多元有理函数系统与电网络

鲁凯生　著

科学出版社
www.sciencep.com

多元有理函数系统与电网络

鲁凯生　著

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

鉴于实数域上线性系统和电网络描述不便于研究系统和电网络的结构性质的问题，本书提出用多元有理函数域 $F(z)$ 上的矩阵描述线性系统和电网络的系数矩阵，将系统和电网络描述基于多元有理函数域 $F(z)$ 上，研究系统和电网络的结构性质。本书分为 5 章。第 1 章介绍了研究多元有理函数(域 $F(z)$ 上)系统和电网络的背景和意义。第 2 章将数域上的矩阵理论推广到多元有理函数域上；详细讨论了一类 $F(z)$ 上矩阵及其特征多项式的可约性条件；定义了 1-型矩阵和两个基本性质，并证明 1-型矩阵具有这两个基本性质；介绍了独立参量的变量代换的条件等。第 3 章讨论了多元有理函数域 $F(z)$ 上线性系统的结构能控能观性问题；介绍了一批时域和频域里获得的新的结论。第 4 章讨论了 $F(z)$ 上电网络的结构性质：$F(z)$ 上 RLC 网络的可断性、可约性、能控能观性和 $F(z)$ 上能控能观的结构条件；$F(z)$ 上 RLCM 网络的可断性、可约性及能控能观性；$F(z)$ 上有源网络状态方程的存在性条件和 $F(z)$ 上能控能观的条件等。第 5 章是进一步思考。

本书可供电子、电气、自动化和应用数学(矩阵理论)等专业的硕士研究生、博士研究生、教师、研究人员和工程师参考。

图书在版编目(CIP)数据

多元有理函数系统与电网络/鲁凯生著．—北京：科学出版社，2010
ISBN 978-7-03-027930-9

Ⅰ．多…　Ⅱ．鲁…　Ⅲ．有理函数-应用-电路-理论-研究　Ⅳ．①O171 ②TM13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 110197 号

责任编辑：汤　枫　王志欣／责任校对：李奕萱
责任印制：赵　博／封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2010 年 6 月第 一 版　开本：B5（720×1000）
2010 年 6 月第一次印刷　印张：16
印数：1—2 500　字数：309 000

定价：58.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

多年来，作者给博士生讲授的课程“多元有理函数系统和电网络”一直用的是由研究论文组成的手稿(因为国内外还没有名为《多元有理函数系统和电网络》的书籍)，不便于系统教学。为了研究生教学和介绍推广该研究领域的需要，将手稿整理成图书出版是必要的。

由于本书研究的是多元有理函数系统和电网络，故获得的结论常常简洁直观，便于系统和电网络的分析和设计。例如有这样一个结论：一个无激励的(这里，激励即是独立电源)$F(z)$上电阻电感电容 RLC 网络(指所有电阻电容电感都视为独立参量的 RLC 网络)若无全电容割集、无全电感回路，且不可断(这都是结构条件)，那么该网络的特征多项式是 $F(z)$上的不可约多项式(不用导出特征多项式，只需观察电路的结构)。特征多项式的可约性与能控能观性和稳定性有密切的关系。显然按此结论分析和设计一个特征多项式不可约的 RLC 网络是件很直观容易的事情。$F(z)$上系统和电网络描述是研究系统和电网络结构性质的有用工具。而且，由于实数域是多元有理函数域 $F(z)$的子域，所以 $F(z)$上成立的结论比实数域上相应的结论更有普遍意义。因此，出版《多元有理函数系统和电网络》一书也是值得的。

本书是作者近二十年来，经 4 个国家自然科学基金项目(题目分别是：对域 $F(z)$上的电网络理论及计算机辅助分析的研究、用 $F(z)$上矩阵研究电网络的结构性质、多元有理函数系统结构能控能观性研究、$F(z)$上有源网络可断性可约性能控能观性及稳定性研究)和 2 个省部级自然科学基金项目研究而获得的成果的总结，是处于学术前沿的。

