

新世纪土木工程系列规划教材

结构力学 下册

王彦明 王来 主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

新世纪土木工程系列规划教材

结 构 力 学

下 册

主 编	王彦明	王 来
副主编	马世荣	王崇革
参 编	郇筱林	都 浩



机 械 工 业 出 版 社

本书根据建设部高等学校土木工程专业指导委员会制定的“结构力学教学大纲”、结合教育部高等学校非力学专业力学基础课程教学指导分委员会制定的“结构力学课程教学基本要求”(A类)编写,重在介绍结构力学的基本概念、基本理论和基本方法,学习各类结构的受力性能,培养工科学生的结构受力分析能力。结构力学下册内容包括:矩阵位移法、结构的极限荷载、结构的稳定计算、结构的动力计算。

本书可作为高等工科院校土木工程、水利工程及工程力学等专业的通用教材,也可用作自学考试和电大、函大的教学参考书,并可供土木工程类工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

结构力学.下册/王彦明,王来主编.——北京:机械工业出版社,2010.8
(新世纪土木工程系列规划教材)

ISBN 978-7-111-31140-9

I. ①结… II. ①王… ②王… III. ①结构力学—高等学校—教材
IV. ①O342

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第124141号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:季顺利 责任编辑:马军平

版式设计:霍永明 责任校对:陈延翔

封面设计:张静 责任印制:杨曦

北京双青印刷厂印刷

2010年8月第1版第1次印刷

184mm×260mm·12印张·295千字

标准书号:ISBN 978-7-111-31140-9

定价:23.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心:(010) 88361066

门户网:<http://www.cmpbook.com>

销售一部:(010) 68326294

教材网:<http://www.cmpedu.com>

销售二部:(010) 88379649

读者服务部:(010) 68993821

封面无防伪标均为盗版

前言

本书是根据建设部高等学校土木工程专业指导委员会制定的“结构力学教学大纲”、结合教育部高等学校非力学专业力学基础课程教学指导分委员会制定的“结构力学课程教学基本要求”(A类),在总结编者多年教学实践经验的基础上编写的,包括上、下两册。重在介绍结构力学的基本概念、基本理论和基本方法,学习各类结构的受力性能,培养工科学生的结构受力分析能力。本书为下册,内容包括:矩阵位移法、结构的极限荷载、结构的稳定计算、结构的动力计算。

本书在内容和语言上力求精练,重点突出结构力学基本概念、基本原理和基本方法的讲授,强化结构受力分析计算能力的基本训练,结合土木工程特点,以工程实践为背景,加强工程应用能力和专业能力的培养。

本书选材适当,叙述简明,思路清晰,精选例题和习题,突出专业特色,符合认知规律。

本书编写人员均为从事结构力学教学十几年的教师,编写内容融入了编者多年来结构力学教学研究的成果。

本书可以供高等工科院校土木工程、水利工程及工程力学等专业作为教材,也可供其他相关专业选用。

参加本书编写的人员有:第11章由山东大学王彦明编写;第12章由山东科技大学王崇革编写;第13章由山东科技大学王来编写;第14章由山东大学马世荣编写;书中的例题和习题由郇筱林、都浩进行计算、复核。全书由山东大学王彦明统稿。

在编写过程中,参考了许多专家、学者的书籍和文献资料,在此表示由衷的感谢。

限于编者水平,书中难免存在错误,恳请读者批评指正。

编 者

主要符号表

A	图形面积, 振幅	I	惯性矩, 冲量
$\mathbf{A}$	振幅矢量	$\mathbf{I}$	单位矩阵
c	支座广义位移, 粘滞阻尼系数	k	刚度系数, 侧移刚度
C	弯矩传递系数	$\mathbf{K}$	结构的整体刚度矩阵
c_{cr}	临界阻尼系数	$\bar{\mathbf{k}}^e$	局部坐标系下单元刚度矩阵
d	结间长度	$\mathbf{k}^e$	整体坐标系下单元刚度矩阵
E	弹性模量	l	长度, 跨度
E_p	结构总势能	m	质量
f	拱高, 矢高, 工程频率	$\mathbf{M}$	质量矩阵
F	集中荷载	M	力矩, 力偶矩, 弯矩
F_{Hl}	水平推力	M^F	固端弯矩
F_{Ax}	A 支座沿 x 方向的反力	M_u	极限弯矩
F_{Ay}	A 支座沿 y 方向的反力	M_s	弹性极限弯矩
F_{AH}	A 支座沿水平方向的反力	P	广义力, 广义荷载
F_{AV}	A 支座沿竖直方向的反力	$\bar{\mathbf{P}}^e$	局部坐标系下单元等效结点荷载矢量
F_N	轴力, 悬索张力	$\mathbf{P}^e$	整体坐标系下单元等效结点荷载矢量
F_p	荷载, 作用力	$\mathbf{P}$	结构的等效结点荷载矢量
$\mathbf{F}_p$	结构荷载矢量	q	均布荷载集度
F_c	欧拉临界荷载	r	半径, 反力影响系数, 单位位移引起的 广义反力
F_{cr}	临界荷载	R	半径, 广义反力
F_{pu}	极限荷载	S	转动刚度, 截面静矩, 影响线量值
F_p^+	可破坏荷载	t	温度, 时间
F_p^-	可接受荷载	T	周期、动能
F_e	弹性力	$\mathbf{T}$	坐标转换矩阵
F_i	惯性力	U	弯曲应变能
F_R	阻尼力, 广义反力	u	水平位移
F_Q	剪力	v	竖向位移, 挠度, 速度
F_Q^F	固端剪力	V_x	外力势能
F_v	悬索张力竖直分量	V_e	应变能
$\bar{\mathbf{F}}^e$	局部坐标系下单元杆端力矢量	W	功, 体系的外力虚功, 抗弯模量, 计算 自由度, 弯曲截面系数, 重量
$\mathbf{F}^e$	整体坐标系下单元杆端力矢量	W_i	体系的内虚功
$\bar{\mathbf{F}}_p^e$	局部坐标系下单元固端约束力矢量	$\mathbf{X}$	广义未知力, 广义多余未知力
$\mathbf{F}_p^e$	整体坐标系下单元固端约束力矢量	$\mathbf{Y}$	位移幅值矢量, 主振型矢量, 主振型矩 阵
G	切变模量	y	位移
h	杆件截面高度		
i	线刚度		

