全国高等教育自学考试教材

拓扑学基础

刘旺金　主编

武汉大学出版社

全国高等教育自学考试教材

拓 扑 学 基 础

（数 学 专 业）

刘旺金 主编

武 汉 大 学 出 版 社

主编　刘旺金
编著　刘旺金　温永华

全国高等教育自学考试教材
拓扑学基础
（数学专业）
刘旺金　主编
*
武汉大学出版社出版发行
（430072　武昌　珞珈山）
武汉市汉桥印刷厂印刷
*
850×1168　1/32　11.375印张　289千字
1992年7月第1版　1992年7月第1次印刷
印数：1—1300
ISBN 7-307-01287-1/O·106
定价：6.00元

出版前言

高等教育自学考试教材建设是高等教育自学考试工作的一项基本建设.经国家教育委员会同意,我们拟有计划、有步骤地组织编写一些高等教育自学考试教材,以满足社会自学和适应考试的需要.《拓扑学基础》是为高等教育自学考试数学专业组编的一套教材中的一种.这本教材根据专业考试计划,从造就和选拔人才的需要出发,按照全国颁布的《数学专业自学考试大纲》的要求,结合自学考试的特点,组织高等院校的专家编写而成的.

数学专业《拓扑学基础》自学考试教材,是供个人自学、社会助学和国家考试使用的.无疑也适用于其他相同专业方面的学习需要.现经审定同意予以出版发行.我们相信,随着高教自学考试教材的陆续出版,必将对我国高等教育事业的发展,保证自学考试的质量起到积极的促进作用.

编写高等教育自学考试教材是一种新的尝试,是项巨大的工程,希望得到社会各方面的关怀和支持,使它在使用中不断提高和日臻完善.

全国高等教育自学考试指导委员会

一九八九年三月

序　言

拓扑学是近代数学重要的基础分支学科之一，它是以研究图形在拓扑变换（一对一的、双方连续的映射）下的不变性质为特征．拓扑学的一些基本概念、方法和理论已经在其它数学分支（如泛函分析、微分方程、微分几何等）中广泛应用，甚至成为许多数学分支的一种通用语言，因此是学习近代数学的必备基础之一；而且，近年来，拓扑学的概念、方法愈来愈多地渗入到物理学、化学乃至生物学等学科之中．

朴素的拓扑学思想虽然可以追溯到 17 世纪甚至更早的年代，但作为一个具有相对独立，有足够影响的数学分支，拓扑学形成于 19 世纪末，20 世纪初．发展到近代，拓扑学又分为互相联系、各具特点的几个分支，包括点集拓扑、代数拓扑、微分拓扑、几何拓扑等，其中点集拓扑是它们的基础．

考虑到目前我国高等学校开设拓扑课程的情况，受高等教育自学考试指导委员会数学专业委员会的委托，我们曾草拟了一个以点集拓扑为主的拓扑学课程的自学考试大纲．本书就是遵照随后审定的这一大纲要求编写的，因而作为拓扑学基础，本书以点集拓扑的内容为主，加上属于代数拓扑的一些最基本的内容，如同伦、基本群等．

通过本课程的学习，自学应考者应当掌握拓扑空间和连续映射等基本概念，掌握子空间、乘积空间和商空间的拓扑结构，拓扑空间的最基本的拓扑性质，如分离性、可数性、连通性、紧性等，以及掌握映射的同伦、空间的基本群等概念及其基本性质，初步认识

用代数工具研究拓扑空间的方法的重要性.

本书的点集拓扑部分(第二章至第八章),与自学应考者已学过的数学分析、复变函数、实变函数与泛函分析等课程有密切联系,是过去已学的一些知识的系统化并加以推广,给出更一般、更抽象的形式,提出了一些基本概念、理论和方法. 读者会了解,良好的分析学基础会帮助理解这部分内容;反之,学好这部分内容不仅可以提高空间的想象能力和逻辑推理能力,也为进一步学习其它有关课程提供必需的基础知识.

本书的第九章是代数拓扑中最简单、直观的内容之一,读者能从中了解代数拓扑的特点是将拓扑空间与某种代数结构(例如群、同态与同构等)联系起来,借助于代数工具研究拓扑空间的性质,因而学习这部分内容要求对已学课程抽象代数的一些基本概念、性质有较好的了解.