本书对系统、电网络和矩阵的描述方法与同类书籍是不同的。同类书籍介绍的是数域上线性系统、电网络和矩阵，而本书介绍的是多元有理函数域 $F(z)$上的系统、电网络和矩阵。本书涉及三个学科，$F(z)$上的系统、电网络和矩阵，是交叉研究的结果，因此三个学科的相关内容联系十分紧密。例如第 2 章介绍的一类有理函数矩阵的可约性条件就是第 3 章和第 4 章的重要基础。而同类书籍是用三类书分别介绍数域上系统、电网络和矩阵，故各书的内容具有较强的独立性。

本书介绍的研究成果是在上面提到的国家自然科学基金项目(批准号：69472008，50977069，60574012，50177024)资助下取得的，在此深表感谢。

我的学生封小钰、高国章、张科、王宗涛、刘官敏、马强、徐沪萍等参加了国家自然科学基金项目的研究；马强和袁裕鹏，特别是马强在编辑本书电子文档方面做了

大量繁琐工作；对此深表谢意。感谢武汉理工大学对本书出版给予的资助。

谨以本书献给我的母亲刘功高。她 1938 年考入清华大学，西南联大（抗战期间由北京大学、清华大学和南开大学组成）毕业后成为清华文科研究所闻一多先生的助教。但好运不长，31 岁时丈夫因车祸去世。后虽有联大同学追求她，但为了我们能扬眉吐气地生活，她宁愿守寡，牺牲自己一生的幸福，一人挑起全家重担，含辛茹苦地抚养我们成人。没有她的抚育和教诲，没有她的鼓励相伴随，我是不可能在身体欠佳的情况下坚持完成此书的。

由于准备仓促，身体欠佳，书中不妥之处在所难免，衷心希望读者批评指正。

作　者

2010 年 5 月

目　　录

第 1 章　绪　　论

如果一个矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times m}$ 的每一元素 a_{ij} 都是实数，那么该矩阵被称为实数域上的矩阵或实数矩阵。如果一个系统 $\dot{X}=AX+BU, Y=CX+DU$ 的系数矩阵 A、B、C 和 D 都是实数矩阵，那么该系统被称为实数域上的线性系统(包括电网络或实数系统)。

目前对实数域上线性系统理论和电网络理论的研究已经很成熟，并已成功应用于系统和电网络分析和设计的许多方面[Chen，1984；郑大钟，2002；陈惠开等，1992；陈大培，1987]。然而人们发现实数域上的矩阵不便于分析物理系统的结构性质(例如，结构能控能观性)。以图 1.1 所示液位控制系统为例：

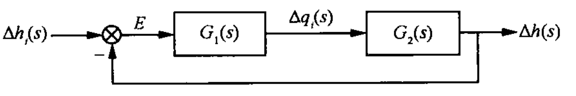
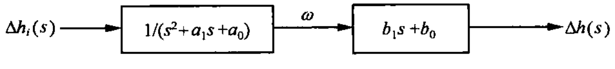


图 1.1　液位控制系统

其中 $G_1(s)=\dfrac{\Delta q_i(s)}{E(s)}=K_p\left(1+\dfrac{1}{T_is}\right)$；$G_2(s)=\dfrac{\Delta h(s)}{\Delta q_i(s)}=\dfrac{K}{Ts+1}$。系统的闭环传递函数是 $\dfrac{\Delta h(s)}{\Delta h_i(s)}=\dfrac{b_1s+b_0}{s^2+a_1s+a_0}$，它的方框图可表示为



其中 $a_0=\dfrac{KK_p}{T_iT}$；$a_1=\dfrac{KK_p+1}{T}$；$b_0=\dfrac{KK_p}{T_iT}$；$b_1=\dfrac{KK_p}{T}$。

那么反馈系统的状态方程为：$\dot{X}=AX+B\Delta h_i$，$\Delta h=CX$，其中 $X=(\omega,\dot{\omega})^{\mathrm{T}}$，$\omega$ 为左边方框的输出信号，$\dot{\omega}$ 为 ω 的导数，$(\omega,\dot{\omega})^{\mathrm{T}}$ 为 $(\omega,\dot{\omega})$ 的转置；且

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{KK_p}{TT_i} & -\dfrac{1+KK_p}{T}\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}\dfrac{KK_p}{TT_i} & \dfrac{KK_p}{T}\end{bmatrix}\tag{1.1}$$