Z	影响线量值, 广义未知位移	σ_b	强度极限
α	线膨胀系数, 初相角	σ_s	屈服应力
δ	柔度系数, 位移影响系数, 单位荷载引起的广义位移	σ_u	极限应力
β	动力系数, 杆件的旋转角	ϕ	振型矩阵
γ	切应变	ω	圆频率
γ_0	平均切应变	κ	曲率
ε	线应变	Δ	广义位移
ζ	阻尼比	$\overline{\Delta^e}$	结构结点位移矢量
θ	角位移, 干扰力频率	Δ^e	局部坐标系下单元杆端位移矢量
μ	力矩分配系数, 截面剪力分布不均匀系数	λ^e	整体坐标系下单元杆端位移矢量
		φ	单元定位矢量
ν	剪力分配系数		截面转角

目 录

前言

主要符号表

第 11 章 矩阵位移法	1
11.1 概述	1
11.2 基本概念	2
11.3 单元的刚度方程与刚度矩阵	8
11.4 连续梁的整体刚度方程与整体刚度 矩阵	16
11.5 刚架的整体刚度方程与整体刚度矩阵	21
11.6 等效结点荷载	26
11.7 杆端内力与内力图	30
11.8 算例	32
11.9 支座移动作用下的计算	42
11.10 平面杆件结构的计算程序与算例	45
习题	62
第 12 章 结构的极限荷载	66
12.1 概述	66
12.2 极限弯矩和塑性铰	67
12.3 静定梁的极限荷载	69
12.4 单跨超静定梁的极限荷载	71
12.5 连续梁的极限荷载	73
12.6 比例加载时判定极限荷载的一般 定理	75
12.7 刚架的极限荷载	79
12.8 增量变刚度法确定梁和刚架极限 荷载	83
习题	92
第 13 章 结构的稳定计算	94
13.1 结构稳定问题概述	94
13.2 结构稳定分析的静力法	97
13.3 结构稳定分析的能量法	104
13.4 平面刚架的稳定分析	110
13.5 剪力对临界荷载的影响	116

习题	118
第 14 章 结构的动力计算	121
14.1 概述	121
14.2 单自由度体系的自由振动	125
14.3 单自由度体系的强迫振动	133
14.4 多自由度体系的自由振动	145
14.5 主振型的正交性	156
14.6 多自由度体系在简谐荷载作用下的强迫振动	159
14.7 多自由度体系在一般动力荷载作用下的强迫振动	164
14.8 无限自由度体系的自由振动	167
14.9 近似法计算自振频率	169
习题	175
习题参考答案	180
参考文献	184

第 11 章 矩阵位移法

11.1 概述

11.1.1 结构矩阵分析方法与分类

第 7 章和第 8 章分别介绍了力法和位移法，它们都是传统的结构力学分析方法，计算手段都是采用手算，计算过程涉及关于未知量的求解线性代数方程组的问题，当未知量数目较多时，手算相当繁琐，因而传统的力法和位移法只适宜分析未知量较少的简单结构。随着现代工程结构向大型化、复杂化方向发展，传统的结构力学分析方法与手段难以胜任大型复杂结构的分析任务。20 世纪 60 年代，计算机技术的迅猛发展以及在结构计算领域的普及应用，使得结构力学分析方法与计算手段发生深刻的变革，人们提出了结构矩阵分析方法，其特点是以传统的结构力学理论为基础，以矩阵作为数学表达形式，以计算机电算作为计算手段。结构矩阵分析方法具有运算速度快、计算精度高的优点，适宜计算大型复杂的结构。