拓扑学是一门理论性强、较为抽象的课程,同时作为几何学的一个分支,它的许多概念又有直观的几何背景. 本书的编写力图便于读者自学. 基本内容的讲解较为详细,注意了概念的引入,为准确把握一些基本概念选择了若干适当的例子,对较困难的定理的证明交代了思路或作了分析;我们在每章结尾作了简单小结,概述该章的主要概念及其相互关系、理论的重要结果和常用的方法等;为了帮助读者巩固所学内容,检查课程学习的情况,每小节配有适量的练习题,章末有复习题,全书有总复习题. 由于本课程的特点,计算题较少而需推证的题较多,书末所附"习题解答或提示"是供读者自学时参考的,它不是详尽的解答,当然不是唯一的也不一定是最简捷的方法. 我们更希望读者在掌握基本理论和方法的基础上,通过独立思考自己能作出正确的解答.

书中的附录:选择公理与曹恩引理,是为了帮助读者理解如第七章中紧性的吉洪诺夫定理等重要事实的证明而编写的,它本身不属于本课程的大纲要求和考试范围.

本书采用流行的记号."▮"表示证明完毕或证明明显,或留作

练习.“定理 3.5”表示同一章中的 3.5 定理,“定理 Ⅲ.1.10”表示第三章的 1.10 定理.命题、定义、例的编号类似,而“图 6—6”指第六章的图 6.

在本书的编写过程中得到数学专业委员会的许多老师的支持和鼓励,尤其是参加审定大纲和本书稿的陕西师范大学王国俊教授、四川大学蒋继光教授、中国科技大学熊金城教授、中山大学王则柯教授、华东化工学院蒲思立副教授等,他们在百忙中抽出时间仔细阅读书稿,提出了许多具体而中肯的意见.作者借此机会对他们致以衷心的谢意.

编　者

于四川师范大学(成都,狮子山)

1988.12.10.

目　　录

第一章 集合论(预备)

集合论是近代数学各分支的基础，也是各分支共同使用的语言. 这一章作为全书的预备知识，主要介绍集的并、交、补运算，介绍关系的概念及其基本性质，并着重讲两种最常见的关系：等价关系和映射(函数)，在此基础上介绍集合的积与商的运算，这是以后引入积空间和商空间的基础.

§1 集合及其运算

集合是数学中广泛使用而又未予以定义的最基本的概念. 为了描述它，我们可以把**集合**说成是具有某种特性的个体组成的集体. 例如可以说“正在自学《拓扑学基础》的全体学员的集合”、“所有实数的集合”等. 集合也常称为**集**，构成集合的成员常称为**元素**、**元**或**点**.

通常集合用大写字母 $A,B,X,Y,\cdots$ 等表示，而构成集合的元素用小写字母 $a,b,x,y,\cdots$ 等表示. 设 A 是一个集，若 x 是 A 的一个元，记为 $x\in A$，读作 x **属于** A. 若 x 不是 A 的元，记为 $x\notin A$，读作 x **不属于** A.

集合也可以没有成员. 例如平方等于 -1 的所有实数的集合不含任何成员. 这种没有成员的集称为**空集**，记为$\varnothing$. 除$\varnothing$以外的集称为**非空集**. 只含一个元的集称为**单元集**或**单点集**.

表示集有两种方法：**列举法**和**描述法**. 前一种方法是列举这个集的所有元，元与元之间用逗号分开，全体元素用括号{}括起来.

当集是有限集或可数无穷集时，常用这种方法. 例如所有正整数的集合可表示为$\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$. 后一种方法是指出集合的元应具备的特征性质. 例如前述集合用这种方法可表示为$\{x|x$ 是整数，且 $x>0\}$. 在这种表示法中，通常用 x 表示集的任意元素，符号"|"后指出集的元应具备的特征性质.

设 A 与 B 是两个集，当且仅当 A 与 B 由相同的元组成时，称 A 与 B 为**相等**，记作 $A=B$，读作 A **等于** B. $A=B$ 的否定命题记为 $A\neq B$，读作 A **不等于** B. 当且仅当集 A 的每个元都属于 B 时，称 A 是 B 的**子集**，记作 $A\subset B$，读作 A **包含于** B 或 B **包含** A. $A\subset B$ 的否定命题记为 $A\not\subset B$. 若 $A\subset B$，但 $A\neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**. 由上述诸概念我们得出下述定理.

1.1 定理 设 A,B,C 是任意 3 个集. 则

(i) $\varnothing\subset A\subset A$;

(ii) $A=B\Leftrightarrow A\subset B$ 且 $B\subset A$;

(iii) $A\subset B$ 且 $B\subset C\Rightarrow A\subset C$. ∎

此处，"$\Leftrightarrow$"表示"当且仅当"，"$\Rightarrow$"表示"蕴涵".

