

知识丛书

中国古代数学简史

上册

李儼 杜石然 著



中国古代数学簡史

上 册

李 儼 杜石然 著

《知識丛书》編輯委员会編

知識就是力量。一个革命干部需要有古今中外的丰富知識作为从事工作和学习理論的基础。《知識丛书》就是为了滿足这个需要而編印的；內容包括哲学、社会科学、自然科学、历史、地理、国际問題、文学、艺术和日常生活等知識。为了使这一套丛书編写得更好，我們期望讀者們和作者們予以支持和合作，提供意見和批評。

《知識丛书》編輯委员会

中華書局出版

(北京復興門外翠微路2号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第17号

北京市印刷一厂印刷

新华书店北京发行所发行 全国新华书店經售

*

开本 787×1092 毫米 1/36 · 印張 41/6 · 字數 68,000

1963年2月第1版

1963年2月北京第1次印刷

印數 00,001—30,500 定价 0.35 元

統一書号 11018·401 62.12.京型

目 录

第一章 中国古代数学的初期阶段

(先秦)(1)

(一) 最初的数和形的概念(1)

1. 关于数的起源、结绳和规矩的传说(1)

2. 十进制文字记数(5)

(二) 筹算——中国古代主要的计算方法(9)

1. 筹算的创始(9)

2. 十进地位制算筹记数(12)

3. 筹算的加减乘除四则运算(15)

(三) 先秦古书中的数学知识以及

古代的数学教育(25)

1. 《考工记》《墨经》等书中的数学知识(25)

2. 数学教育以及“司会”“法算”“畴人”
的出现(29)

第二章 中国古代数学体系的形成

(汉)(33)

(一) 《周髀算经》(33)

1. 内容概述(33)

2. 荣方和陈子关于数学的对话(37)

3. 勾股定理和勾股测量(39)

4. 《周髀算经》中的分数计算(43)

(二) 《九章算术》	(45)
1. 内容概述	(45)
2. 算术方面的成就	(51)
3. 几何方面的成就	(56)
4. 代数方面的成就	(63)
第三章 魏晋南北朝之际中国数学的 发展	(78)
(一) 赵爽《勾股圆方图注》	(78)
(二) 刘徽的贡献	(84)
1. 割圆术	(84)
2. 《九章算术注》中的其他成就	(89)
3. 《海岛算经》	(98)
(三) 南北朝时代的伟大数学家祖冲之	(104)
1. 祖冲之、祖暅小传	(104)
2. 关于圆周率的计算	(107)
3. 关于球体体积的计算	(110)
第四章 隋唐时期的中国数学	(116)
(一) 隋唐天文学家的内插法研究	(116)
(二) “十部算经”和隋唐时期的数学教育	(122)
1. “十部算经”	(122)
2. 隋唐时期的数学教育	(138)
3. 隋唐时期数学的中外交流	(142)

第一章 中国古代数学 的初期阶段（先秦）

（一）最初的数和形的概念

1. 关于数的起源、結绳和規矩的传说

中国古代数学的萌芽，要追溯到遥远遥远的古代。假如有人发問：“我們远古时代的祖先，从什么时候起，开始掌握了最初的数和形的概念呢？”这是一个不容易回答的問題。正若要回答“誰第一个使用火、石斧和鋤头”的問題一样，我們是不可能确切明白地回答出“誰第一个开始懂得計算数目”这一問題的。

正由于人們对这个問題不能給予确切明白的解答，所以就編造出各种各样的传说和神話来了。

《世本》——这是我国上古时代的一部古书，在其中記載了如下的一段传说：“黄帝命令他的臣子羲和观测太阳，常仪观测月亮，臾区观测星星，伶倫編制音乐，大撓編制甲子紀年的方法，命令隶首作数。”在古代，“隶首作数”的传说流传得很广泛，許多书籍都郑重其事地提到

这件事，不单是《世本》这样说①。

把数的概念的創造完全归之于一个人，归之于黄帝时代的“隶首”，显然不合实际的历史情况。实际上，数的概念不可能是一个人的天才創造，而只能是人們在漫长的历史时期中，由于劳动生产的实际需要而逐漸形成。