与传统的力法和位移法相对应，结构矩阵分析方法分为矩阵力法和矩阵位移法。前者以多余未知力作为基本未知量，后者以结点的未知位移作为基本未知量。力法分析超静定结构，可以取不同的多余约束力作为基本未知量，相应地存在不同形式的基本体系，这就使得分析过程与基本体系的选取关联在一起，矩阵力法的分析过程难以规格化；而位移法分析超静定结构，基本未知量以及对应的基本体系是唯一的，这就使得矩阵位移法的分析过程规格化。矩阵位移法由于具有易于实现计算过程程序化、程序简单且通用性强的优点，在结构分析中得到广泛的应用。矩阵位移法是有限元法的雏形，因此也称为杆件结构的有限元法。本章只讨论矩阵位移法。

11.1.2 矩阵位移法的特点

矩阵位移法以所有结点（包括内部结点和外部支座处结点）的未知位移作为基本未知量，结构分析中同时考虑弯曲变形和轴向变形的影响。传统的位移法由于采用手算的手段，为减少未知量的数目，在分析梁和刚架结构时只考虑弯曲变形的影响，且只把内部结点的未知位移作为基本未知量。矩阵位移法的计算精度高于传统的位移法。

11.1.3 矩阵位移法的分析思路

矩阵位移法的分析思路是：第一步，先把结构整体拆成若干个单元，一般把每一根等截面直杆看做一个单元，这个过程称为离散化；第二步，将单元按一定的条件集成整体。通过先拆后搭的过程，把复杂结构的计算问题转化为简单单元的分析 and 集合问题。第一步进行单元分析，建立单元的刚度方程，形成单元的刚度矩阵；第二步进行整体分析，建立结构的

整体刚度方程, 形成结构的整体刚度矩阵, 进一步建立结构的矩阵位移法基本方程, 从而求出解答。

矩阵位移法的第一步离散化, 相当于传统位移法中的建立基本体系, 单元分析建立的整体刚度方程相当于传统位移法中的转角位移方程; 第二步整体分析建立矩阵位移法基本方程相当于传统位移法中建立位移法的基本方程。

11.1.4 先处理法和后处理法

矩阵位移法进行结构整体分析时, 需要考虑支承边界条件, 这一条件可以在形成结构整体刚度方程之前或之后处理, 因而有先处理法和后处理法两种处理方法。

采用先处理法时, 一开始就考虑结构的支承条件, 已知的支座位移不作为基本未知量。这样, 结构的整体刚度矩阵阶数小, 占用计算机的内存少, 计算速度快。先处理法可以方便地处理各种不同性质的支座、内部有铰结点的结构以及结构分析中忽略轴向变形的结构。

采用后处理法时, 一开始不考虑结构的支承条件, 将已知的支座位移纳入结点位移矢量中, 形成不受约束的原始的整体刚度矩阵, 最后再根据支承条件修改原始的整体刚度矩阵, 以求解结点位移。采用后处理法, 将增加基本未知量的数目, 使得结构的整体刚度矩阵阶数大, 占用计算机的内存多, 计算速度相对变慢。后处理法一般用于分析内部刚结点多而支座约束少、考虑轴向变形的结构。

本章在结构整体分析中采用先处理法。

11.2 基本概念

11.2.1 局部坐标系与整体坐标系

图 11-1a 所示为某平面杆件结构中离散出的任一等截面直杆单元 e , 设杆长为 l , 横截面积为 A , 截面惯性矩为 I , 材料的弹性模量为 E 。将该单元的其中一端点定义为始端, 另一端点定义为终端。始端用编码 1 表示, 终端用编码 2 表示。以始端 1 为原点, 建立该单元的局部坐标系 $\bar{x}-\bar{y}$, 由始端 1 到终端 2 的方向规定为 $\bar{x}$ 轴的正方向, 由 $\bar{x}$ 轴的正方向逆时针转 90° 规定为 $\bar{y}$ 轴的正方向。可见, 单元的 $\bar{x}$ 轴与杆轴线重合。以后在结构整体分析中, 在单元杆轴线上画一箭头表示 $\bar{x}$ 轴, 单元局部坐标系 $\bar{x}-\bar{y}$ 不再单独画出。

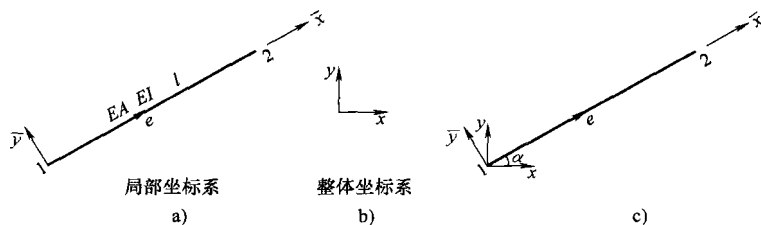


图 11-1

由于单元局部坐标系 $\bar{x}-\bar{y}$ 与单元在结构中的方位有关, 在一个复杂的结构中各杆件的方位不尽相同, 各自的局部坐标系也就不尽相同。为了便于结构的整体分析, 需要选取一个