1.2 定义 设 A,B 是两个集合.

(i) 集$\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$称为 A 与 B 的**并集**或**并**，记作 $A\cup B$，读作 A 并 B.

(ii) 集$\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$称为 A 与 B 的**交集**或**交**，记作 $A\cap B$，读作 A 交 B. 特别地，若 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 与 B **无交**或**不相交**. 反之，若 $A\cap B\neq\varnothing$，则称 A 与 B **相交**.

(iii) 集$\{x|x\in B$ 且 $x\notin A\}$称为 B 对 A 的**差集**，记作 $B\backslash A$，读作 B 差 A 或 B 减去 A. 特别地，若 $A\subset B$，则差集 $B\backslash A$ 称为 A 关于 B 的**补集**. 在我们以后的许多讨论中，所涉及的集皆为某个给定集 X 的子集，则此 X 叫**基础集**，这时 X 的子集 A 关于 X 的补集中，字样"关于 X"可以省去，而径称 $X\backslash A$ 为 A 的补集，并简记为 A^c.

关于集的并、交、补运算有如下的基本规律.

1.3 定理 设 X 为基础集，$A,B,C\subset X$. 则

(i) （幂等律）$A\cup A=A$，$A\cap A=A$；

(ii) （交换律）$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(iii) （结合律）$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(iv) （分配律）$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

(v) （德·摩根(De Morgan)律）$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$. ∎

1.4 定理 设 X 是基础集，$A,B\subset X$. 则

(i) $\varnothing^c=X$，$X^c=\varnothing$；

(ii) $A\cup A^c=X$，$A\cap A^c=\varnothing$；

(iii) $A^{cc}=A$；

(iv) $A\backslash B=A\cap B^c$. ∎

上述集合的并、交运算不仅可推广到任意有限个集合的情形，还可推广到任意集族上.

设 Λ 是一个集，对每一个 $\alpha\in\Lambda$，恰有一集 A_α 与之对应，则称 $\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 为以 Λ 为指标集的**集族**，（Λ 叫做这个集族的**指标集**），记为 $\mathscr{A}=\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 以下集族常用大草字母 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 等表示. 特别若 $\mathscr{A}=\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 中每一 A_α 均是集 X 的子集，则 $\mathscr{A}$ 称为集 X 的**子集族**.

1.5 定义 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为一个集族.

(i) 集 $\{x|\exists\ \alpha\in\Lambda,x\in A_\alpha\}$ 称为集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的**并集**或**并**，记作 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$，或 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$，其中符号“$\exists$”表示“存在”.

(ii) 集 $\{x|\forall\ \alpha\in\Lambda,x\in A_\alpha\}$ 称为集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的**交集**或**交**，记作 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ 或 $\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$，其中符号“$\forall$”表示“对于每一个”.

特别，当 $\Lambda=\{1,2\}$ 或 $\Lambda=\{1,2,\cdots,n\}$ 时，并集 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ 分别记为 $A_1\cup A_2$，$A_1\cup\cdots\cup A_n$. 对于交集 $\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ 有类似的记法.

如果 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的子集族，当 $\Lambda=\varnothing$ 时，我们规定：

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \varnothing,\ \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = X.$$

1.6 定理 设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是 X 的子集族，$A\subset X$，则

(i) (分配律)$A\cap(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(A\cap A_\alpha)$，$A\cup(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}(A\cup A_\alpha)$；

(ii) (德·摩根律)$(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c=\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^c$，$(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c=\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^c$.

证明 作为例子我们证明(ii)的第二个等式. $\forall\ x\in X$,

$$x\in(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c \Leftrightarrow x\notin \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \Leftrightarrow \exists\ \alpha\in\Lambda, x\notin A_\alpha$$
$$\Leftrightarrow \exists\ \alpha\in\Lambda, x\in A_\alpha^c \Leftrightarrow x\in\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^c. \quad \blacksquare$$

有些特殊的集，今后经常使用，为方便计，我们用固定的字母表示它们. 例如用 **R** 表示所有实数的集合；**Q** 表示所有有理数的集合；**Z** 表示所有整数的集合；$\mathbf{Z}_+$表示所有正整数的集合. 集合 X 的所有子集构成一集，叫做 X 的**幂集**，记为 2^X. 即 $2^X=\{A\mid A\subset X\}$.