对于这一给定结构的系统，只有当它所有的物理参量 K_p、T_i、K 和 T 取值时，A、B 和 C 才都是实数域上的矩阵，系统才是实数系统。所以实数系统的分析结果(如(A,B)的能控性、$(A^{\mathrm{T}},C^{\mathrm{T}})$ 的能观性、特征多项式 $\det(\lambda I-A)$的可约性等)取决于两方面：系统的(物理)结构和物理参量的值，而系统结构单独的作用是什么却

难以区分。

为了探索系统结构的作用，出现了以下几种结构矩阵：

文献[Lin，1974]提出了一种结构化矩阵（structured matrix，SM），它的元素要么是固定不变的零，要么是相互独立的非零，即非零元素是相互独立的参量。例如

$$A=\begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ z_2 & z_3 \end{bmatrix}$$

其三个非零元素 z_1、z_2、z_3 是相互独立的参量。文献[Shields 等，1976；Glover 等，1976；Davison，1977；Hosoe 等，1979；Mayeda，1981；李慷等，1996]用 SM 描述研究了多输入多输出系统的结构能控性。

文献[Corpmat 等，1976；Anderson 等，1982；Willems，1986]引入了元素是独立参量的一次多项式的矩阵。例如

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+z_1\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+z_2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z_1+z_2+1 & z_1+1 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix}$$

是独立参量 z_1、z_2 的一次多项式的矩阵。

文献[Yamada 等，1985]提出了一种列结构矩阵（column-structured matrix，CSM），这种矩阵的每一列元素中含有一相同参量因子，而不同列中的参量因子是相互不同的。例如

$$A=\begin{bmatrix} 3z_1 & z_2 \\ 2z_1 & 4z_2 \end{bmatrix}$$

其 z_1 和 z_2 分别是第一列和第二列的参量因子，且 z_1 和 z_2 是相互独立的。

文献[Murota，1987，1989a，1989b，1993，1998]定义并研究了混合矩阵（mixed matrix）$M=Q+T$，其中 T 的非零元素在 Q 的元素所属的域 K 上是代数独立的，例如

$$A=Q+T=\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 3 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix}$$

其中 Q 是实数域上的矩阵，T 的非零元素 z_1 和 z_2 是实数域上代数独立的（即实数域中无这两元素）。A 称为关于实数域的混合矩阵，这里 K 表示实数域。

显然，满秩正方 SM、CSM、一次多项式阵和混合矩阵的逆矩阵一般不是 SM、CSM、一次多项式阵和混合矩阵。为了解决这一问题，文献[Lu 等，1991，1994]提出用多元有理函数矩阵（rational function matrix in multi-parameters，RFM）描述系统和电网络的系数矩阵，把系统和电网络的描述基于多元有理函数域上，来研究它们的结构性质。

设 $z_1,\cdots,z_q$ 表示 q 个独立参量（或称变量、未定元）而不是参数（常数、数值）。令 $z=(z_1,\cdots,z_q)$，$\mathscr{R}^q$是 z 的定义域，也可称为参量空间。令 $F(z)$表示一切具有

实系数的 q 个参量 $z_1,\cdots,z_q$ 的有理函数构成的域，$F(z)[\lambda]$表示以 $F(z)$中的元(member)为系数的 λ 的多项式环。例如

$$\frac{\sqrt{5}z_1+2z_2+3}{4z_1+z_3}\in F(z)$$

这里$\sqrt{5}$、2、3、4 和 1 是实系数；因为 z 的多项式环是 $F(z)$的子集，所以 $\sqrt{5}z_1+2z_2+3\in F(z)$；因为实数域是 $F(z)$的子域，所以每个实数都是 $F(z)$中的元；$(5z_1+z_2^3)\lambda^2+\sqrt{6}z_6\lambda+\dfrac{8z_3^2+1}{3z_4z_5+z_2z_6+\sqrt{2}}\in F(z)[\lambda]$。

定义 1.1 若矩阵 M 的每一元素都是 $F(z)$ 中的元(即是变量 $z_1,\cdots,z_q$ 的有理函数)，则称 M 是 z 的有理函数矩阵 RFM 或域 $F(z)$ 上的矩阵；若系统(包括电网络)的系数矩阵都考虑成 RFM，则称该系统为 z 的多元有理函数系统，简称有理函数系统(rational function system，RFS)，或称为域 $F(z)$上系统。