统一的公共坐标系,称为整体坐标系,用 $x-y$ 表示。整体坐标系 x 轴的正方向水平向右,由 x 轴的正方向逆时针转 90° 为 y 轴的正方向,如图11-1b所示。单元的局部坐标系与整体坐标系存在夹角 α ,如图11-1c所示,规定:由 x 轴到 $\bar{x}$ 轴的夹角 α 以逆时针转向为正。

11.2.2 单元杆端位移矢量与单元杆端力矢量

图11-2所示单元 e ,设杆件除弯曲变形外,还有轴向变形,称为一般单元。一般单元的始端和终端各有三个位移分量(两个线位移、一个角位移)。相应地,始端和终端各有三个杆端力分量(两个杆端力、一个杆端力矩)。单元在局部坐标系下的杆端位移与杆端力如图11-2a所示;单元在整体坐标系下的杆端位移与杆端力如图11-2b所示。

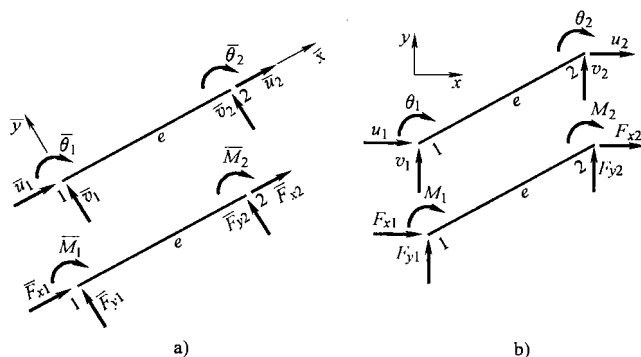


图 11-2

对杆端位移与杆端力的正负号规定如下(以始端为例): $\bar{u}_1$ 、 u_1 、 $\bar{v}_1$ 、 v_1 、 $\bar{F}_{x1}$ 、 F_{x1} 、 $\bar{F}_{y1}$ 、 F_{y1} 与相应的坐标轴正方向一致为正,相反为负。 $\bar{\theta}_1$ 、 θ_1 、 $\bar{M}_1$ 、 M_1 以顺时针方向为正,逆时针方向为负。对终端杆端位移与杆端力的正负号规定与始端相同。图11-2所示的位移、力分量为正方向。以后分析中,位移统一用 Δ 表示,杆端力统一用 F 表示。

将单元在局部坐标系下的六个杆端位移分量与六个杆端力分量按一定顺序排列,形成单元在局部坐标系下的杆端位移矢量 $\bar{\Delta}^e$ 与杆端力矢量 $\bar{F}^e$ 。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Delta}^e &= (\bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{\theta}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{\theta}_2)^{eT} = (\bar{\Delta}_{(1)} \quad \bar{\Delta}_{(2)} \quad \bar{\Delta}_{(3)} \quad \bar{\Delta}_{(4)} \quad \bar{\Delta}_{(5)} \quad \bar{\Delta}_{(6)})^{eT} \\ \bar{F}^e &= (\bar{F}_{x1} \quad \bar{F}_{y1} \quad \bar{M}_1 \quad \bar{F}_{x2} \quad \bar{F}_{y2} \quad \bar{M}_2)^{eT} = (\bar{F}_{(1)} \quad \bar{F}_{(2)} \quad \bar{F}_{(3)} \quad \bar{F}_{(4)} \quad \bar{F}_{(5)} \quad \bar{F}_{(6)})^{eT} \end{aligned} \right\} \quad (11-1)$$

式(11-1)中,编码(1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(6)称为单元在局部坐标系下杆端位移与杆端力分量的局部码。

将单元在整体坐标系下的六个杆端位移分量与六个杆端力分量按一定顺序排列,形成单元在整体坐标系下的杆端位移矢量 Δ^e 与杆端力矢量 F^e 。

$$\left. \begin{aligned} \Delta^e &= (u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2)^{eT} = (\Delta_{(1)} \quad \Delta_{(2)} \quad \Delta_{(3)} \quad \Delta_{(4)} \quad \Delta_{(5)} \quad \Delta_{(6)})^{eT} \\ F^e &= (F_{x1} \quad F_{y1} \quad M_1 \quad F_{x2} \quad F_{y2} \quad M_2)^{eT} = (F_{(1)} \quad F_{(2)} \quad F_{(3)} \quad F_{(4)} \quad F_{(5)} \quad F_{(6)})^{eT} \end{aligned} \right\} \quad (11-2)$$

式(11-2)中,编码(1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(6)称为单元在整体坐标系下杆端位移与杆端力分量的局部码。