除“隶首作数”之外，还有和古代数学萌芽有关的两項传说必須提到，那就是“結绳”和“規矩”。

《易·繫辞》中說：“上古的时候人們‘結绳而治’，后世的圣人方才用文字去代替它。”《庄子》中也記載这个传说：“古来容成氏、……軒轅氏、……伏羲氏、神农氏的时候，‘民結绳而用之’”。这都是說，在人們还没有使用文字之前，是用“绳”打成各种結扣来記事的。不难想像，古时人們也用绳扣来記数。有的古书中还进一步解释說：“事情大，就用绳子打一个大結扣；事情小，就打一个小結扣。绳扣的多少，就表示着事物的多少。”② 据各方面的实际調查，直到不久以前，世界上还有一些少数民族仍然使用着“結绳”記数的方法呢。

“規”，就是圓規，是用来画圓的工具；“矩”的形状可能和現代木工所使用的曲尺很相像，是用来画方形的工具。“規矩”是我們今天常用

的名詞，但它的起源却是很早。它也是傳說時代的產物。

在傳說中，認為倕是“規矩”的創始人。倕也稱垂，或者叫工倕。有的古書中說：古時候倕創作了“規矩”和“准繩”，天下的人就都學他使用規矩和准繩^③。在另一些傳說中，卻又認為伏羲是“規矩”的創造者。在公元二世紀時漢朝的浮雕像，到現在還保留着，其中就有伏羲手執矩、女媧手執規的圖像，而且還不只一處^④。根據這些傳說看來，“規矩”的產生可能是很早的。在司馬遷所寫的《史記》中也提到夏禹治水的時候，“左准繩（左手拿着准繩）”，“右規矩（右手拿着規矩）”，進行治水時候所必需的測量工作^⑤。

這些傳說，雖然大多是後人從想像中編造

① 《世本》已失傳，但在其他古書中還散見着這部書中的某些片段。這裡所引的話，見于唐司馬貞為《史記·歷書》所作的“索隱”。為了便于理解，將原文作了適當的今譯。以後引述古書，尽可能仿此處理。

② 三國吳虞翻《易九家義》引鄭玄注。

③ 周尸佼《尸子》卷下。

④ 漢武梁祠造像（4頁圖示系根據北京圖書館所藏拓片）。他處如《沂南古画像石墓發掘報告》（文化部文物管理局1956年出版，第25圖）亦有記載。

⑤ 見《史記》卷2《夏本紀》，原文為：“（禹）陸行乘車，水行乘舟，泥行乘橇（音敲），山行乘櫓（音局），左准繩，右規矩，載四時，以開九州，通九道。”本書凡直接引錄原文，必要時當用括弧插入解釋原文的詞句。下文仿此。



图 1 规矩图(汉武梁祠石室造像拓片)

出来的,但由这些传说,人们可以了解到:

(1)从很早的时候起,甚至在人们讲不清楚的远古时代,人们就已经开始掌握了关于数和形的概念。

(2)在没有文字记数以前,人们是用“结绳”来记事和记数的。

(3)从很早的时候起,人们也掌握了绘制简单图形的“规”和“矩”的工具。

2. 十进制文字记数

在探讨古代数学萌芽时期的情况时,固然可以根据一些神话和传说作出某些推断,但是更重要的依据还得靠地下发掘出来的古代文物。通过考古学的研究,可以得出一些更为正确的推断。

据现在已经出土的文物证明:在大约十万年以前,“河套人”在骨器上刻有菱形的花纹。当时的石器工具也都具有一定的形状。在更为进步的仰韶文化中,彩陶上除了一些动物花纹之外,还有一些定型的图案,有的是由三角形和直线组成的,有一些是由圆点和曲线组成的。此外还有网状的和棋盘状的花纹。在陶器上还发现了人们特意刻上去的各种记号,大多数是竖划,也有Z形的记号。

經過了若干万年的原始社会，大約在公元前两千年左右的时候，我国历史上形成了第一个阶级社会——奴隶社会。商朝建立起来了。

由出土的文物証明：商朝的文化已經相当发达。由于农业的进一步发展，促进了社会的分工。在現今的郑州、輝县等地都发现了当时奴隶主用来貯藏粮食的长方形或圓形的粮窖。青銅器也进一步向前发展了。具有长、短、方、圓各种形体的青銅兵器、食器和祭器被鑄造出来。随着社会分工的进一步发展，引起了交换的扩大，在現在的郑州附近还发見了当时使用的有孔的貨币。

