普通高等教育“十一五”国家级规划教材

离散数学

Discrete mathematics

（第2版）

陈 莉 刘晓霞 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

离散数学

Lisan Shuxue

（第2版）

陈　莉　刘晓霞　编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，较全面地介绍了计算机科学与技术及相关专业所必需的数学知识。全书分为数理逻辑、集合论、近世代数与图论4篇。第一篇包括命题逻辑、谓词逻辑和非经典逻辑；第二篇包括集合、关系、函数和粗糙集；第三篇包括代数系统、半群、群、环、域、格和布尔代数；第四篇包括图的基本概念、欧拉图、哈密顿图、树、二分图、平面图和Petri网。各篇相对独立而又有机联系，书中的证明力求严格完整，例题、习题具有一定的典型性。全书内容深入浅出，便于自学，各章配有复习要点及上机练习题，便于读者总结和提高。本书还配有电子教案。

本书可作为高等学校计算机科学与技术及相关专业离散数学课程教材，也可作为考研及相关专业技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/陈莉，刘晓霞编著．—2版．—北京：高等教育出版社，2010.7

ISBN 978-7-04-029466-8

Ⅰ.①离… Ⅱ.①陈…②刘… Ⅲ.①离散数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第109252号

策划编辑 刘 艳 **责任编辑** 边晓娜 **封面设计** 于 涛 **责任绘图** 尹 莉
版式设计 范晓红 **责任校对** 杨凤玲 **责任印制** 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京印刷一厂	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	2002年8月第1版
			2010年7月第2版
开　　本	787×1092 1/16		
印　　张	23	印　　次	2010年7月第1次印刷
字　　数	520 000	定　　价	33.50元

物料号 29466-00

前　言

离散数学是计算机科学与技术的基础理论之一。作为高等学校计算机科学与技术专业的一门核心、主干课程，离散数学课程设置的主要目的是培养学生的抽象思维能力和逻辑推理能力，并为后继课程，如数据结构、编译原理、数据库、形式语言和自动机、人工智能以及操作系统等提供必要的数学基础。

西北大学的离散数学课程是陕西省高等学校精品课程。本书是编著者在第1版教材的基础上，广泛征求使用院校教师的意见和建议，并参考国内外相关教材，结合自身的教学科研实践重新修订而成的。本书力求做到体系完整、通俗易懂、简明扼要，每章配有大量的例题、习题和一定数量的上机练习题，以加强学生理论联系实际、主动提出问题和解决问题的能力。

本书内容分为4篇，即数理逻辑、集合论、近世代数与图论，源于数学的不同分支。每篇开始都有“开篇语”，对本篇内容与计算机科学与技术的联系加以阐述，有助于培养学生的科学素养，也有助于学生把握本部分内容的应用领域。编著者根据多年的教学实践，着重强调抽象、难懂、容易混淆的概念，并配以大量的例题，有助于基本概念的理解和掌握。为了给学生留有接受新知识的“窗口”和“接口”，与大多数同类教材相比，本教材还在相关篇章增加了非经典逻辑、粗糙集简介、Petri网等内容，可作为扩展内容阅读。为培养学生严谨、科学的思维方法和归纳、推理能力，进而产生对学科发展的一种自适应性，在每章的结尾均给出了“复习要点”，包括主要知识点和解题技巧两部分。其中，解题技巧分析了各章的习题类型，并总结了针对各种问题(相关知识点)的尽可能多的解题方法和技巧。每章都配有上机实习题，使学生在加强理论学习的同时提高解决实际问题的能力。针对部分篇章的内容，编著者总结了知识结构图(表)，收于附录一中，便于读者对比和总结有关概念。为便于读者参阅英文原版教材，书中附录二给出了离散数学名词中英文对照表。

全书共15章，其中，第一、二、四、五、六章由刘晓霞教授编写；第三、七、八、九、十、十一、十二、十三、十四、十五章及附录部分由陈莉教授编写；各章中的插图均由刘小宁老师制作。陈莉教授担任全书主编，刘晓霞教授担任副主编。