显然，满秩正方 RFM 的逆矩阵还是 RFM。

文献[Lin，1974；Shields 等，1976；Glover 等，1976；Davison，1977；Hosoe 等，1979；Mayeda，1981；李慷等，1996；Corpmat 等，1976；Anderson 等，1982；Willems，1986；Yamada 等，1985；Murota，1987，1989a 和 1989b，1993，1998]的研究有重要的数学意义，但由于这些定义的结构矩阵常常不能完全描述物理系统，所以难以直接用于研究物理系统的结构性质。以图 1.1 所示系统来说明。系统独立的参量应该是 4 个物理参量 K_p、T_i、K 和 T。那么由式(1.1)和以上定义可知：实数域上的矩阵、SM、独立参量的一次多项式矩阵、CSM 和混合矩阵都不能完全描述这三个矩阵 A、B 和 C，而这三个矩阵都是 RFM，系统(A,B,C)是 RFS，这里 $z=(K_p,T_i,K,T)$。RFM 之所以能描述物理系统的结构是因为 RFM 的概念是十分广泛的，实数域上矩阵、SM、一次多项式矩阵、CSM 和混合矩阵都可视为特殊的 RFM。所以，对 RFS 的研究是既有数学意义又有物理意义的工作。

应该强调：$F(z)$ 上成立的结论只取决于系统/电网络的结构，与参量 z 的值无关。因为对于 $F(z)$ 上的结论，参量 z 是从不取值的，这就排除了参量值的影响，而剩下的就只有结构的作用了。例如，有这样几个 $F(z)$ 上的结论：① 一个无激励的(这里，激励即是独立电源)$F(z)$ 上电阻电感电容 RLC 网络(指所有电阻电容电感都视为独立参量的 RLC 网络)，若无全电容割集、无全电感回路，且不可断*(这都是结构条件)，那么该网络的特征多项式 $\det(\lambda I-A)$ 是环 $F(z)[\lambda]$ 上的不可约多项式(不用导出特征多项式，只需观察电路的结构)[Lu 等，1998]；②一个不可断的 $F(z)$ 上无全电压源电容回路、无全电流源电感割集的含电源的 RLC 网络，若它的无

* RLC 网络的可断性定义为：一个 RLC 网络如果有至少一个子网络与其余子网络最多有一个公共节点，就称其为可断的；否则是不可断的。

激励网络(令电压源短路,电流源开路)也是不可断的,且无全电容割集、无全电感回路,那么该网络(指有激励网络)是 $F(z)$ 上能控的[Lu,2003];③一个无激励的 RLC 网络若不可断且不是全电容或全电感网络,那么以它的任何网络变量(节点电压和支路电流)为输出,网络都是 $F(z)$ 上能观的[Lu 等,2005]。

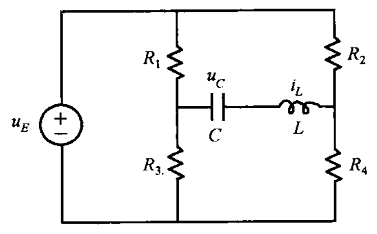


图 1.2 RLC 电网络

以图 1.2 所示网络为例,显然它的无激励网络(令电压源短路)是不可断的且无全电容割集、无全电感回路,故由①知网络的特征多项式 $\det(\lambda I-A)$ 是环 $F(z)[\lambda]$ 上不可约多项式;由图知该网络含有一个电压源,且无全电压源电容回路、无全电流源电感割集,它的无激励网络也是不可断的,且无全电容割集、无全电感回路,根据结论②知网络是 $F(z)$ 上能控的;若以无激励网络的电阻 R_1 的节点电压 u_{R_1} 为输出,由于无激励网络是不可断的且不是全电容或全电感网络,故网络是 $F(z)$ 上能观的(根据结论 ③)。这些结论的应用只需观察网络的结构。所以,$F(z)$ 上的结论只与系统的结构有关,$F(z)$ 上系统的性质或简称 $F(z)$ 上的性质(如 $F(z)$ 上能控能观性) 等价于结构性质(如结构能控能观性),$F(z)$ 上系统描述是研究系统结构性质的有用工具。