11.2.3 单元的坐标转换矩阵

分析单元杆端力在两种坐标系中的关系, 若已知 $\bar{\mathbf{F}}^e$, 求 $\mathbf{F}^e$ 。如图 11-3 所示, 设两种坐标系之间的夹角为 α 。则有

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_{x1} &= F_{x1} \cos \alpha + F_{y1} \sin \alpha \\ \bar{F}_{y1} &= -F_{x1} \sin \alpha + F_{y1} \cos \alpha \\ \bar{M}_1 &= M_1 \\ \bar{F}_{x2} &= F_{x2} \cos \alpha + F_{y2} \sin \alpha \\ \bar{F}_{y2} &= -F_{x2} \sin \alpha + F_{y2} \cos \alpha \\ \bar{M}_2 &= M_2 \end{aligned} \right\} \quad (11-3)$$

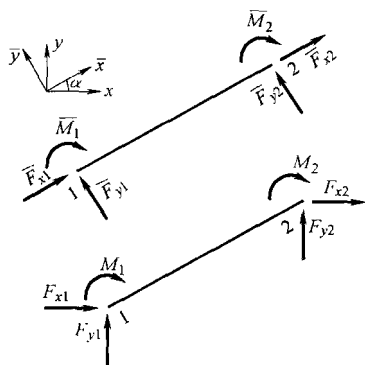


图 11-3

将式 (11-3) 写成矩阵形式, 则为

$$\begin{pmatrix} \bar{F}_{x1} \\ \bar{F}_{y1} \\ \bar{M}_1 \\ \bar{F}_{x2} \\ \bar{F}_{y2} \\ \bar{M}_2 \end{pmatrix}^e = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{pmatrix}^e \quad (11-4)$$

将式 (11-4) 记作

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \mathbf{T} \mathbf{F}^e \quad (11-5)$$

式 (11-5) 中, $\mathbf{T}$ 称为单元的坐标转换矩阵。

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^e \quad (11-6)$$

可以证明, 单元的坐标转换矩阵 $\mathbf{T}$ 是正交矩阵。其逆矩阵等于它的转置矩阵, 即

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T \quad (11-7)$$

由式 (11-5)、式 (11-7) 可知, 若已知 $\bar{\mathbf{F}}^e$, 可求得 $\mathbf{F}^e$ 为

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{T}^{-1} \bar{\mathbf{F}}^e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{F}}^e \quad (11-8)$$

同理, 可得单元杆端位移在两种坐标系中的转换关系为

$$\bar{\Delta}^e = \mathbf{T} \Delta^e \quad (11-9)$$

$$\Delta^e = \mathbf{T}^T \bar{\Delta}^e \quad (11-10)$$

11.2.4 单元的刚度方程

由单元在局部坐标系下的杆端位移 $\bar{\Delta}^e$ 计算杆端力 $\bar{\mathbf{F}}^e$, 对应的方程称为局部坐标系下的

单元刚度方程。这里，暂且将该方程记作 $\bar{\mathbf{F}}^e = \bar{\mathbf{k}}^e \bar{\Delta}^e$ ， $\bar{\mathbf{k}}^e$ 称为单元在局部坐标系下的刚度矩阵。

由单元在整体坐标系下的杆端位移 Δ^e 计算杆端力 $\mathbf{F}^e$ ，对应的方程称为整体坐标系下的单元刚度方程。这里，暂且将该方程记作 $\mathbf{F}^e = \mathbf{k}^e \Delta^e$ ， $\mathbf{k}^e$ 称为单元在整体坐标系下的刚度矩阵。

11.2.5 结构的结点位移矢量与结点力矢量

结构整体分析，需要在整体坐标系下进行。图 11-4 所示结构，设同时考虑弯曲变形和轴向变形。对结构的单元与结点进行编号，如图 11-4a 所示；将结点的所有未知位移在整体坐标系中按顺序统一排序（或称编码），如图 11-4b 所示。这里，结点未知位移为：2 结点的水平位移 Δ_1 、竖向位移 Δ_2 、角位移 Δ_3 、3 结点的角位移 Δ_4 。

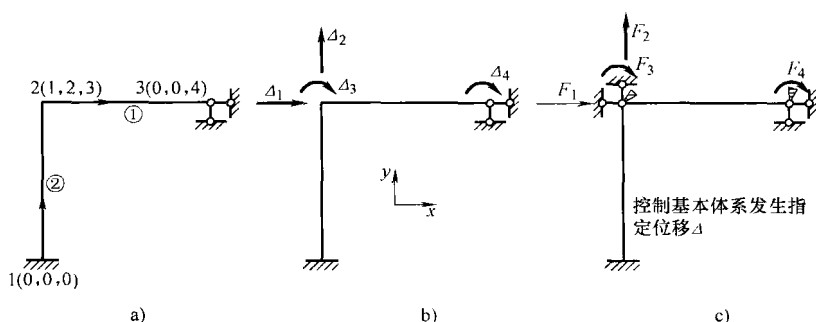


图 11-4

将结构在整体坐标系下的结点未知位移分量按一定顺序排列，形成结构的结点位移矢量 Δ ，即

$$\Delta = (\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3 \quad \Delta_4)^T \quad (11-11)$$