本书不仅可作为高等学校计算机科学与技术及相关专业的离散数学课程教材，也可作为考研及计算机工作者的参考书。

本教材还配有电子教案，有助于增大课堂教学的信息含量；与教材配套的习题解答不久也将与读者见面。

由于编著者的水平有限，书中不当和疏漏之处在所难免，敬请读者不吝指正。

作者于西北大学

2010年2月

目　录

第一篇　数理逻辑

第二篇　集　合　论

第三篇 近世代数

第四篇 图 论

* 可作为扩展阅读的内容

第一篇　数理逻辑

研究人的思维形式和规律的科学，称为逻辑学。根据所研究的对象和方法的不同，逻辑学分为形式逻辑、辩证逻辑和数理逻辑。

数理逻辑是用数学方法研究推理规律的科学。所谓数学方法，主要是指引进一套符号体系的方法。因此，数理逻辑又称符号逻辑。

用数学方法研究推理规律的思想，首先是由莱布尼茨（G. W. Leibniz，1646—1716，德国）提出的。因此，莱布尼茨被认为是数理逻辑的创始人。后来，布尔（George Boole，1815—1864，英国）和德·摩根（De Morgan，1806—1876，英国）等人得到了最初一些结果。从19世纪70年代到20世纪初，弗雷格（G. Frege，1848—1925，德国），佩亚诺（G. Peano，1883—1932，意大利）和罗索（B. Russell，1870—1970，英国）建立了命题演算和谓词演算，突破了古典形式逻辑的局限性，形成了一个完整的逻辑体系。希尔伯特（D. Hilbert，1862—1943，德国）和哥德尔（Kurt Gödel，1906—1978）等人的贡献，使数理逻辑已经发展成为一门内容丰富的学科。今天，数理逻辑的主要内容，大致可分成五个方面：逻辑演算，证明论，公理集合论、递归论和模型论。数理逻辑与计算机科学关系密切，在计算机科学的许多领域，如逻辑设计、人工智能、语言理论、程序正确性证明等方面，都有重要的应用。本篇介绍计算机科学中所必需的数理逻辑基础知识——命题逻辑、谓词逻辑以及非经典逻辑的有关内容。

本篇常用符号

$\wedge$	合取联结词	$\downarrow$	或非联结词
$\vee$	析取联结词	$\Leftrightarrow$	等价
$\neg$	否定联结词	m_i	极小项
$\rightarrow$	条件联结词	M_i	极大项
$\xrightarrow{c}$	逆条件联结词	$\Rightarrow$	蕴涵
$\leftrightarrow$	双条件联结词	$\forall$	全称量词
$\overline{\vee}$	异或联结词	$\exists$	存在量词
$\uparrow$	与非联结词		

第一章 命题逻辑

命题逻辑也称命题演算，或语句演算。它研究以命题为基本单位构成的前提和结论之间的可推导关系。究竟什么是命题？如何表示命题？如何由一组前提推导一些结论？下面详细讨论这些问题。

1.1 命题及联结词

1. 命题的概念

所谓命题，就是指具有真假意义的陈述句，且真或假二者必居其一，也只居其一。也就是说，凡是能分辨其真假的陈述句都是命题。无所谓是非的句子，如感叹句、疑问句、祈使句等都不能作为命题。不可能分辨其真假的陈述句也不能作为命题。下面举出一些例子，说明这一概念。

(1) 西北大学是一所全国重点大学。

(2) 教师是人类灵魂的工程师。

(3) 明年我将去欧洲。

(4) $1+1=10$。

(5) 下个月十五号是晴天。

(6) 请安静！

(7) 今天天气多好啊！

(8) 现在是几点钟？

(9) 我在说假话。

(10) 7 小于 2。

(11) 中国成功地举办了 2008 年奥运会并且中国加入了 WTO。

(12) $x-y>2$。

在上面这些例子中，(1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(10)和(11)都是命题。其中(1)、(2)、(11)是真命题，(10)是假命题。也就是说这些陈述句可以立刻辨明其真假意义。(4)是有条件的，在二进制中这是一个真语句，而在十进制中则是一个假语句。一般来说，根据上下文可以分辨出这样一个语句是真或者是假，因此它也是一个命题。至于(5)要到下个月十五号才能得知它的真假。但是，也说它是个命题。(3)和(5)是类似的，尽管现在还不能确定它是真或是假，但它是有真假可言的，因此也说它是命题(将在第三章讨论)。由此可见，这里所说的“能分辨其真假值”

