\ y_{k+1}=0.1x_k+0.7y_k+0.2z_k, \\ z_{k+1}=0.1x_k+0.2y_k+0.7z_k, \end{cases}$$

将此关系改写为矩阵形式有

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix},$$

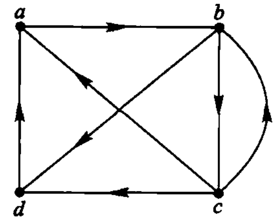
由此式可推出

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

从而

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.467 \\ 6.079 \\ 6.454 \end{pmatrix},$$

即 3 年后 AT&T,MCI 和 Sprint 这三家公司分别有客户 7.467 千万，6.079 千万和 6.454 千万.



10. 设有向图如右图所示，

(1) 写出邻接矩阵；

(2) 求顶点 c 到 a 长为 3 的线路的条数；

(3) 是否存在从顶点 a 到 b 的长为 3 的线路?

解：

(1) 根据有向图的邻接矩阵的定义(见课本 P17)可知右图的邻接矩阵为

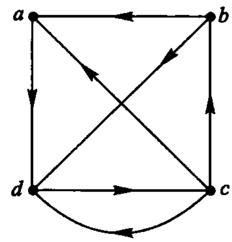
$$
\begin{array}{c|cccc}
 & a & b & c & d \\
a & & & & \\
b & & & & \\
c & & & & \\
d & & & &
\end{array}
\quad
A=\begin{array}{c}a\\b\\c\\d\end{array}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}.
$$

(2) 通过计算知

$$
A^3=\begin{pmatrix}2&1&0&1\\1&2&1&1\\2&2&1&2\\0&0&1&1\end{pmatrix},
$$

A^k 的第 3 行第 1 列的元素值即为顶点 c 到 a 长为 k 的线路的条数，故顶点 c 到 a 长为 3 的线路的条数为 2；

(3) A^3 的第 1 行第 2 列的元素为 1，则 a 到 b 恰有一条长为 3 的线路，即 $a \to b \to c \to b$.



11. 设某小航空公司在 4 个城市间的运行有向图如右图所示，

(1) 写出它的邻接矩阵 A；

(2) 令 $B=A^{\mathrm{T}}A$，计算 b_{14}（这里 $B=(b_{ij})$），并说明它的意义.

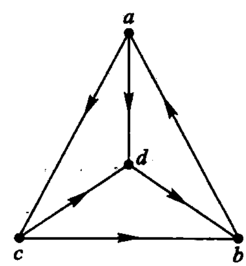
解：(1) 它的邻接矩阵为

$$
A=\begin{array}{c|cccc}
 & a & b & c & d \\ \hline
a & 0 & 0 & 0 & 1 \\
b & 1 & 0 & 0 & 1 \\
c & 1 & 1 & 0 & 1 \\
d & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

(2) 由 $B=A^{\mathrm{T}}A$，则

$$
b_{14}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\\a_{41}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}a_{14}\\a_{24}\\a_{34}\\a_{44}\end{pmatrix}=a_{11}a_{14}+a_{21}a_{24}+a_{31}a_{34}+a_{41}a_{44}=2.
$$

若 $a_{11}a_{14}+a_{21}a_{24}+a_{31}a_{34}+a_{41}a_{44}$ 中的任一项，不妨设 $a_{k1}a_{k4}$，等于 1，则由邻接矩阵的定义知 a_{k1}，a_{k4} 均为 1，即第 k 个城市既有到城市 a 的航班，又有到城市 d 的航班. 因 $b_{14}=2$，则有两个城市同时有航班飞往城市 a 和 d.



12. 四支篮球队进行单循环赛，结果如右图（无平局），其中有向线段 (i,j) 表示 i 击败 j. 按例 1.11 的排序