最后，我们介绍两个集合的笛卡尔积的概念. 设 x 为一元，y 为一元，由 x,y 配对组成一个新元(x,y)，称为**序偶**，而 x,y 分别称为序偶(x,y)的**第一坐标**、**第二坐标**. 当且仅当 $x=a$ 且 $y=b$ 时，称序偶(x,y)与(a,b)为**相等**，记作$(x,y)=(a,b)$.

注意：序偶(x,y)与集$\{x,y\}$不同，$\{x,y\}$与$\{y,x\}$是同一个集，而当 $x\neq y$ 时，$(x,y)\neq(y,x)$.

1.7 定义 设 X,Y 是两个集合，集$\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}$称为 X 与 Y 的**笛卡尔积**，记作 $X\times Y$，读作 X 乘 Y. X,Y 分别称为 $X\times Y$ 的**第一坐标集**、**第二坐标集**. 一个集 X 与它自己的笛卡尔积 $X\times X$ 常记作 X^2.

通常的笛卡尔坐标平面 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 就是实数的所有序偶的集.

显然，$X\times Y\neq\varnothing\Leftrightarrow X\neq\varnothing$且 $Y\neq\varnothing$.

对任意有限个集合的笛卡尔积我们自然有类似的定义(见§4).

习 题 一

1. 试判断下列关系的正确与错误：

(i) $A=\{A\}$； (ii) $A\in\{A\}$；

(iii) $\varnothing=\{\varnothing\}$； (iv) $\varnothing\subset\{\varnothing\}$.

2. 设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$为集族，验证：$\forall\ \beta\in\Lambda$，$\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\subset A_\beta\subset\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$.

3. 设$\forall\ \alpha\in\Lambda$，$A_\alpha\subset B_\alpha$，证明：

(i) $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\subset\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha$； (ii) $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\subset\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha$.

(特别地，若$\forall\ \alpha\in\Lambda$，$A_\alpha\subset B$，则$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\subset B$. 若$\forall\ \alpha\in\Lambda$，$A\subset B_\alpha$，则

$$A\subset\bigcap_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha.)$$

4. 设A,B,C是任意集合，验证：

(i) $(A\cap B)\cup(A\setminus B)=A$；

(ii) $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$；

(iii) $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$；

(iv) $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$；

(v) $A\cap(B\setminus C)=B\cap(A\setminus C)=(A\cap B)\setminus C$.

5. 设A,B是任意集合，证明下列三条互相等价：

(i) $A\cap B=\varnothing$； (ii) $A\subset B^c$； (iii) $B\subset A^c$.

6. 设A由n个成员构成，问2^A有多少个成员？

7. 设A_1,A_2,B_1,B_2是任意集合，验证：

(i) $A_1\times(B_1\cup B_2)=(A_1\times B_1)\cup(A_1\times B_2)$；

(ii) $A_1\times(B_1\setminus B_2)=(A_1\times B_1)\setminus(A_1\times B_2)$；

(iii) $(A_1\times A_2)\cap(B_1\times B_2)=(A_1\cap B_1)\times(A_2\cap B_2)$；

(iv) $(A_1\times A_2)\cup(B_1\times B_2)\subset(A_1\cup B_1)\times(A_2\cup B_2)$，并举出适当集合$A_1$，$A_2,B_1,B_2$使$(A_1\times A_2)\cup(B_1\times B_2)\neq(A_1\cup B_1)\times(A_2\cup B_2)$；

(v) 若$A_1\times B_1\subset A_1\times B_2$且$A_1\neq\varnothing$，则$B_1\subset B_2$.(考虑去掉$A_1\neq\varnothing$的条件后，结论是否成立?)

§2 关系 等价关系

2.1 定义 设X,Y是两个非空集合.

(i) 若 $T\subset X\times Y$，则 T 称为是 X 到 Y 的一个**关系**. 若 $(x,y)\in T$，则 x 与 y 称为是 T **相关**的，或称 xT **相关于** y，亦记为 xTy.

(ii) 设 T 是 X 到 Y 的一个关系.

集 $\{x\mid\exists\ y, xTy\}$，即 T 中所有元的第一坐标的集，称为 T 的**定义域**，记作 $\mathrm{Dom}T$.

集 $\{y\mid\exists\ x, xTy\}$，即 T 中所有元的第二坐标的集，称为 T 的**值域**，记作 $\mathrm{Ran}T$.

(iii) 设 T 是 X 到 X 的一个关系，且 $\mathrm{Dom}T=X$，则称 T 为 X 上的**关系**.

2.2 定义 设 T 是集 X 到 Y 的关系，V 是集 Y 到 Z 的关系.