的意义与“已知其真假值”的意义是不同的。(6)、(7)和(8)都不是命题。因为这些是无所谓是非的祈使句、感叹句和疑问句。(9)是悖论,虽然这也是一个陈述句,但无法判断其真假。因为,如果假定这句话是真的,这时根据其意义又可推出这句话是假的。若假定这句话为假,则根据该语句本身的含义说明它又是真的。也就是说,这是一个不能分辨其是真或是假的语句。该语句存在语义上的自相矛盾,无法确定其真假。由上述分析可知,这是一个不能判断真假的语句,所以不是一个命题。(11)是一个复合命题,它是由命题“中国成功地举办了 2008 年奥运会”和命题“中国加入了 WTO”用联结词“并且”联结起来而得到的一个新命题,由于命题“中国成功地举办了2008 年奥运会”的真值为真且“中国加入了 WTO”的真值亦为真,所以中国成功地举办了2008 年奥运会并且中国加入了WTO 这个复合命题的真值为真。(12)中 x,y 的值不确定,某些 x,y 使 $x-y>2$ 的真值为真,某些 x,y 使 $x-y>2$ 的真值为假,即 $x-y>2$ 的真值随 x,y 的变化而变化。因此 $x-y>2$ 的真值无法确定,所以 $x-y>2$ 不是命题。

2. 命题的真值及命题的表示

命题是能够分辨其真假的陈述句,且真或假二者必居其一,也只居其一。因此,命题逻辑是二值逻辑。把命题的“真”或“假”称为命题的“真值”,分别用 T(True)和 F(False)来表示。且使用除 T 和 F 之外的大写英文字母 $A,B,\cdots,Z$ 或带下标的大写字母 A_1,A_2 等表示命题,称为命题标识符。

例如,用 P 表示命题“今天是星期一”,可写成

P:今天是星期一。

Q 表示命题“中国加入了 WTO”,可写成

Q:中国加入了 WTO。

若今天是星期一,则 P 的真值为 T;否则,P 的真值为 F。而 Q 的真值为 T。

3. 联结词

在日常语言中,一些简单的陈述句,通过某些联结词联结起来,组成较为复杂的语句。例如某人会说,“如果下星期日是晴天,那么我就去参观兵马俑。”这里就是用“如果……,那么……”把两个陈述句“下星期日是晴天”和“我去参观兵马俑”联结起来组成的一个新陈述句。因而也就是说,用“如果……,那么……”把两个命题联结起来得到一个新命题。当然,在日常语言中还有许多联结词,如“不”、“并且”、“或者”、“当且仅当”等都是联结词。使用它们可以将一个命题加以否定或将两个命题联结起来得到新命题。但是,在日常语言中,这些联结词的使用,一般没有严格的定义,有时就显得不很准确,常常带有二义性。在数理逻辑中,也引入联结词,这些联结词就是从日常所使用的联结词抽象出来的,它有严格的意义。因此,与日常所使用的联结词相比,含义并不完全相同。

下面介绍常用的五种联结词。

(1)“合取”联结词,记作“$\wedge$”,也称为“与”。

设 P 和 Q 是命题,利用“合取”联结词可将 P 和 Q 联结起来,组成命题“$P\wedge Q$”,读作“P 与 Q 的合取”或“P 与 Q”。$P\wedge Q$ 的真值由表 1.1.1 来确定。这种形式的表,称为真值表。

表 1.1.1 合取之真值表

P	Q	$P\wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

真值表中第一行的意思是：当 P 和 Q 的真值都是真时，$P\wedge Q$ 的真值也是真。其余各行，依此类推。

由表中可以看出，当且仅当 P 和 Q 的真值都是 T 时，$P\wedge Q$ 的真值才是 T，否则 $P\wedge Q$ 的真值是 F。

在其他书上也有使用“并且”表示合取，用 1 表示真值 T，0 表示真值 F。

注意，这里的合取和日常生活中所使用的“与”不完全相同。

首先，在日常语言中使用“与”时，通常是两个命题之间具有某种关系。但在数理逻辑中，并不要求两个命题之间有任何联系。例如，在日常生活中如果一个人把“2+3=5”和“太阳从东方升起”联成一句话“2+3=5 与太阳从东方升起”，人们一定不知道他说的是什么意思。但在数理逻辑中，这样联结起来的语句是完全正确的，而且它的真值可由上表决定。之所以如此，是因为数理逻辑所研究的是推理的形式关系，并不涉及推理中的前提和结论的具体内容。

其次，在日常语言中，常常可用“与”将两个名词联结起来，例如说：“张强与王成是同学”。但是，这里的“与”和数理逻辑中所使用的“与”是不同的。因为，这里的“与”不具有将两个命题联结起来的功能。因而它不是数理逻辑中的联结词。