利用这一工具对多元有理函数系统的结构性质进行以下初步探讨:研究一类 RFM 方阵及其特征多项式的可约性问题; $F(z)$ 上系统的结构能控能观性问题; $F(z)$ 上电网络的可断性、可约性、能控能观性问题,获得了一些结论将在第 2～5 章中介绍。

下面与现有成熟理论进行全面比较来说明其差别。线性系统理论根据采用的数学工具和系统描述的不同,可分为四个平行的分支:状态空间法、频域方法、几何理论和代数理论[郑大钟,2002]。

状态空间法(时域方法)的基本描述是

$$x = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

其中 $x \in \mathscr{R}^n$;$u \in \mathscr{R}^m$;$y \in \mathscr{R}^p$;A、B、C 和 D 分别为 $n \times n$、$n \times m$、$p \times n$ 和 $p \times m$ 的实数域上的矩阵。这是个线性定常系统,是前面所讨论的实数系统(本书提出“实数系统”的概念是为了区别于多元有理函数系统)。本书将 A、B、C 和 D 都考虑成 $F(z)$ 上的矩阵,将系统视为多元有理函数系统 RFS,研究与系统结构有关且与参量值无关的结构性质。

频域方法是以状态空间法为基础的。实数系统的传递函数矩阵 $C(sI-A)^{-1}B+D$ 是单个复变量 s 的有理函数域 $F(s)$ 上的矩阵,这里 $F(s)$ 表示一切具有实系数的 s 的有理函数构成的域(s 的系数是实数);与此不同,多元有理函数系统的传递函数矩阵 $C(sI-A)^{-1}B+D$ 的元素虽是 s 的有理函数,但 s 的系数是 $F(z)$ 中的元,

即是 $z_1,\cdots,z_q$ 的有理函数，而不仅仅是实数（实数是特殊情况），或者说该传递函数矩阵是 $F(z;s)$ 域上的矩阵，这里 $F(z;s)$ 表示一切具有实系数的 $q+1$ 个独立变量或未定元 $z_1,\cdots,z_q,s$ 的有理函数构成的域。

线性系统的代数理论（见文献[Kalman 等，1969]第 10 章）研究了任意且固定数域 K（通常是实数域 $\mathscr{R}$）上的线性系统，这里状态向量 $x\in K^n$，输入向量 $u\in K^m$，输出向量 $y\in K^p$，且系数矩阵 F、G、H（现在习惯上常表示为 A、B、C）也都是 K 上的 $n\times n$、$n\times m$ 和 $p\times n$ 矩阵。由于 K 是数域，所以如前所述 K 上线性系统描述难以表达和研究物理系统的结构性质。

线性系统的几何方法[旺纳姆，1984]只考虑实数域 $\mathscr{R}$ 和复数域 $\mathscr{C}$ 上的线性空间，而不是 $F(z)$ 上的线性空间，因而也难描述物理系统的结构。

本书着力于应用广泛且有效的状态空间法和频域方法，尝试将线性定常系统（实数系统）理论向多元有理函数系统推广。这种尝试的意义说明如下：

如前所述，$F(z)$ 上描述是研究系统和电网络结构性质的工具，对 $F(z)$ 上系统和电网络的研究是具有数学和物理意义的工作。除此之外还有以下好处：

研究分析系统和电网络 $F(z)$ 上的性质（结构性质）比分析实数域上的性质更有实际意义。以图 1.1 所示系统的能控能观性为例。当 $K_p=2,T_i=1,K=3,T=1$ 时（或表达为：令 $z=(K_p,T_i,K,T)=\bar{z}=(2,1,3,1)$），代入式(1.1)有

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -7\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}6 & 6\end{bmatrix} \tag{1.2}$$

根据实数系统的理论，显然系统(1.2)是不能观的。但多元有理函数系统的能观性矩阵的行列式

$$\det(C^{\mathrm{T}},A^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=K_p^2K^2(T-T_i)/T_i^2T^3$$