在公元前十四世紀的时候，商朝把都城迁到現在的河南安阳小屯附近，經濟文化更进一步地向前发展了。

在商代后期，还出現了某种由于农业需要而編制的历法。

从公元十九世紀末叶起，人們开始在河南安阳附近的小屯，发掘出大批刻有文字的龟甲和兽骨。經過研究，人們可以了解到殷商貴族非常崇拜祖先，他們把向祖先占卜的一切事情、占卜的結果以及日后的应驗，在龟甲和兽骨上鑄刻成文字，記錄下来。通常把这种刻在甲骨上的商代的文字叫作“甲骨文”。这些由“甲骨文”組

成的詞句，都是些“卜辭”。

“甲骨文”是我們已經發現的我国最早的文字。也可以說，从这时候起，我国就已經有了有文字可考的历史。“甲骨文”是了解商朝晚期情况的宝貴資料。

就已經發現的甲骨文字來說，当时商代人使用的单字，就已經达到了五千个左右。其中也包含有数字。这是我国有关文字記数方面的最早的历史資料。甲骨文中常常記載着战争中俘获敌人的数目或是杀掉敌人的数目，狩猎时猎得禽兽的数目，祭祀时宰杀牲畜的数目等等。在甲骨文中也載有計日的日数。举例如下：

“八日辛亥允戈伐二千六百五十六人”——这是說：八日辛亥那一天，在战争中杀死了二千六百五十六个人。

“俘人十又六人”——这是指：俘敌十六人。

“十犬又五犬”

“十牛又五”

“鹿五十又六”

“五百四旬又七日”——这是指：五百四十七天。

.....

甲骨文中最大的数目是“三万”，最小的是“一”。一，十，百，千，万，各有专名。

甲骨文中一至十的象形文字大致如下：

甲骨文字 一 二 三 三 五 六 七 八 九 十
 一 二 三 四 五 六 七 八 九 十

百、千、万的形状则如：

𠄎𠄎, 𠄎, 𠄎,
 百 千 万

二十、三十、……，二百、三百……以及二千、三万等等，都用两个字合写在一起的“合文”，如：

𠄎	𠄎	𠄎	文	𠄎	千	𠄎
二十	三十	四十	五十	六十	七十	八十
𠄎	𠄎	𠄎	𠄎	𠄎		𠄎 𠄎
二百	三百	四百	五百	六百		八百 九百
𠄎	𠄎	𠄎	𠄎		𠄎	
二千	三千	四千	五千		八千	
𠄎						
三万						

例如“二千六百五十六”在甲骨文中就记为“𠄎𠄎文𠄎”。

保存下来一直流传到今天的古代文字，除了甲骨文之外，还有一种铸在青铜器上面的文字。人们把这种文字叫作“钟鼎文”或“金文”。据考证，金文大致是周代的文字。金文中关于数字的记法很多和甲骨文的记法相似，不同的只有把“十”写成“𠄎”，而“四”除了“三”之外还可以写成“𠄎”或“𠄎”。金文中复合数的记法与甲骨文不同，如“六百五十九”，金文中记为

“𠄎𠄎𠄎𠄎𠄎”，中間都以“𠄎”（“又”字）隔開，成為“六百又五十又九”。同時“五十”是用合文寫的，而且是“五”在上，“十”在下，甲骨文則恰好相反，是“五”在下而“十”在上^①。

到了漢朝以後，記多位數字不再用“又”字隔開，而且也取消了合文。字的形狀也和現代常用的漢字完全一樣了。

我們把甲骨文、金文和漢朝時所用的一至十的數字排列如下表，從而可以看出其間的演變過程。

甲骨文	一	二	三	四	五	六, 八	十	九	十
金文	一	二	三	四, 𠄎	五, 𠄎	六	十	九	十
漢時	一	二	三	四	五	六	七	八	九
現代	一	二	三	四	五	六	七	八	九