合取联结词具有对称性，即 $P\wedge Q$ 和 $Q\wedge P$ 具有相同的真值。

例 1.1.1 P：今天是晴天。

Q：我们去参观大雁塔。

$P\wedge Q$：今天是晴天而且我们去参观大雁塔。 □

（2）“析取”联结词，记作“∨”，也可称为“或”。

利用此联结词可将命题 P 和 Q 联结起来，组成命题“$P\vee Q$”，读作“P 和 Q 的析取”或者“P 或 Q”。它的真值由表 1.1.2 确定。

表 1.1.2 析取之真值表

P	Q	$P\vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

由析取的真值表可知，当且仅当 P 和 Q 的真值都为 F 时，$P\vee Q$ 的真值才是 F，否则 $P\vee Q$ 的

真值是 T。

由析取的定义可以看出，联结词∨的意义与日常所使用的“或”的意思并不完全相同。在日常生活中，“或”实际上有“排斥或”与“可兼或”之分，通常在使用时，并不进行区分，而是根据具体情况加以区别。另外，在日常生活中有时使用“或”是表示其他意义，如：汽车提前15或20分钟到达。这里的“或”，表示一种大约的时间。在数理逻辑中，要特别注意，析取表示的是“可兼或”。

与“∧”联结词相似，在自然语言中，通常是具有某种关系的两条语句之间使用析取“或”，但在数理逻辑中，并不要求这一点，即和“合取”联结词一样，在使用“析取”时，并不要求两个命题之间有某种关系。

例 1.1.2　P：李明在教室。

Q：米卢是个好教练。

$P \vee Q$：李明在教室或米卢是个好教练。 □

例 1.1.3　P：米卢在北京。

Q：米卢在西安。 □

那么米卢在北京或米卢在西安，是否可表示为“$P \vee Q$”？显然，是不能这样表示的。在这种意义上使用的“或”，是不可兼或，称为“异或”，用符号“$\overline{\vee}$”表示，即米卢在北京或米卢在西安，应该表示为 $P \overline{\vee} Q$。

由上述可知，自然语言中的“或”是多义的，主要有以下三种情况。

- 可兼或：二者至少有一个发生，不排斥二者都发生的情况。这是析取联结词的含义。如 $ab=0$，即 $a=0$ 或 $b=0$ 或 $a=b=0$。
- 排斥或：非此即彼，二者不可兼得。用符号 $\overline{\vee}$ 表示。如6或者是偶数或者是奇数。
- 表示近似数的意义，如去图书馆需6或7分钟。这里的或不是联结词。

因此，在遇到含有“或”的语句时，要分清它是“可兼或”、“排斥或”、还是表示近似数的“或”，否则就不能正确表达原命题的意义。

(3)“否定”联结词，记作“¬”，也可称为“非”。

给定一个命题 P，可以由 P 得到一个新命题“$\neg P$”，读作“非 P”，它的真值由表1.1.3决定。

表 1.1.3　否定之真值表

P	$\neg P$
T	F
F	T

由 $\neg P$ 的真值表可知，$\neg P$ 的真值是 T，当且仅当 P 的真值是 F。反之亦然。

例 1.1.4　P：今天是星期一。

$\neg P$：今天不是星期一。 □

再如，P：西安是一个大城市。那么，$\neg P$：西安不是一个大城市。应注意，不能把“西安是一

个小城市"认为是$\neg P$。这是由于不能把"西安不是一个大城市"与"西安是一个小城市"等同看待之缘故。因为,不是大城市的情况有中等城市、小城市和农村等几种可能。如同今天不是星期一,可以是星期二或星期三或星期四或星期五或星期六或星期日一样。

(4)"如果……,则……",记作"$\rightarrow$"或"$\supset$"。也可称为条件联结词,还有人称为"蕴涵"。但在本书中"蕴涵"有另外的含义,在以后使用蕴涵时,不是指这里的联结词。

设P和Q是命题,用"如果……,则……"把它们联结起来,就会得到一个新命题,记作"$P\rightarrow Q$",读作"如果P,则Q",称为条件命题,其真值由真值表1.1.4所给出。

表1.1.4 "如果……,则……"之真值表

P	Q	$P\rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

由表1.1.4可以看出,当且仅当P的真值为T,Q的真值为F时,$P\rightarrow Q$的真值为F,否则$P\rightarrow Q$的真值为T,称P为前件或前提,Q为后件或结论。