沿结点未知位移方向施加约束，形成结构在整体坐标系下带附加约束的基本体系，控制基本体系发生任意指定的结点位移 Δ ，在附加约束上产生相应的附加约束力，如图 11-4c 所示。

将结构在整体坐标系下的附加约束力分量按一定顺序排列，形成结构的结点力矢量 $\mathbf{F}$ ，即

$$\mathbf{F} = (F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4)^T \quad (11-12)$$

式 (11-11)、式 (11-12) 中，编码 1、2、3、4 称为整体坐标系下结点位移与结点力分量的总码。在单元分析中，对单元始端和终端的杆端位移与杆端力分量各自编码，称为局部码；在整体分析中，对结点位移和相应的结点力统一进行编码，称为总码。局部码加括号，与总码相区别。

结点位移的编码，按照 x 方向、 y 方向、转动方向的顺序统一编写总码，由总码表征结点位移分量。在先处理法中，凡是位移分量已知为零的，其总码编为 0。图 11-4a 中，结点括号里的三个数字分别代表该结点的位移总码。

由单元始端和终端的位移总码按顺序排列，形成单元定位矢量 λ^e 。图 11-4a 中，单元 ①、② 的定位矢量分别为

$$\lambda^{\textcircled{1}} = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 4)^T, \lambda^{\textcircled{2}} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3)^T \quad (11-13)$$

单元定位矢量中的元素描述了单元整体坐标系下的始端和终端的位移分量两种编码之间的对应关系。某个位移分量在单元分析中用局部码表示，在整体分析中用总码表示，由于是同一个位移，因此，两种编码间存在对应关系。图 11-5b 所示为单元①、②在整体坐标系下杆端位移分量的局部码，与位移总码的对应关系为

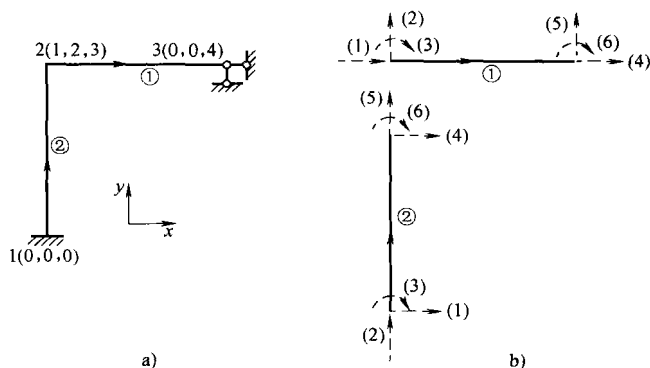


图 11-5

$$\begin{array}{l} \text{单元①} \left(\begin{array}{l} 1 \rightarrow (1) \\ 2 \rightarrow (2) \\ 3 \rightarrow (3) \\ 0 \rightarrow (4) \\ 0 \rightarrow (5) \\ 4 \rightarrow (6) \end{array} \right) \quad \text{单元②} \left(\begin{array}{l} 0 \rightarrow (1) \\ 0 \rightarrow (2) \\ 0 \rightarrow (3) \\ 1 \rightarrow (4) \\ 2 \rightarrow (5) \\ 3 \rightarrow (6) \end{array} \right) \end{array}$$

11.2.6 结构的整体刚度方程

由结构在整体坐标系下的结点位移 Δ 计算结点力 F ，对应的方程称为结构在整体坐标系下的刚度方程。这里，暂且将该方程记作 $F = K\Delta$ ， K 称为结构在整体坐标系下的刚度矩阵。

刚度方程 $F = K\Delta$ 中， Δ 为任意指定的结点位移，与作用在结构中的实际荷载没有直接关系，因此，结构的整体刚度方程不能用于求解实际荷载产生的结构结点位移，它仅仅反映结构的刚度性质。计算实际荷载产生的结构结点位移，要建立矩阵位移法的基本方程。

11.2.7 矩阵位移法的基本方程

矩阵位移法以传统的位移法作为理论基础，它们利用基本体系求解的思路是相同的。例如，采用矩阵位移法分析图 11-6a 所示的刚架结构，同时考虑弯曲变形和轴向变形的影响。基本未知量分别为 C 结点的水平位移 Δ_1 、竖向位移 Δ_2 、角位移 Δ_3 、 B 结点的角位移 Δ_4 。采用位移法基本体系的分析过程如图 11-6b、c、d、e、f 所示。图 11-6b 代表基本体系的锁住状态，图 11-6c、d、e、f 代表基本体系的放松约束状态。