却是 $F(z)$ 上的非零元，系统是 $F(z)$ 上能观的，即结构能观的。那么使得系统是实数域上不能观的点（例如，$\bar{z}=(2,1,3,1)$）的集合 $\{z\in\mathscr{R}^4\mid\det(C^{\mathrm{T}},A^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=0\}$ 在参量空间 $\mathscr{R}^4$ 中只是一超曲面。由于 K_p、T_i、K、T 是物理参量，要想取值绝对精确到使得 $\det(C^{\mathrm{T}},A^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=0$ 实际是不可能的。至于实数系统(1.2)是不能观的，可理解为：人为地或者说数学上对参量加上了约束 $z=\bar{z}=(2,1,3,1)$，使得 $T-T_i=0$ 即 $\det(C^{\mathrm{T}},A^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=0$ 而造成的。可见对于控制系统（物理系统）而言，如果是 $F(z)$ 上能控能观的（结构能控能观的）就意味着实际上它在实数域上总是能控能观的（或者从鲁棒的观点说是参数全局（对几乎一切 $z\in\mathscr{R}^q$）鲁棒能控能观的（将其视为结构已知、参数不确定的系统））。所以研究分析多元有理函数系统的结构能控能观性比分析实数域上的能控能观性更有实际意义。

而且，对 $F(z)$ 上系统的结构性质的研究是有理论价值的。实数域是多元有理函数域 $F(z)$ 的子域，SM、CSM、一次多项式矩阵、混合矩阵都可视为一种 $F(z)$ 上的矩阵，故 $F(z)$ 上研究获得的判据的适用范围更广泛。例如，文献[Lu，2001]有

这样一条 $F(z)$ 上的结论：设 $A = \mathrm{diag}(A_1, \cdots, A_k)$，$B = (B_1^{\mathrm{T}}, \cdots, B_k^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，其中 A_i 和 B_i 分别是 $F(z)$ 上 $n_i \times n_i$ 和 $n_i \times m$ 矩阵，$i = 1, \cdots, k$，且 $\det(\lambda I - A_i)$ 与 $\det(\lambda I - A_j)$ 互素，$i \neq j$。那么 (A, B) 是 $F(z)$ 上能控的充要条件是 (A_i, B_i) 是 $F(z)$ 上能控的。相应的实数域上的结论被包含在其中。例如，设实数域上 $n \times n$ 矩阵（特殊的 RFM）$A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$，$B = (b_1^{\mathrm{T}}, \cdots, b_n^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$。若 A 的特征值互不相等，即 $\lambda_i \neq \lambda_j$，$i \neq j, 1 \leqslant i, j \leqslant n$，这意味着 $\lambda - \lambda_i$ 与 $\lambda - \lambda_j$ 互素，那么由上面的结论有 (A, B) 是能控的充要条件是 (λ_i, b_i) 能控，即 $b_i \neq 0, i = 1, \cdots, n$。这就是我们熟悉的实数域上的判据。

由于 $F(z)$ 上成立的性质（结论）只与系统的结构有关，而相应的有非线性元件的系统可能有相同或相似的结构。例如，一结构能控的线性电网络的一个电阻换成非线性电阻，描述网络结构的关联矩阵不变，该非线性网络也是结构能控的吗？本书提出准结构能控能观的概念（见第 5 章）来分析非线性系统和电网络的能控能观性，这将加强线性与非线性系统间的联系。

本书结构安排如下：第 2 章将数域上矩阵的一些数学性质推广到 $F(z)$ 上矩阵，并且着重讨论一类 $F(z)$ 上方阵的可约性问题。第 3 章介绍 $F(z)$ 上系统结构能控能观性。第 4 章研究 $F(z)$ 上电网络的可断性、可约性、能控能观性和计算机辅助分析软件。第 5 章提出进一步思考和将 $F(z)$ 上系统结构能控能观的概念推广应用到非线性系统。本书最后是几个附录。附录 A 回顾了一些有关的知识，附录 B ～ D 是第 4 章中几个定理的证明。

第 2 章　域 $F(z)$ 上矩阵

本章安排如下：首先将数域上的矩阵理论(主要参考文献[谢邦杰，1978；Gilbert，2003])推广到多元有理函数域 $F(z)$ 上；详细讨论一类 $F(z)$ 上方阵及其特征多项式的可约性条件；定义 1-型矩阵和两个基本性质，并证明 1-型矩阵具有这两个基本性质；介绍独立参量的变量代换的条件等。

2.1　域 $F(z)$ 上或环 $F(z)[\lambda]$ 上 λ 的多项式

定义 2.1　系数是 $F(z)$ 中的元的 λ 的多项式称为 $F(z)$ 上 λ 的多项式或环 $F(z)[\lambda]$ 上的多项式。例如

$$\frac{3z_1 + z_2^2 z_3}{z_4 z_5 + z_3 z_4^2}\lambda^2 + 5\lambda + (z_1 + z_2)$$