（二）籌算——中國古代主要的計算方法

1. 籌算的創始

上面談了文字記數的問題，但古代的計算，並不是用這些記數的文字直接來進行的。古人用來進行計算的工具是“算籌”。

在人類文化進步的歷史上，許多民族都會

^① 見郭沫若：《甲骨文研究》書中《釋五十》。

有过各自不同的計算工具。現在我們已經知道，离今約四五千年前的巴比倫人（在現代的伊拉克共和国境內），是用有棱角的木片，在泥板上刻压出各种有棱角的楔形符号来記数和进行計算的；古埃及人則是用一种象形文字，在尼罗河中所产的一种水草叶子上，記錄各种数学問題并进行計算的；中世紀的印度人和阿拉伯人，則是在沙盘里，或是直接在地上，用有尖的小木棍来进行“写算”的。“算筹”則是中国古代所特有的一种計算工具。

“筹”就是一些小竹棍。中国古代的数学家們就用这些小竹棍摆成不同的形式来表示不同的数目，并进行各种計算。这种用“筹”来进行的計算，叫作“筹算”。

在东汉許慎所編的《說文解字》中記有一个“算”字，一个“筭”字^①。許慎对“筭”字解释的原文是“筭，长六寸，所以計历数者。从竹、弄，言常弄乃不誤也。”这就是說：“筭”是一种計算用的工具。这个字是由“竹”和“弄”两个字合成的，意思就是經常摆弄它們便可以使計算准确无誤。許慎对“算”字解释的原文是“算：算数也，从竹、具，讀若筭。”这是說：“算”是計算数目的意思，讀法和“筭”完全相同。清朝人解释这两个字說：“筭”是一种計算用的工具，是名詞；

而“算”則是用“筭”来进行計算，是動詞^②。

《前漢書·律曆志》(公元一世紀)中記載有：“其算法用竹，徑一分，長六寸(約 140 毫米)”。

《隋書·律曆志》(公元七世紀)中則說：“其算用竹，廣二分，長三寸(約 70 毫米)”。由這些記載來看，從漢朝到隋朝，人們使用的算籌是在逐漸地縮短，這是因為短小些的算籌計算起來比較便利的原故。

這種用“籌”来进行計算的方法，究竟是从什么时候开始的，現在還找不到可靠的材料來作精確的說明。由於竹籌容易爛掉，不能長時間在地下保存，因而在現有出土的古器物中，還沒有發現算籌。不過可以相信，至遲在春秋戰國的時候，人們已經可以十分熟練地運用算籌来进行計算了。在流傳至今的春秋戰國時代的某些書籍中，便已經用到了“籌”字或“筭”字。例如《老子》書中就有“善計者不用籌策”的話，這是說會計算的人可以不用籌，用心算即可。在《儀禮》書中有幾篇都曾提到“筭”。如《特牲饋食禮》篇中有“爵皆无筭”的字句。在《鄉射禮》和《大射》兩篇中都有射箭時用“筭”來計數的記

① 見《說文解字》第五上。

② 見段玉裁《說文解字注》。在“算”字條下注有：“筭為算之器，算為筭之用，二字音同而義別”。

載。特別是在《大射》篇的記載中還有類似區別十位數和個位數的記法。

2. 十進地位制算籌記數

現在，我們解釋一下用算籌來計數的方法。用“算籌”來表示數目，有兩種形式：一種是縱（直）式的，另一種則是橫式的。它們的具體擺法是这样的：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
縱式						┐	┑	┒	┓
橫式	—	=	≡	≡	≡	⊥	⊥	⊥	⊥

怎樣使這種擺法和十進制配合起來呢？方法是：個位用縱式，十位用橫式，百位用縱式，千位再用橫式，萬位再用縱式，如此類推；遇到零的時候，就留個空位。這樣順着個、十、百、千、萬的次序，從右向左，數碼縱橫相間，再加空位，就可以表示出任何一個數目。例如 378 可以擺成 $\text{|||} \perp \text{|||}$ ；6708 可以擺成 $\perp \text{┑} \text{ } \text{|||}$ 。這種記數法，在《孫子算經》（約公元五世紀）和《夏侯陽算經》（約公元八世紀）中都有說明。《孫子算經》的原文是：“凡算之法，先識其位，一縱十橫，百立千僵（百位是縱式，千位又是橫式），千十相望，萬百相當。”《夏侯陽算經》中的原文為：“一縱十橫，百立千僵，千十相望，萬百相當。滿六以上，