(i) 集 $\{(y,x)\mid(x,y)\in T\}\subset Y\times X$ 称为 T 的**逆关系**，记作 T^{-1}.

(ii) 集 $\{(x,z)\mid\exists\ y, xTy$ 且 $yVz\}\subset X\times Z$ 称为 T 与 V 的**合成关系**，记作 $V\circ T$（注意 T 写在 V 的右侧）.

2.3 例 设

$$T=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R}, y=\sin x\}, V=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R}, y=e^x\}.$$

则 T,V 都是 $\mathbf{R}$ 上的关系，且

$$V\circ T=\{(x,z)\mid\exists\ y, y=\sin x, z=e^y\}$$
$$=\{(x,z)\mid x\in\mathbf{R}, z=e^{\sin x}\}.$$

2.4 定义 设 T 是 X 到 Y 的一个关系，$A\subset X$，$B\subset Y$.

集 $\{y\mid\exists\ x\in A, xTy\}$ 称为 A 在关系 T 下的**象**，记作 $T[A]$. 若 $x\in X$，单元集 $\{x\}$ 在 T 下的象 $T[\{x\}]$ 简记为 $T[x]$.

因为 T^{-1} 是 Y 到 X 的一个关系，$T^{-1}[B]$ 称为 B 在 T 下的**逆象**.

2.5 定理 设 T 是集 X 到 Y 的关系，V 是集 Y 到 Z 的关系，$A\subset X$，$\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\subset 2^X$，则

(i) $V\circ T[A]=V[T[A]]$;

(ii) $T[\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha]=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}T[A_\alpha]$，　$T[\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha]\subset\bigcap_{\alpha\in\Lambda}T[A_\alpha]$.

证明 (i) $z\in V\circ T[A]\Leftrightarrow\exists\ x\in A, x(V\circ T)z$

$\Leftrightarrow\exists\ x\in A,\exists\ y\in Y, xTy, yVz$

$\Leftrightarrow\exists\ y\in T[A], yVz$

$$\Leftrightarrow z\in V[T[A]].$$

(ii) $y\in T[\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha]\Leftrightarrow\exists\ x\in\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha,xTy$

$$\Leftrightarrow\exists\ \alpha\in\Lambda,x\in A_\alpha,xTy$$

$$\Leftrightarrow\exists\ \alpha\in\Lambda,y\in T[A_\alpha]$$

$$\Leftrightarrow y\in\bigcup_{\alpha\in\Lambda}T[A_\alpha].$$

当 $\Lambda=\varnothing$ 时，

$$T[\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha]=T[X]\subset Y=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}T[A_\alpha].$$

当 $\Lambda\neq\varnothing$ 时，

$y\in T[\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha]\Rightarrow\exists\ x\in\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha,xTy$

$\Rightarrow\exists\ x,\forall\ \alpha\in\Lambda$，使得 $x\in A_\alpha$ 且 xTy

$\Rightarrow\forall\ \alpha\in\Lambda,y\in T[A_\alpha]$

$\Rightarrow y\in\bigcap_{\alpha\in\Lambda}T[A_\alpha]$. ∎

[注] 定理 2.5(ii)最后一式一般不必为等式，例如，取 $X=\{a,b,c\},Y=\{1,2\},T=\{(a,1),(a,2),(b,1),(c,1)\}$，则 T 是 X 到 Y 的一个关系. $A_1=\{a\},A_2=\{b,c\}$ 是 X 的子集. 因 $A_1\cap A_2=\varnothing$，故 $T[A_1\cap A_2]=\varnothing$，而 $T[A_1]=\{1,2\},T[A_2]=\{1\}$，显然 $T[A_1\cap A_2]\neq T[A_1]\cap T[A_2]$.

在数学中常常需要将一个给定的集分成若干部分，研究以这些部分为元的新集(集族). 例如抽象代数学中研究的商群、商环等. 这种集的分类与集上的一类特殊的关系——等价关系联系十分密切. 我们首先引入等价关系的概念，然后说明它与集合分类的联系. 往后假设集 X 都是非空的.

2.6 定义 设 T 是 X 上的一个关系.

(i) 称 T 在 X 上是**自反的**，如果 $\forall\ x\in X,xTx$.

(ii) 称 T 在 X 上是**对称的**，如果 xTy，则 yTx.

(iii) 称 T 在 X 上是**传递的**，如果 xTy,yTz，则 xTz.

(iv) 称 T 是 X 上的一个**等价关系**，如果 T 在 X 上是自反的、对称的和传递的.