基本体系转化为原结构的条件是：基本体系在给定荷载以及结点位移共同作用下，在附加约束中产生的约束力应等于零。据此建立矩阵位移法的基本方程为

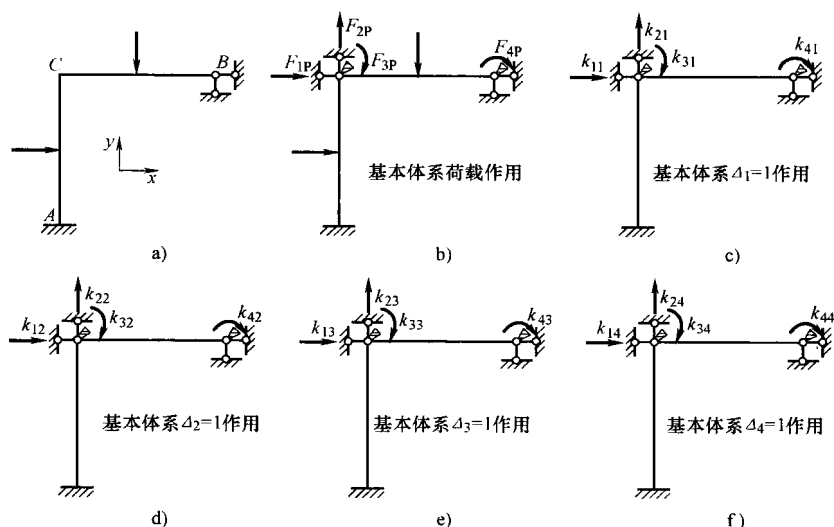


图 11-6

$$\left. \begin{aligned} K_{11}\Delta_1 + K_{12}\Delta_2 + K_{13}\Delta_3 + K_{14}\Delta_4 + F_{1P} &= 0 \\ K_{21}\Delta_1 + K_{22}\Delta_2 + K_{23}\Delta_3 + K_{24}\Delta_4 + F_{2P} &= 0 \\ K_{31}\Delta_1 + K_{32}\Delta_2 + K_{33}\Delta_3 + K_{34}\Delta_4 + F_{3P} &= 0 \\ K_{41}\Delta_1 + K_{42}\Delta_2 + K_{43}\Delta_3 + K_{44}\Delta_4 + F_{4P} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11-14)$$

将式 (11-14) 记作

$$\mathbf{K}\Delta = \mathbf{P} \quad (11-15)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -F_{1P} \\ -F_{2P} \\ -F_{3P} \\ -F_{4P} \end{pmatrix}$$

式 (11-15) 为矩阵位移法的基本方程。式中, Δ 为结构的结点位移矢量; $\mathbf{K}$ 为结构的整体刚度矩阵; $\mathbf{P}$ 为结构的等效结点荷载。若结构有 N 个结点未知位移, 则 $\mathbf{K}$ 为 $N \times N$ 的方阵; Δ 、 $\mathbf{P}$ 均为 $N \times 1$ 的列矢量。

将 $\mathbf{P}$ 中的元素看做结点荷载, 作用在结构上, 如图 11-7a 所示, 在基本体系中产生的附

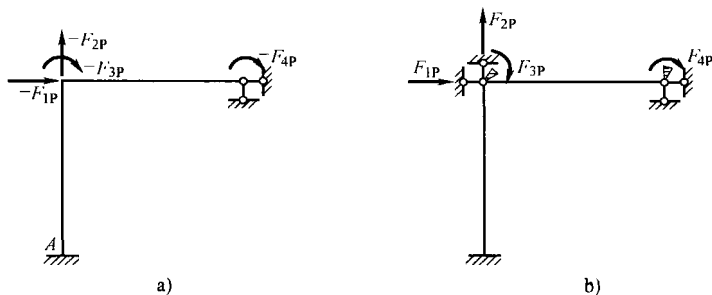


图 11-7

加约束力如图 11-7b 所示, 与图 11-6a 中的荷载在基本体系中产生的附加约束力是相同的。因此, P 称为结构中的实际荷载对应的等效结点荷载, 结构中的实际荷载可以是非结点荷载, 或是结点荷载, 或是两者的组合。

11.2.8 单元的杆端内力

由矩阵位移法的基本方程 $\mathbf{K}\Delta = \mathbf{P}$ 求出 Δ 后, 需要计算单元在局部坐标系下的杆端内力 $\bar{\mathbf{F}}^e$, 从而绘制结构的内力图, 包括 M 图、 F_Q 图、 F_N 图。

将结构在基本体系的锁住状态 (荷载单独作用, 结点位移 $\Delta = \{0\}$), 产生的单元在局部坐标系下的杆端内力记作 $\bar{\mathbf{F}}_p$; 结构在基本体系的放松约束状态 (结点位移 Δ 单独作用), 产生的单元在局部坐标系下的杆端内力为 $\bar{\mathbf{k}}^e \Delta^e$ 。单元的杆端内力等于锁住状态与放松约束状态下产生的杆端内力之和, 即

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \bar{\mathbf{k}}^e \Delta^e + \bar{\mathbf{F}}_p \quad (11-16a)$$