在通常使用的自然语言和其他学科中,在"如果……"与"则……"之间,常有某种因果关系。若没有任何关系,这样的语句一般是不使用的。但在数理逻辑中,并不要求前件和后件之间要有什么联系。例如:"如果2+3=5,则今年是丰收年"。在日常语言中,这样的语句是不被使用的。但是,在数理逻辑中却是允许的,而且和其他命题一样正确、合理。

由上述可知,在数理逻辑中,用"$\rightarrow$"联结起来的两个命题,根本不去考虑这两个命题之间是否有关系。用这个联结词联结两个命题P和Q,得到命题$P\rightarrow Q$,当P的真值为F时,无论Q的真值是什么,$P\rightarrow Q$的真值都是T。这一点与自然语言中所使用的"如果……,则……"是不同的。因为在自然语言中,当前提为假时,不管结论是真或是假,往往无法判断其真假。例如命题"如果下星期日天气晴朗,则我去参观兵马俑"中,"下星期日天气晴朗"是真,"我去参观兵马俑"也是真,这个条件命题是真,这是符合日常习惯的。若"下星期日天气晴朗"是真,"我去参观兵马俑是假",条件命题是假这也是自然语言中所使用的。但是,当"下星期日天气晴朗"是假的时候,在自然语言中通常是不考虑这种情况的。但在数理逻辑中,对于这个命题,在这种情况下必须给出它的真值来。按照上述真值表1.1.4给出的真值,就是认为在"下星期日天气晴朗"是假的情况下,无论"我去参观兵马俑"是真或是假,都认为这个条件命题是真,称为"善意的推定"。

(5)"双条件"联结词,记作"$\leftrightarrow$"或"*iff*"。

用双条件联结词将两个命题P,Q联结起来,可得到一个新的双条件命题,记为"$P\leftrightarrow Q$",读作"P当且仅当Q"。它的真值由表1.1.5给出。

表 1.1.5 双条件之真值表

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

由表 1.1.5 可以看出，当且仅当 P 和 Q 的真值相同时，“$P \leftrightarrow Q$”的真值才是 T，否则 $P \leftrightarrow Q$ 的真值为 F。双条件联结词亦称为同或。

双条件联结词↔是自然语言中“充分必要条件”、“当且仅当”等的抽象。和上面定义的几个联结词“∧”、“∨”、“→”一样，构成双条件命题 $P \leftrightarrow Q$，也不要求 P 和 Q 两个命题之间有任何联系，$P \leftrightarrow Q$ 的真值，仅与 P 和 Q 的真值有关。例如可将“2+3=5”和“雪是白的”联结起来，得到“2+3=5 当且仅当雪是白的”。

4. 命题的分类

从以上讨论可以看出，一类命题是不能分解为更简单的陈述句的，即不含任何联结词的命题，称为原子命题；另一类是至少包含一个联结词的命题，称为复合命题或分子命题。复合命题的真值只取决于构成它的各原子命题的真值，而与它们的内容、含义无关，与联结词所联结的两个原子命题之间是否有关系无关。

1.2 命题公式及命题公式的翻译

1. 命题变元的概念

前面曾约定用大写英文字母表示命题。如果用 P 表示的是一个抽象的命题，而不是一个具体的命题时，就称它为命题变元。由于命题变元可以表示任意命题，所以不能确定它的真值。例如 P 是命题变元，那么，它既可以表示命题“米卢带领中国男子足球队冲进了世界杯”，又可以表示命题“雪是黑的”。当它表示“米卢带领中国男子足球队冲进了世界杯”时，其真值为 T。当它表示“雪是黑的”时，其真值为 F。所以，命题变元不是命题。当一个命题变元用一个特定的命题取代时，才能确定其真值，把一个命题变元用一个特定的命题取代称为对该命题变元进行真值指派。当命题变元表示原子命题时，该变元称为原子命题变元。本章及下章中的命题变元，均指原子命题变元。

2. 命题公式

定义 1.2.1 命题演算的合式公式 WFF（Well Formed Formula），又称命题公式（简称公式），可按下列规则生成：

（1）命题变元是命题公式；

（2）如果 A 是公式，则 $\neg A$ 是命题公式；

（3）如果 A 和 B 是公式，那么 $(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \to B)$ 和 $(A \leftrightarrow B)$ 都是命题公式；