令 F 表示任一域(可以是数域或 $F(z)$)。

定义 2.2　如果域 F 上次数 $\geqslant 1$ 的多项式 $f(\lambda)$ 不能表示成 F 上的两个次数比 $f(\lambda)$ 低的 λ 多项式的乘积，那么，该多项式 $f(\lambda)$ 称为域 F 上的 λ 的不可约多项式，否则是可约的。

按定义，一次多项式总是不可约多项式。而次数 >1 的多项式，对于不同的域可能有不同的结论，例如，多项式 λ^2+1 在有理数域上是不可约多项式，即不能分解成两个具有有理数系数的 λ 的一次多项式；在实数域上也是不可约的；但在复数域上是可约的：$\lambda^2+1=(\lambda+\mathrm{j})(\lambda-\mathrm{j})$。

对于数域上的 n 次($n>1$) 多项式，在复数域上总可分解成 n 个一次多项式之积。这是代数的一个已经证明了的结论。在复数域上不可约多项式的次数是 1，在实数域上不可约多项式的次数只可能是 1 或 2。

对于 $F(z)$ 上 λ 的 n 次多项式($n>1$) 在 $F(z)$ 上是否可约是个很复杂的问题，文献[Lu 等，1994] 研究了一类 $F(z)$ 上矩阵的特征多项式在 $F(z)$ 上不可约的条件。该条件说明在域 $F(z)$ 上存在次数可以任意大的不可约多项式(见 2.6 节)。

2.2　$F(z)$ 上矩阵运算及行列式

任何域(包括 $F(z)$) 上矩阵运算与数域上的矩阵运算规则一样。任何域(包括 $F(z)$) 上的方阵的行列式的计算规则与数域上的行列式一样。

令矩阵 $M=(m_{ij})(i,j=1,2,\cdots,n)$，那么 M 的行列式(determinant)的定义为

$$\det M=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}m_{1j_1}m_{2j_2}\cdots m_{nj_n}$$

其中 $\det M$ 或 $|M|$ 表示矩阵 M 的行列式；$j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列；$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的反序数。例如

$$\det\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

2.3 $F(z)$ 上矩阵的初等变换和某些结论

定义 2.3 下面三种对矩阵的演变，统一称为矩阵的初等变换：

(1) 用任意 $F(z)$ 中非零元 $\alpha\neq 0$ 去乘矩阵的第 i 行(列)；

(2) 把矩阵的第 i 行(列)乘以 μ 加之于第 j 行(列)，其中 $\mu\in F(z)$；

(3) 互换矩阵的第 i,j 两行(列)。

与此相对应有以下定义：

定义 2.4 下面三种正方矩阵统一称为初等矩阵：

(1) 用任意 $F(z)$ 中非零元 $\alpha\neq 0$ 去乘单位矩阵 I 的第 i 行(列)而得到的矩阵，即

$$\begin{array}{cl}\begin{bmatrix}1&&&&0\\&\ddots&&&\\&&\alpha&&\\&&&\ddots&\\0&&&&1\end{bmatrix}&\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow\text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \\ \end{array}\\ \begin{array}{c}\uparrow\\ \text{第 } i \text{ 列}\end{array}&\end{array}$$

(2) 把 I 的第 i 行(列)乘 μ 加于第 j 行(列)而得到的矩阵，即

$$\begin{array}{cl}\begin{bmatrix}1&&&&&0\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&\vdots&\ddots&&\\&&\mu&\cdots&1&\\&&&&\ddots&\\0&&&&&1\end{bmatrix}&\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow\text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \leftarrow\text{第 } j \text{ 行}\\ \\ \\ \end{array}\end{array},\quad \begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&&&&&0\\&\ddots&&&&\\&&1&\cdots&\mu&\\&&&\ddots&\vdots&\\&&&&1&\\&&&&&\ddots\\0&&&&&1\end{bmatrix}\\ \begin{array}{cc}\uparrow&\uparrow\\ \text{第 } i \text{ 列}&\text{第 } j \text{ 列}\end{array}\end{array}$$