本章主要讨论如何建立结构的整体刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 、等效结点荷载 $\mathbf{P}$ 、解出结点位移 Δ 后如何计算杆端内力 $\bar{\mathbf{F}}^e$ 并绘制结构的内力图。为便于实现计算过程的程序化, 本章将介绍单元集成法计算结构的整体刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 以及结构的等效结点荷载 $\mathbf{P}$ 。

11.3 单元的刚度方程与刚度矩阵

第 8 章给出的转角位移方程, 实际上是梁单元的刚度方程。梁单元分析中只考虑弯曲变形, 不考虑轴向变形。以矩阵形式表示的梁单元转角位移方程中, 杆端位移矢量中缺少轴向位移, 杆端力矢量中缺少对应的轴向杆端力, 梁单元的刚度方程是一个特例。本节讨论一般单元的刚度方程。对一般单元既考虑弯曲变形, 又考虑轴向变形。

11.3.1 一般单元在局部坐标系下的刚度方程

建立单元在局部坐标系下的刚度方程, 力学模型为单元在局部坐标系下的基本体系 (沿局部坐标系下杆端位移方向施加附加约束形成)。使基本体系发生任意指定的位移 Δ^e , 根据 Δ^e 计算相应的杆端力 $\bar{\mathbf{F}}^e$, 如图 11-8 所示。

忽略轴向受力状态与弯曲受力状态之间的相互影响, 分别建立轴向变形和弯曲变形产生的杆端力。

轴向变形对应的杆端位移 $\bar{u}_1$ 、 $\bar{u}_2$, 只产生杆端力 $\bar{F}_{x1}$ 、 $\bar{F}_{x2}$

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_{x1} &= \frac{EA}{l}(\bar{u}_1 - \bar{u}_2) \\ \bar{F}_{x2} &= -\frac{EA}{l}(\bar{u}_1 - \bar{u}_2) \end{aligned} \right\} \quad (11-16b)$$

弯曲变形对应的杆端位移 $\bar{v}_1$ 、 $\bar{v}_2$ 、 $\bar{\theta}_1$ 、 $\bar{\theta}_2$, 只产生杆端力 $\bar{F}_{y1}$ 、 $\bar{F}_{y2}$ 、 $\bar{M}_1$ 、 $\bar{M}_2$

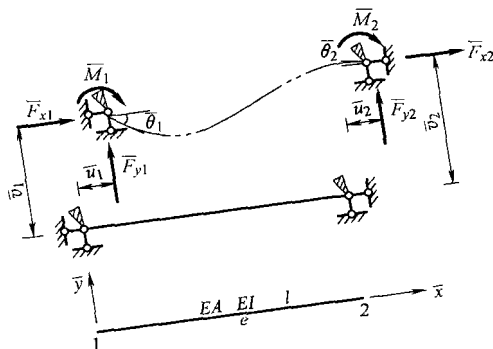


图 11-8

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_1 &= \frac{4EI}{l} \bar{\theta}_1 + \frac{2EI}{l} \bar{\theta}_2 - \frac{6EI}{l^2} (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) \\ \bar{M}_2 &= \frac{2EI}{l} \bar{\theta}_1 + \frac{4EI}{l} \bar{\theta}_2 - \frac{6EI}{l^2} (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) \\ \bar{F}_{y1} &= -\frac{6EI}{l^2} (\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2) + \frac{12EI}{l^3} (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) \\ \bar{F}_{y2} &= \frac{6EI}{l^2} (\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2) - \frac{12EI}{l^3} (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) \end{aligned} \right\} \quad (11-17)$$

将式 (11-16)、式 (11-17) 写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \bar{F}_{x1} \\ \bar{F}_{y1} \\ \bar{M}_1 \\ \bar{F}_{x2} \\ \bar{F}_{y2} \\ \bar{M}_2 \end{pmatrix}^e = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{pmatrix}^e \quad (11-18)$$

将式 (11-18) 记作

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \bar{\mathbf{k}}^e \bar{\Delta}^e \quad (11-19)$$

式 (11-19) 为一般单元在局部坐标系下的刚度方程。 $\bar{\mathbf{k}}^e$ 为一般单元在局部坐标系下的刚度矩阵, 是 6×6 的方阵。

$$\bar{\mathbf{k}}^e = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ \bar{u}_1 = 1 & \bar{v}_1 = 1 & \bar{\theta}_1 = 1 & \bar{u}_2 = 1 & \bar{v}_2 = 1 & \bar{\theta}_2 = 1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} & \begin{matrix} (1) \bar{F}_{x1} \\ (2) \bar{F}_{y1} \\ (3) \bar{M}_1 \\ (4) \bar{F}_{x2} \\ (5) \bar{F}_{y2} \\ (6) \bar{M}_2 \end{matrix} \end{matrix} \quad (11-20)$$

一般单元在局部坐标系下的刚度矩阵 $\bar{\mathbf{k}}^e$ 具有以下性质:

(1) 单元刚度系数的力学含义