(4) 当且仅当有限次地应用(1)、(2)、(3)所得到的包含命题变元、联结词和括号的符号串才是命题公式。

(1)、(2)、(3)和(4)构成命题公式的定义,这样的定义称为归纳定义。

从命题公式的定义可知:命题公式没有真值,只有对其命题变元进行真值指派后,方可确定命题公式的真值。命题公式的结构可以很简单,如原子命题变元,也可以很复杂。

如果一个命题公式中总共含有 n 个不同的命题变元,则称其为 n 元命题公式。

例如:$\neg A$,$\neg(R\vee Q)$,$((R\vee\neg Q)\to R)$,$((P\leftrightarrow Q)\to R)$,$((P\leftrightarrow\neg Q)\wedge((Q\to R)\leftrightarrow(R\vee Q)))$,$(\neg(R\vee Q)\wedge(Q\to R))$,$A$ 都是命题公式,其中 A,$\neg A$ 为1元命题公式,而$((P\leftrightarrow Q)\to R)$为3元命题公式。

根据定义1.2.1知,$R\vee Q$,$A\vee\vee B$,$Q\wedge\wedge R$,$R\to Q\to S$,$S\leftrightarrow R\to Q$,$B\leftrightarrow(C\vee D)$,$P\wedge Q\to R$ 都不是命题公式。

从命题公式的构造过程及上面的例子可以看到,一个命题公式中可能出现许多对圆括号。为了减少使用圆括号的数量,做如下约定:命题公式最外层的圆括号可以省略。这样 $R\vee Q$,$B\leftrightarrow(C\vee D)$就是公式了。同时约定对于联结词,一般不规定它们之间的优先次序。若规定了联结词运算的优先次序为$\neg$,$\wedge$,$\vee$,$\to$,$\leftrightarrow$,则 $P\wedge Q\to R$,$S\leftrightarrow R\to Q$ 也是公式。但本书不规定联结词的优先顺序。

3. 命题公式的符号化

把一个用文字叙述的命题写成由命题标识符、联结词和圆括号表示的合式公式,称为翻译,也称符号化。命题的符号化在数理逻辑中尤为重要,是进行推理的基础。

符号化的步骤:

(1) 确定给定的句子是否为命题。

(2) 找出各原子命题并确定句子中的连词对应的联结词。

(3) 用正确的语法把原命题表示成由原子命题、联结词和圆括号组成的合式公式。

例 1.2.1 符号化下列命题:

(1) 他既聪明又用功。

(2) 他虽聪明但不用功。

解 P:他聪明。

Q:他用功。

则有:

(1) 可符号化为 $P\wedge Q$。

(2) 可符号化为 $P\wedge\neg Q$。

例 1.2.2 除非有时间,我才去看电影。

解 A:我有时间。

B:我去看电影。

则原命题可符号化为:$B\to A$。

这个命题的意义，亦可理解为如果我没有时间，我就不去看电影，故可符号化为$\neg A \rightarrow \neg B$。

问题：既然上述命题可以有两种不同的公式表示形式，这两个公式$B \rightarrow A$和$\neg A \rightarrow \neg B$应该有某种相同的性质，这个问题将在后面讨论。

例 1.2.3 除非你努力，否则你将失败。

解 A:你努力。

B:你将失败。

则原命题可符号化为：$\neg A \rightarrow B$。 □

例 1.2.4 我不承认你是对的，除非太阳从西边出来。

解 P:我不承认你是对的。

Q:太阳从西边出来。

则原命题可符号化为：$\neg Q \rightarrow P$。 □

例 1.2.5 如果你和他都不固执己见的话，那么不愉快的事也不会发生了。

解 P:你固执己见。

Q:他固执己见。

R:不愉快的事不会发生。

则原命题可符号化为：$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$。 □

例 1.2.6 如果你和他不都是固执己见的话，那么不愉快的事也不会发生了。

解 P:你固执己见。

Q:他固执己见。

R:不愉快的事不会发生。

则原命题可符号化为：$\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$。 □

请仔细区分例 1.2.5 和例 1.2.6。

例 1.2.7 西安到北京的 42 次列车是下午 5 点半或晚上 10 点 50 分开。

解 P:西安到北京的 42 次列车是下午 5 点半开。

Q:西安到北京的 42 次列车是晚上 10 点 50 分开。

则原命题的真值表如表 1.2.1 所示。

表 1.2.1

P	Q	原命题
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

所以，原命题可表示为$\neg(P \leftrightarrow Q)$或$\neg P \leftrightarrow Q$或$P \leftrightarrow \neg Q$或$P \overline{\vee} Q$。 □

例 1.2.8 他获得了本次奥林匹克信息竞赛的冠军或亚军。